

f periodisch, Periode 2π , "Integrierbarkeitsvoraussetzung",

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx))$$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{2 \sin(\frac{t-x}{2})} dt \text{ uneigentliches Integral.}$$

Hilfssatz: $t = u + x, s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})(t-x))}{2 \sin(\frac{t-x}{2})} dt = \frac{1}{\pi} \int f(x+t) + f(x-t) \cdot \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt$

Riemann-Hilfssatz

g und |g| seien auf $[a, b]$ integrierbar, (beschränkt) (evtl. nur uneigentlich):

$$i) \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin(pt) dt = 0$$

$$ii) \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos(pt) dt = 0$$

Problem: Best. von $s_n(x)$. $\int_0^\pi (\dots) dt = \int_0^\delta (\dots) dt + \int_\delta^\pi (\dots) dt, 0 < \delta < \pi$

wählen: delta klein, positiv (fest) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt + \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt}_{\text{...}}$

Wählen $g(t) := \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$ definiert, für $t \in [\delta, \pi]$ ist $\sin \frac{t}{2} \neq 0$.

Nach HS. ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_\delta^\pi g(t) \cdot \sin((n+\frac{1}{2})t) dt = 0$.

Riemannsches Lokalisierungsprinzip

Falls die Fourierreihe von f konvergiert, so ist der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ nur von dem Int. $\frac{1}{\pi} \int_0^\delta (f(x+t) + f(x-t)) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt$ abhängig und gleich dessen Limes für $n \rightarrow \infty$

Folg:

- $\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0$, S_0 Konstante.
Dann konvergiert die Fourierreihe von f in $x = x_0$ genau dann gegen S_0 , wenn $\int_0^\delta \frac{\varphi(t)}{t} dt$ existiert.
(Idee: wählen $S_0 := f(x_0)$. Bilden obiges Integral für f identisch 1)
(Spezialfall d. Kriteriums von Dini)
- Falls f stetig differenzierbar, so konvergiert die Fourierreihe von f gegen $f(x_0)$.
Idee: $\frac{1}{t}(f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} + \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2f'(x_0)$.
(Spezialfall des Lipschitz-Kriteriums)

Differenzialgleichungen

$$\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$g(t, x)$ ist der Zustand des Systems, wenn "x nach Ablauf der Zeit t" betrachtet wird. Surch $x \in \Omega$ sind "Zukunft und Vergangenheit von x" bestimmt.

Durch alle Punkte von Ω verläuft genau ein Orbit $\{g(t, x) | t \in \mathbb{R}\}$

$$g(t, x) = e^{ct} \cdot x_0, c \in \mathbb{R} \text{ eine Konstante, } x_0 \in \mathbb{R}, x(t) := g(t, x_0), x(0) = x_0, \frac{d}{dt}(x(t)) =$$

$$c \cdot \underbrace{e^{ct}}_{x(t)} \cdot x_0.$$

$$\circ \frac{d}{dt}(x(t)) = c \cdot x(t)$$

Das dynamische System (genauer: Sein Entwicklungsgesetz) ist Lösung der Differentialgleichung \circ

Verallg: Suchen Lösung der Differentialgleichung $x' = cx^\alpha$ (zuvor: $\alpha = 1$), c konst.

Lösungsidee: "Trennung der Variablen" $x^{-\alpha} \frac{dx}{dt} = c$, also $\int x^{-\alpha} \frac{dx}{dt} dt = c \cdot t \Rightarrow$

$$(\alpha > 1) \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = ct + K, K \in \mathbb{R}$$

$$x = \frac{1}{(ct+K)^{\frac{1}{-\alpha+1}}} x(t) \text{ divergent für } t \rightarrow -\frac{K}{c}$$