Korrektur zur Vorlesung vom 15.04.2003

- $y_{i0+1}^2 + \cdots + y_n^2 > 0$: keine Lösung

- $y_{i0+1} = \cdots = y_m = 0$:

    - $i_0 = n$: genau eine Lösung

    - $i_0 < n$: unendlich viele Lösungen, $n - i_0$ "freie Parameter"

- $m = i_0 \leq j_0 \leq n \Rightarrow n > m$: unendlich viele Lösungen, $n - m$ freie Variablen

- $n = m$: genau eine Lösung

Gauß - Algorithmus

1. Schritt

1.1.

$j_1 := \min\{j = 1, \cdots, n : a_{1j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 > 0\}$

1.2.

Wähle i_1 mit $a_{i1j1} \neq 0$

1.3.

Vertausche die erste und die i_1-te Zeile

1.4.

Für alle $i = 2, \cdots, m$: Subtrahiere von der i-ten Zeile das $\frac{a_{ij1}}{a_{1j1}}$-fache der ersten Zeile
(Vorsicht: neue Koeffizienten, a_{1j1} möglichst groß)

2. Schritt

2.1.

$j_2 := \min\{j = j_1 + 1, \cdots, n : a_{2j}^2 + \cdots + a_{mj}^2 > 0\}$

1.2.

Wähle i_2 mit $a_{i2j2} \neq 0$

1.3.

Vertausche die erste und die i_2-te Zeile

1.4.

Für alle $i = 3, \cdots, m$: Subtrahiere von der i-ten Zeile das $\frac{a_{ij2}}{a_{2j2}}$-fache der ersten Zeile

Satz über die Lösungseigenschaften lineare Gleichungssysteme in Stufenform

Das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_j (i = 1, \cdots, n)$$

habe wenigstens einen Koeffizienten a_{ij} ungleich NUll und Stufenform.
Sei $i_0 := \max\{i = 1, \cdots, m : a_{i1}^2, \cdots, a_{in}^2 > 0\}, j_0 := \min\{j = 1, \cdots, n : a : i0 \neq 0\}$, dann gilt:

(i) Sei $j_0 < m$ und $y_{i0+1}^2 + \cdots + y_n^2 > 0$, dann existiert keine Lösung

(ii) Sei $i_0 < m$ und $y_{i0+1} = \cdots = y_n = 0$ und $i_0 < n$, dann ex. unendlich viele Lösungen ($n - i_0$ frei Parameter)

(iii) Sei $i_0 < m$ und $y_{i0+1} = \cdots = y_n = 0$ und $i_0 = n$, dann genau aine Lösung

(iv) Sei $i_0 = m < n$, dann ex. unendlich viele Lösungen ($n - m$ freie Prameter)

(v) Sei $i_0 = m = n$, dann ex. genau eine Lösung

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten

analog zum Verfahren mit reelen Koeffizienten.
oder:

$$\begin{aligned} ax + by &= f \\ cx + dy &= g \end{aligned}$$

$a, b, c, d, e, f, x, y \in \mathbb{C}$

$$\begin{array}{rrrrl} \mathrm{Re}\ a\ \mathrm{Re}\ x & -\mathrm{Im}\ a\ \mathrm{Im}\ x & +\mathrm{Re}\ b\ \mathrm{Re}\ y & -\mathrm{Im}\ b\ \mathrm{Im}\ y & = \mathrm{Re}\ f \\ \mathrm{Im}\ a\ \mathrm{Re}\ x & +\mathrm{Re}\ a\ \mathrm{Im}\ x & +\mathrm{Im}\ b\ \mathrm{Re}\ y & +\mathrm{Re}\ b\ \mathrm{Im}\ y & = \mathrm{Im}\ f \\ \mathrm{Re}\ c\ \mathrm{Re}\ x & -\mathrm{Im}\ c\ \mathrm{Im}\ x & +\mathrm{Re}\ d\ \mathrm{Re}\ y & -\mathrm{Im}\ d\ \mathrm{Im}\ y & = \mathrm{Re}\ g \\ \mathrm{Im}\ c\ \mathrm{Re}\ x & +\mathrm{Re}\ c\ \mathrm{Im}\ x & +\mathrm{Im}\ d\ \mathrm{Re}\ y & +\mathrm{Re}\ d\ \mathrm{Im}\ y & = \mathrm{Im}\ g \end{array}$$