2. Vektorräume

$\mathbb{R}^2 = \{(a_1, a_2); a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

2.1 Axiome, Rechenregeln, Beispiele

Definition:
Eine Menge V mit zwei Operationen $(u, v) \in \mathbb{V}^2 \to u + v \in \mathbb{V}$ und $(u, \lambda) \in \mathbb{V} \times \mathbb{R} \to \lambda u \in \mathbb{V}$ heißt Vektorraum, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(I) $\forall u, v \in \mathbb{V} : u + v = v + u$ (Kommutativität)

(II) $\forall u, v, w \in \mathbb{V} : (u + v) + w = u + (v + w) =: u + v + w$ (Assoziativität)

(III) $\exists 0 \in \mathbb{V} \forall v \in \mathbb{V} : v + 0 = v$ (Neutrales Element)

(IV) $\forall v \in \mathbb{V} \exists - v \in \mathbb{V} : v + (-v) = 0$ (Inverses Element)

(V) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall v \in \mathbb{V} : \lambda(\mu v) = (\lambda \cdot \mu)v =: \lambda\mu v$

(VI) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall v, u \in \mathbb{V} : \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$

(VII) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall v \in \mathbb{V} : (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$

(VIII) $\forall v \in \mathbb{V} : 1v = v$

Rechenregeln

- Das Nullelement aus (III) ist eindeutig bestimmt.
- Das inverse Element zu einem v ist eindeutig bestimmt, es gilt $-v = (-1)v$.
- $\forall v \in \mathbb{V} : 0v = 0$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda 0 = 0$
- $\lambda x + y = z, \lambda \in \mathbb{R}, x, y, z \in \mathbb{V}, \lambda \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda}(z - y)$

Beispiel
$V = \mathbb{F}(\mathbb{R}) :=$ Menge der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
"punktweise" Operaionen $\begin{cases} (f + g)(x) := f(x) + g(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ (\lambda f)(x) := \lambda f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$
Nullelement: $f = 0$, d.h. $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
inv. Element: $(-f)(x) := -f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$
Beispiel
Seien (V,W) Vektorräume, dann wird $V \times W$ zu einem neuen Vektorraum durch:
$(v_1, w_1) + (v_2 + w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ Nullelement: $(0, 0)$
$\lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w)$ inv. Element zu $(v, w) : (-v, -w)$
$\Rightarrow \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$

2.2 Unterräume und affine Unterräume

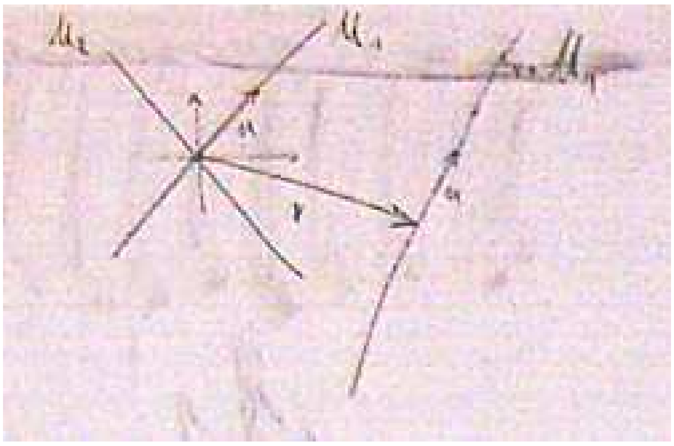
Definiton: Sei V ein Vektorraum:

(i) $U \subseteq V$ heißt unterraum von V, wenn für alle $u, v \in U, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $u + v \in U, \lambda u \in U$
U ist mit den v von V "geerbte" Operationen ein Vektorraum.

(ii) $A \subseteq V$ heißt affiner Unterraum von V, wenn ein Unterraum U von V existiert unf ein $v \in V$ mit $A = \{v + u : u \in U\} =: v + U$.

Beispiel
$V = \mathbb{R}^2$
Unterräume: $\{0\}, \mathbb{R}^2$, Geraden durch Null
affine UR: alle "echten" Unterräume, alle Geraden (nicht durch Null)

Bemerkung
$v_1 + U_1 = v_2 + U_2$ gilt genau dann, wenn $v_1 - v_2 \in U_1 = U_2$
Beispiel
UR in $\mathbb{R}^3$: $\{0\}, \mathbb{R}^3$, alle Geraden durch Null, alle Ebenen durch Null



Beispiel (UR von Funktionen)
$V = \mathbb{F}(\mathbb{R})$
Unterräume:

- $C(\mathbb{R})$:=Menge der stetigen Funktionen
- $C^k(\mathbb{R})$:=Menge aller k-fach stetig diffenrenzierbaren Funktionen ($k \in \mathbb{N}$)
- $\mathbb{R}[x]$:=Menge der Polynome
- $\mathbb{R}_n[x]$:=Menge der Polynome vom Grad $\leq n$

$\mathbb{R}_n[x] \subset \mathbb{R}_2[x] \subset \cdots C^k(\mathbb{R}) \subset C^{k-1}(\mathbb{R}) \subset \cdots \subset C(\mathbb{R}) \subset \mathbb{F}(\mathbb{R})$

Definition

(i) Sei $v_1, \cdots v_n \in V, \lambda_1, \cdots \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann heißt $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ Linearkombination von $v_1, \cdots, v_n$

(ii) Sei $M \subseteq V$, dann heißt
span M:= $\{v \in V :$ v ist Linearkombination von Endlich vielen Elementen von M$\}$
lineare Hülle von M in V

Beispiel
$M = \{v_1, \cdots v_n\}$
span M=$\{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$

Sprechweise: span M ist der Unterraum, der von den Elementen von M aufgespannt wird.

Beispiel
$v = \mathbb{F}(\mathbb{R})$
$M = \{1, x^2, x^3, \cdots\} \Rightarrow \text{span } M = \mathbb{R}[x]$
Sei $f \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$
$M = \{1, x^2, x^3, \cdots\} \Rightarrow \text{span } M = \mathbb{R}_2[x]$

Durchschnitt und Summe von Unterräumen:
Seien V_1, V_2 zwei Unterräume von V, dann gilt:

- $V_1 \cap V_2$ ist wieder Unterraum
- $V_1 + V_2 := \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_2, v_2 \in V_2\}$ ist auch Unterraum
  Wenn $v_1 \cap V_2 = \{0\}$, dann nennt man $V_1 + v_2$ direkte Summe und schreibt
  $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$

Beispiel
$V = \mathbb{R}$
$V_1 = \text{span } \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ $x_1 - x_2$-Ebene
$V_2 = \text{span } \{(0,1,0), (0,0,1)\}$ $x_2 - x_3$-Ebene
$V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$