Der Beweis des Additionstheorems war so unstrukturiert, dass ich das niemandem zumuten möchte. Läßt sich aber in jedem guten Mathebuch finden :)
Zur Fourier-Transformation:
http://www.spoc.ethz.ch/uli/papers/diss/main-node23.html
Anwendung: JPEG-Bildkompression (Cosinus-Transformation)

Beispiel

$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x); x_i = i \cdot \frac{2}{3}\pi$
$f(x_{-1}) = 2 - 2\sqrt{3}$
$f(x_0) = i - 1$
$f(x_1) = 2 + 2\sqrt{3}$

x	$\cos x$	$\sin x$	$f(x)$
$-\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$2-2\sqrt{3}$
0	1	0	-1
$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$2+2\sqrt{3}$

Konvergenzuntersuchung

$$f : \underbrace{[0, 2\pi]}_{I} \to \mathbb{R}, \begin{cases} a_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos(mx)dx \\ b_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin(mx)dx \end{cases} \qquad \text{(Fourierkoeffizient von f)}$$

f periodisch, Periode 2π
n-te Partialsumme der Fouriereihe von f:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n} \big(a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)\big) \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos(mx)\cos(mt) + f(t)\sin(mx)\sin(mt)\Big)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\underbrace{\big(\cos(mt)\cos(mx) + \sin(mt)\sin(mx)\big)}_{2\cdot\cos((t-x)m)}\Big)dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin((2n+1)\frac{t-x}{2})}{2\sin(\frac{t}{2})}dt \text{ (Dirichletsches Integral)} \end{aligned}$$