1) Lineare Gleichungssysteme - Der Gauß-Algorithmus

1.1 Zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$\begin{array}{lll} (1) & ax+by & =f \\ (2) & cx+dy & =g \end{array}$$

geg: Koeffizienten: a,b,c,d
Rechte Seiten, Inhomogenitäten: f,g
ges:Unbekannte: x,y
1. $ad \neq bc$: $a \cdot (2) - c \cdot (1) : a(cx+dy) - c(ax+by) = ag - cf$
$(ad-bc)y = ag - cf$
$y = \frac{ag-cf}{ad-bc}(a \neq 0$ oder $c \neq 0)$, also ist x eindeutig bestimmt.
2. $ad = bc$
2.1 $ag \neq cf \Rightarrow$ keine Lösung
2.2 $ag = cf$
2.2.1 $bg \neq df$: $b \cdot (2) - d \cdot (1) : b(cx+dy) - d(ax+by) = bg - df$
$(bc-ad)x = bg - df \Rightarrow$ keine Lösung
2.2.2 $bg = df$:
2.2.2.1 $a \neq 0$: $x = \frac{1}{a}(f \cdot by)$
$c\frac{1}{a}(f \cdot by) + dy = g$ automatisch erfüllt, unendlich viele Lösungen, ein "freier Parameter"
$b \neq 0$ oder $c \neq 0$ oder $d \neq 0$: analog
$a = b = c = d = 0$: $f \neq 0$ oder $g \neq 0 \Rightarrow$ keine Lösung
$f = g = 0 \Rightarrow$:unendlich viele Lösungen, zwei "freie Parameter"

1.2 Der Gauß-Algorithmus

(3)

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & y_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & y_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_2 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & y_m \end{array}$$

oder auch:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = y_i(i = \{1, 2, \cdots, m)$$

geg: $a_{ij}, y_i(i = 1, 2, \cdots, m)(j = 1, 2, \cdots, n))$
ges: x_j

Definition

Folgende Operationen (die offenbar die Menge der Lösungen von (3) nicht ändern) heißen elementare Zeilenumformungen:

- Vertauschen zweier Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$
- Das Ersetzen der i-ten Zeile durch die Summme der i-ten Zeile und dem λ-Vielfachen der j-ten Zeile

Definition

(3) hat Stufenform, wenn für alle $i = 1, \cdots, n$ folgendes gilt:

- Wenn ein $k \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$ existiert mit $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{ik} = 0$, dann gilt: $a_{i+11} = a_{i+12} = \cdots = a_{i+1k} = 0$
- Wenn $a_{i1} = \cdots = a_{in} = 0$, dann $a_{i+11} = \cdots = a_{i+1n} = 0$
- Wenn $a_{i1} \neq 0$, dann $a_{i+11} = 0$

Satz

(3) habe Stufenform, und mindestens ein Koeffizient sei ungleich Null
Sei $i_0 := \max\{i = 1, \cdots, m : a_{i1}^2 + \cdots a_{in}^2 > 0\}$
Sei $j_0 := min\{j = 1, \cdots, n : a_{i0j} \neq 0\}$
Dann gilt:

(i) Wenn $i_0 < m$ und $y_{i0+1}^2 + y_{i0+2}^2 + \cdots + y_m^2 > 0$, dann ex. keine Lösung

(ii) Wenn $i_0 < m$ und $y_{i0+1} + y_{i0+2} + \cdots + y_m = 0$, dann ex. unendlich viele Lösungen ($n - i_0$ "freie Parameter")

(iii) Wenn $i_0 = m = j_0$, dann ex. genau eine Lösung

(iv) Wenn $i_0 = m < j_0$, dann existieren unendlich viele Lösungen ($m - j_0$ "freie Parameter")

Satz über den Gauß-Algoritmus

Jedes lin. Gleichungssystem läßt sich durch endlich viele elem. Zeilen auf Stufenform bringen.