$\int\limits_b^a f(x)dx := -\int\limits_a^b f(x)dx$ für $a < b$ und $\int\limits_a^b f(x)dx := 0$

Integrierbarkeit stetiger Funktionen

A) Stetigkeit u. gleichmäßige Stetigkeit
Def: $(x_1, d_1), (x_2, d_2)$ metrische Räume. Dann heißt die Abb. $f : x_1 \to x_2$ gleichmäßig stetig, falls für alle $\epsilon > 0$ ex. ein $\delta > 0$ mit $d_2(f(x), f(y)) > \epsilon$ sofern $d_1(x, y) < \delta$.
Bem: f sei gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ f stetig (trivial)
Satz: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, so sist f gleichmaäßig stetig.
Bew: Annahme: f ist nicht gleichmäßig stetig auf $I = [a, b]$
dann: $\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - fy)| \geq \epsilon$

Wählen ein solches ϵ, fest.
Sei $\delta_n := \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N}, n > 0)$, so $\exists x_i, y_i \in I : \begin{cases} |x_i - y_i| < \delta_i \\ |f(x_i) - f(y_i)| \geq \epsilon \end{cases}$
Sei c ein Hfp. der Folge $(x_i)_{i \in N}$ (ex. nach Bolzano-Weierstraß), so ex. eine Teilfolge $(x_{ij})_{j \in \mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{j \to \infty} x_{ij} = c$. Anmerkung: $\lim\limits_{j \to \infty} y_{ij} = c$
Beweis des Satzes: f ist stetig, also $f(c) = \lim\limits_{j \to \infty} f(x_{ij}) = \lim\limits_{j \to \infty} f(y_{ij})$, also $\lim\limits_{j \to \infty} \big(f(x_{ij}) - f(y_{ij})\big) = 0$ Also ex. ein $j_3 \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_{ij}) - f(y_{ij})| < \epsilon \ \forall j \geq j_3$. WIDERSPRUCH!
Satz: $f_[a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar auf $[a, b]$.
Herr Roczen hat diesen Satz dann bewiesen, dies läßt sich aber in jedem guten Mathematikbuch weitaus organisierter nachlesen. :)
Satz: $f : I \to \mathbb{R}, I = [a, b]$, sei stückweise stetig, dh. bis auf endlich viele Punkte $c_i \in I$ stetig und so dass $\lim\limits_{x \to c_i + 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to c_i - 0} f(x)$ (soweit sinnvoll, d.h. am Rand jeweils der "richtige") existieren.
Dann ist f integirerbar auf I.
Anmerkung: Es gilt aber z.B. auch: Jede beschränkte monotone Funktion auf $[a, b]$ ist integrierbar.
Hilfssatz: Sei $I = [a, b], a < b$, so gilt:

i) Sind $f, g :\to \mathbb{R}$ integrierbar und $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in I$, so folgt $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \sum\limits_a^b g(x)dx$

ii) $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig und $f(x) \geq 0$ für $x \in I$. Dann gilt: Ist $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, so folgt f ist die Nullabbildung.