Integriebarkeit

Das Riemannsche Integral

$I = [a, b], a < b, f : I \to \mathbb{R}$
Fläche: Produkt der Seitenlängen eines Rechtecks. Gegeben sei ein Graph einer Funktion $y = f(x)$ im Intervall $I = [a, b]$, f beschränkt auf I. Unterteilen die x-Achse in Abschnitte mit Hilfe von a_i. Dabei lassen sich um den Graphen 2 besondere Rechecke anlegen (Minumums-/Maximuswert des Funktionswertes) $\to$ Abersumme/Untersumme.
Def: $z := (a_0, \cdots, a_{n+1})$ mit $a_i \in I, a_0 < a_1 < \cdots < a_{n+1}$ und $a = a_0, b = a_{n+1}$ heißt Zerlegung des Intervalls I. Die Zahl $d(z) := min\{a_{i+1} - a_i | i = 0, \cdots, n\} > 0$ heißt die minimale Distaz der Zerlegung z.
Obersumme und Untersumme von f bez. z:
$Su_f(z) := \sum\limits_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf\{f(x)|x \in I_i\}$, wobei $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ (Untersumme von f bez. z)
$So_f(z) := \sum\limits_{i=0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot sup\{f(x)|x \in I_i\}$, wobei $I_i := [a_i, a_{i+1}]$ (Obersumme von f bez. z)
$a_0, \cdots, a_{n+1}$ hei0en die Teilpunkte von z, $I_i = [a_i, a_{i+1}]$ das i-te Teilintervall von z.
Bem: $Su_f(z) \leq So_f(z)$ für alle bel. Zerlegunden z von I, denn $\inf\{f(x)|x \in I_i\} \leq sup\{f(x)|x \in I_i\}$
Bezeichnung: z, z' seinen Zerlegungen von I. Dann heißt z' eine Verfeinerung von z, falls jeder Teilpunkt von z auch Teilpunkt von z' ist.
Satz: z sei Zerlegung vo I, so gilt:

1. $(b - a) \cdot \inf\{f(x)|x \in I_i\} \leq Su_f(z) \leq So_f(z) \leq (b - a) \cdot sup\{f(x)|x \in I_i\}$

2. z' sei eine weitere Zerlegung und überdies eine Verfeinerung von z.

Dann gilt: $Su_f(z) \leq Su_f(z') \leq So_f(z') \leq So_f(z)$
Bew: $i \in \{0, \cdots, n\}$, so $\inf\{f(x)|x \in I_i\} \geq \inf\{f(x)|x \in I\}$, da $I_i \leq I \Rightarrow$

$$Su_f(z) = \sum_{i=0}^{n} (a_{n+1} - a_i) \cdot \inf\{f(x)|x \in I_i\}\ geq \underbrace{\sum_{i=0}^{n} (a_{n+1} - a_i) \cdot inf\{f(x)|x \in I\}}$$

$$(\sum_{i=0}^{n} (a_{n+1} - a_i)) \cdot \inf\{f(x)|x \in I\}$$

$= (a_{n+1} - a_i) \cdot \inf\{f(x)|x \in I\} = (b - a) \cdot \inf\{f(x)|x \in I\}$
Korollar Sind z_1, z_2 Zerlegungen von I, So gilt: $Su_f(z_1) \leq So_f(z_2)$
Def: f hießt (Riemann)integrierbar, falls $\int\limits_{-a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{-b} f(x)dx$ ist. Diese Zahl heißt dann (Riemannsches) Integral von f auf I: $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$
Satz: $I = [a, b], a < b, c \in]a, b[$ und $f : I \to \mathbb{R}$, so dass f auf $[a, b]$ und auf $[c, b]$ integrierbar ist. Dann ist f auf $[a, b] = I$ integrierbar, und $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx$

Bew: Ann: f auf I nicht integrierbar.
Dann $\int\limits_{-a}^{b} f(x)dx \neq \int\limits_{a}^{-b} f(x)dx$. Da stets "$\geq$" gilt, muss $\epsilon := \int\limits_{a}^{-b} f(x)dx - \int\limits_{-a}^{b} f(x)dx > 0$.
Wissen: $\int\limits_{a}^{-c} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{c} f(x)dx$ und $\int\limits_{c}^{-b} f(x)dx = \int\limits_{-c}^{b} f(x)dx$
und so weiter...[freestyler]

Rechenregeln

$f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte, integrierbare Funtionen.
Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist auch $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ integrierbar, und es gilt:
$\int\limits_{a}^{b}(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_{a}^{b} f(x)dx + \beta \int\limits_{a}^{b} g(x)dx$