

Konvexität

Def:

1. f ist in I (streng) konvex von unten, falls für alle $c \in I$ gilt:
 $f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$ ($f(x) > f(c) + f'(c)(x - c)$) sofern $x \neq c$.
 "Tangente in c : $y = f(c) + f'(c)(x - c)$ liegt unterhalb der Kurve"
2. f ist in I (streng) konvex von oben, falls für alle $c \in I$ gilt:
 $f(x) \leq f(c) + f'(c)(x - c)$ ($f(x) < f(c) + f'(c)(x - c)$) sofern $x \neq c$.

Satz:

1. f ist (streng) konvex v. unten $\Leftrightarrow f'(x)$ (streng) monoton wachsend in I
2. f ist (streng) konvex v. oben $\Leftrightarrow f'(x)$ (streng) monoton fallend in I

Beweis:

a) Vor: f konvex von unten.

Beh: f' ist monoton wachsend.

Wählen $c_1, c_2 \in I, c_1 < c_2$, so gilt: $f(c_2) \geq f(c_1) + f'(c_1)(c_2 - c_1)$ (setzen $x = c_2, c = c_1$) entsprechend $f(c_1) \geq f(c_2) + f'(c_2)(c_1 - c_2)$

Addierung der Ungleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &\geq (f'(c_1) - f'(c_2))(c_2 - c_1) \\ 0 &\geq (f'(c_1) - f'(c_2)) \\ \text{also } f'(c_2) &\geq f'(c_1) \end{aligned}$$

q.e.d.

b) Vor: f' monoton wachsend in I

Beh: f konvex von unten.

Wählen $x, c \in I, x \neq c$ nach Mittelwertsatz gilt: $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c_x), (\alpha)x < c_x < c$ oder $(\beta)c < c_x < x$

(α) so $x - c < 0, f'(c_x) \leq f'(c)$, also $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c_x) \leq f'(c)$

$\Rightarrow f(x) - f(c) \geq f'(c)(x - c)$

$\Rightarrow f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$

(β) so $x - c > 0 \dots \Rightarrow f(x) \geq f(c) + f'(c)(x - c)$

Korollar: f sei zweimal diffbar in I , so gilt:

1. f ist konvex v unten $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \forall x \in I$
2. f ist streng konvex v unten $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \forall x \in I$ und auf keinem Teilintervall $I', I' =]a', b'[\in I, I' \neq \emptyset$ ist f'' identisch 0

(analog für konvex von oben)

Wendepunkte

Def: $I =]a, b[\neq \emptyset$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sei diffbar in $]a, c[$ und $]c, b[$. Dann heißt c ein Wendepunkt von f , falls genau eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. f streng konvex v. unten in $]a, c[$ und streng konvex von oben in $]c, b[$.
2. f streng konvex v. oben in $]a, c[$ und streng konvex von unten in $]c, b[$.

Satz: f sei in $c \in I$ stetig diffb. und c Wendepunkt von f . Dann ist c ein lokales Extremum (Minimum/Maximum ((2)/(1)) von f .

Vor: f streng konvex v. unten in $]a, c[$, streng konvex v. oben in $]c, b[$.

Bew: Dann $f'(x)$ (streng) monoton wachsend in $]a, c[$, fallend in $]c, b[\Rightarrow c$ lokales Maximum von f' .

Satz (hinr. Bedingung). f sei 3 mal diffbar in I und $f''(x) = 0, f'''(x) \neq 0$, so besitzt f in c einen Wendepunkt.

Satz: f sei in I $(2n+1)$ mal diffbar ($n \geq 1$). Weiter sei $f''(c) = \dots = f^{(2n)}(c) = 0, f^{(2n+1)}(c) \neq 0$. Dann besitzt f in $c \in I$ einen Wendepunkt.

bezeichnung

$f :]a, c[\cup]c, b[\rightarrow \mathbb{R}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ oder $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$, so heißt c eine Unendlichkeitsstelle von f .