Integrale

$f(x)$ sei Funktion mit $f'(x) = g(x)$
Schreibweise: $f(x) = \int g(x)dx$.
$\triangle$! f eindeutig bis auf Konstante. Offensichtliche Regeln:
$\int (g_1(x) + g_2(x))dx = \int g_1(x)dx + \int g_2(x)dx$
$\int c \cdot g(x)dx = c \cdot \int g(x)dx (c \in \mathbb{R})$
$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)g'(x)dx$ [partielle Integration]
$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}$,
$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x|$,
$\int f(x) \cdot \frac{dx}{dt} = \int f(t)dt$, falls $x = x(t)$

Bestimmung von Grenzwerten

Satz: (Regel von l'Hospital)
$f(x), g(x)$ Funktionen von $[a, b[\to \mathbb{R}, \exists g'(x), \exists f'(x)$ auf $]a, b[, g'(x) \neq 0, x \in]a, b[$
Vor: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a+0} g(x) = 0$.
Es gelte: $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Beh: Dann ex. $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und ist gleich $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Bew: Mittelwertsatz: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ für eine geeignete Zahl $c, a < c < x$
Ist x_n Folge in $]a, b[$ und $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, so ist $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}, c_n = c_n(a_n), a < c_n < x_n$ also $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim\limits_{x \to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, also gleich $\lim\limits_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$
Beisp.: $f(x) = e^x - 1, g(x) = \sin(x), f(0) = 0, g(0) = 0; f, g$ diffb [in Umgebung von 0 reicht]
$g'(x) = \cos x, \cos 0 = 1, \lim\limits_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{e^0}{\cos 0} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
Variante:
$f(x), g(x)$ stetig diffenrenzierbar bis zur Ordnung n auf $I =]a, b[$. (d.h. $f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$ existieren u. sind stetig), weiter sei $x_0 \in I$ und $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ sowie $g^{(v)}(x_0) = 0, 0 \leq v < n$ und $f^{(v)}(x_0) = 0, 0 \leq v < n$. Dann ex. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(v)}(x)}{g^{(v)}(x)}$.

Monotonie
$f : I \to \mathbb{R}, I =]a, b[, a < b$
Satz: Falls f' diffb. in I, so gilt:

1. f monoton wachsend auf $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in I$
2. f streng monoton wachsend auf $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \forall x \in I$ und auf keinem Teilintervall von I ist $f'(x) = 0$

Beweis des Satzes:

1. zz: "($\Rightarrow$)" $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$
   Lt. Vor. gilt: (a) $f(x + h) \geq f(x) \forall h \geq 0$; (b) $f(x + h) \leq f(x) \forall h \leq 0$

Fall (a): $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ falls $h \neq 0$
Fall (b): $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ falls $h \neq 0$
$\Rightarrow \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$
"($\Leftarrow$)" Vor: $f'(x) \geq 0, x \in I$.
zz: $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, dann gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$
Es gilt $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\tilde{x}), x_1 < \tilde{x} < x_2$ (1. Mittelwertsatz). Da $f'(\tilde{x}) \geq 0$ und $x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$.

2. "($\Rightarrow$)" Vor: f streng monoton wachsen $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0, x \in I$
zz: Auf keinem teilintervall $]a', b'[, a < a' < b' < b$ ist $f'(x) = 0$
Annahme: $I' :=]a', b'[$ ist Teilintercall und $f'(x) = 0$ f+r $x \in I'$
so folgt: $f(x)$ konstant auf I', d.h. $\exists x_1, x_2 \in I', x_1 < x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$ Widerspruch!
"($\Leftarrow$)" $f(x)$ monoton wachsend auf I mach 1.)
Annahme: $f(x)$ <u>nicht</u> streng monoton wachsend, dann ex. $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ mit $(f_x 1) = f(x_2)$
Seit $x \in [x_1, x_2]$, so ist wegen der Monotonie $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x) = f(x_2)$, daher f konstant auf $]x_1, x_2[\Rightarrow$ Widerspruch.

<u>Allg. Potenfunktion:</u>
$a \in \mathbb{R}, a > 0, a^x := e^{x \cdot \ln(a)}$
Eigenschaften:
$\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$
$a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
Bew: $a^{x+y} = e^{(x+y) \cdot \ln a} = e^{x \cdot \ln a + y \cdot \ln a} = e^{x \cdot \ln a} \cdot e^{y \cdot \ln a} \cdot = a^x \cdot a^y$ q.e.d.
$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
Weitere Eigenschaften:
Umkehrfunktion von $a^x (a > 0)$ heißt $\log_a(x)$.
Es gilt z.B. $\log_a(1) = 0, \log_a(c \cdot d) = \log_a(c) + \log_a(d)$

lokale Extrema

Def: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig.
$x_0 \in [a, b]$ heißt lokales Maximum von f, falls $\exists \epsilon > 0 : x \in U_\epsilon(x_0) \cap [a, b] \Rightarrow f(x) \leq f(x_0)$ <u>Satz:</u> $c \in]a, b[$ innerer Punkt und c lokaler Extremwert, sowie f diffb. in $]a, b[$, so ist $f'(c) = 0$.
Präzisierung folgt.