

[Forführung des Beweises von Freitag, 30.01.2001]

Bezeichnung: (f_0, f_1, \dots, f_t) sei ein Tupel von Funktionen für die $\int_0^{2\pi} f_i(x)f_j(x)dx = 0$ für $i \neq j$. Dann heißt dieses Tupel ein System orthogonaler Funktionen auf $[a, b]$. Es heißt Orthonormalsystem, falls über dies $\int (f_i(x))^2 dx = 1$.

Folg: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(2x), \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx)$ ist ein Orthonormalsystem auf $[0, \pi]$.

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ heißt Fourierreihe von f , allg. weder konvergent noch $= f(x)$.

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen

$I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Def: $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ Folge von Funktionen.

- i) Falls $\forall x \in I$ die Folge $f_n(x)$ konvergiert, so heißt $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ die Grenzfunktion der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- ii) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig (gegen die Grenzfunktion f), falls $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\forall x \in I$ ist $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, falls $n \geq n_0$.

Beisp: $f_n(x) = x^n, I = [0, 1]$,

a) $0 \leq x < 1$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$

b) $x = 1$, so $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$

\Rightarrow ex. Grenzfunktion $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1[\\ 1, & x = 1 \end{cases}$

$\Delta(f_n)$ ist nicht gleichmäßig konvergent!

Bew: Fixieren n_0 zu geg. $\epsilon > 0$, so dass für $n \geq n_0$, gilt: $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$ f. alle $x \in [0, a]$. Aber in Umgebung von $x = 1$ wird $f_n(x)$ beliebig klein $\Rightarrow f_x(x)$ beliebig nahe an 1 \Rightarrow Widerspruch!

Bem: $(f_n(x))$ sei gleichmäßig konvergent, so ist die Folge konvergent, besitzt also eine Grenzfunktion.

Bez: $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ sei eine Reihe von Funktionen $u_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, so heißt diese gleichmäßig konvergent auf I , falls $s : n(x) := \sum_{n=0}^m u_n(x)$ eien gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auf I bildet ($(s_m(x))$ gleichmäßig konv.). $s_m(x) = u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_m(x)$.

Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

$f(n)$ Funktionenfolge auf I , so gilt: (f_n) ist gleichmäßig konv. auf $I \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \forall m, n \geq n_0, \forall x \in I$.

Weierstraßsches Kriter

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sei eine konv. Folge nicht negativer Zahlen und es gelte $|u_n(x)| \leq c_n \forall x \in I, n \in \mathbb{N}$.

Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ gleichmäßig konv. auf I. Satz: $\sum u_n(x)$ sei eine gleichmäßig konv. Reihe auf I und $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann ist auch $\sum u_n(x) \cdot g(x)$ gleichmäßig konvergent.