

## Rückblick

$f_n(x)$  auf  $I = [a, b]$  glm. konv.:  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$  für  $n \geq n_0, x \in I$

$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  Grenzfunktion  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$

$\sum u_n(x)$  Reihe, heißt gleichmäßig konvergent, falls  $s_n(x) = u_0(x) + \dots + u_n(x)$  (Partialsummen) bilden eine gleichmäßig konvergente Folge auf  $I$

## folgern Konvergenz aus gleichmäßiger Konvergenz:

Satz: Es sei  $u_n(x)$  stetig auf  $I = [a, b]$ ,  $\sum u_n(x)$  gleichmäßig konvergente Reihe auf  $I$ , so gilt:  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  ist stetig.

Bew:  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), x \in I$

Bilden  $\psi_n(x) := f(x) - \sum_{i=0}^n u_i(x)$ , gleichmäßig konvergente besagt:  $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |\psi_n(x)| < \epsilon \forall n \geq n_0, \forall x \in I$

z.z.:  $x_0 \in I, \epsilon > 0$ , so ex.  $\delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  fa.  $x$  mit  $|x - x_0| < \delta$ .

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^n u_n(x) + \psi_n(x) \\ f(x) &= \sum_{i=0}^n u_n(x) + \psi_n(x_0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \left| \left( \sum_{i=0}^n u_n(x) + \psi_n(x) \right) - \left( \sum_{i=0}^n u_n(x) + \psi_n(x_0) \right) \right|$$

$$= |\psi_n(x_0) + \psi_n(x) - \psi_n(x_0)|$$

$$\leq \left| \left( \sum_{i=0}^n u_n(x) + \psi_n(x) - \sum_{i=0}^n u_n(x) + \psi_n(x_0) \right) + \psi_n(x) + \psi_n(x_0) \right| \text{ (Dreiecks-Ungl.)}$$

Wählen  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $|\psi_n(x)| < \frac{1}{3}\epsilon$  sofern  $n \geq n_0, x \in I$ , also auch  $|\psi_n(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon$  für  $n \geq n_0$ .

Da  $\sum_{i=0}^n u_i(x)$  stetig auf  $I \Rightarrow \exists \delta > 0 : \left| \sum_{i=0}^n u_i(x) - \sum_{i=0}^n u_i(x_0) \right| < \frac{1}{3}\epsilon$ , sofern  $|x - x_0| < \delta$  (für festes  $n = n_0$ )  $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon + \frac{1}{3}\epsilon = \epsilon$  falls  $|x - x_0| < \delta$ .

Satz: Sei  $u_n(x)$  stetig auf  $I = [a, b]$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  sei gleichmäßig konvergent.

$$\text{Dann ist } \int_a^b \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

Den Beweis (über Partialsummen) spare ich mir mal :)

## Bestimmung der Fourier-Koeffizienten nach Euler-Fourier

(notwendige Bedingung!!)

Vor:  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$  sei eine gleichmäßig konvergente

Reihe ( auf  $I = [0, 2\pi]$ ) ( $a_i \in \mathbb{R}, i \geq 1, b_i \in \mathbb{R}, i \geq 1$ )

