

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung (1. Mittelwertsatz)

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in $]a, b[$ ($a < b$)

Dann gilt: $\exists c \in]a, b[$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

(Ableitung gleich dem Anstieg der Geraden des Graphen von f)

Beweis:

Definieren eine Hilfsfunktion $g(x) := -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(x)$

$\Rightarrow g(a) = f(a), g(b) = f(a)$

$g(x)$ erfüllt die Vor. des Satzes von Rolle.

$g(a) = g(b)$, daher $\exists c \in]a, b[, g'(c) = 0$

Es ist $g'(x) = -\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f'(x)$. Weiter ist $0 = g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f'(c)$ (Einsetzen von c)

$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Anwendung auf Bew. des Korollars: Es war zu zeigen: Wenn $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ diffbar und $f'(x) = 0 \forall x \in]a, b[$, so ist f konstant.

zum Beweis betrachten wir $x_1, x_2 \in]a, b[, x_1 < x_2$, so gilt: $\exists c \in]x_1, x_2[\subseteq]a, b[$ mit $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ / denn f stetig in $[x_1, x_2]$ und diffb. in $]x_1, x_2[$, darauf können wir MWS anwenden.

$\Rightarrow 0 = f(x_2) - f(x_1) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Diff-Rechnung: (2. Mittelwertsatz)

$f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ($a < b$), sowie f, g diffb in $]a, b[$ mit $g'(x) \neq 0$ für $x \in]a, b[$. Dann

ex. eine Zahl $c \in]a, b[$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, $g(b) \neq g(a)$

Warum ist dies eine Verallg. ? Wählen $g(x) = x$, so $g'(x) = 1$

A) Bew: zz: $g(b) \neq g(a)$; Angenommen, $g(b) = g(a)$, so (Satz von Rolle) $\exists c \in]a, b[$ mit $g'(c) = 0 \Rightarrow$ Widerspruch

B) Bew der Formel: Definieren Hilfsfunktion $h(x) := -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a)) + f(x)$

$h(a) = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(a)-g(a)) + f(a) = f(a)$

$h(b) = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(b)-g(a)) + f(b) = f(a)$

Die beiden haben laut dem Satz von Rolle zur Folge: $\exists c \in]a, b[: h'(c) = 0$. Also:

$0 = h'(c) = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) + f'(c)$

$\Rightarrow f'(c) = g'(c) \cdot \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot \frac{1}{g'(c)}$

$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ qed.

Der Taylorsche Satz:

$f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, diffbar in $x \in]a, b[$ bis zur Ordnung $n+1$ (d.h. es ex. $f^{(0)}(x), f^{(n+1)}(x) \forall x \in]a, b[$)

Dann gilt f. alle $x_0 \in]a, b[: f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$ mit $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\vartheta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, wobei $\vartheta \in]0, 1[$ geeignet gewählt in Abhängigkeit von $x \in]a, b[$.

Bez: $\sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} f^{(v)}(x_0) \cdot (x-x_0)^v =: p_n(x)$ heißt n -tes Taylorpolynom von f . $R_n(x)$

heißt Restglied nach Lagrange.

Bew: Wählen Hilfsfunktion

$g(x) := f(x) - p_n(x), h(x) := (x-x_0)^{n+1}$

Es gilt: $g(x_0) = 0, g'(x_0) = 0, \dots, g^{(n)}(x_0) = 0, g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$

(Bew: $g(x_0) = f(x_0) - p_n(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$; $g'(x_0) = f'(x_0) - p'_n(x_0) = f'(x_0) - (f'(x_0) \cdot 1 + 0 + \dots + 0) = 0$)

Weiter gilt: $h(x_0) = 0, h'(x_0) = 0, \dots, h^{(n)}(x_0) = 0, h^{(n+1)}(x) = (n+1)!$

$\Rightarrow \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(x_0)}{h(x) - h(x_0)} = \frac{g'(x_1)}{h'(x_1)}$ mit $x_1 \in]x_0, x[$ (wählen obDa $x > x_0$)

$\frac{g'(x_1)}{h'(x_1)} = \frac{g(x_2) - g(x_0)}{h(x_2) - h(x_0)} = \frac{g''(x_2)}{h''(x_2)}$ mit $x_2 \in]x_0, x_1[$ (geeignet gewählt), usw

\Rightarrow erhalten x_1, \dots, x_n mit $x_0 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x$, so dass $\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g^{(n)}(x_n)}{h^{(n)}(x_n)} =$

$\frac{g^{(n)}(x_n) - g^{(n)}(x_0)}{h^{(n)}(x_n) - h^{(n)}(x_0)}$

$\Rightarrow \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g^{(n+1)}(x_{n+1})}{f^{(n+1)}(x_{n+1})}$ ($x_0 < x_{n+1} < x_n$), Einsetzen ergibt: $\frac{f(x) - p_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} =$

$\frac{f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}$

x_{n+1} in $]x_0, x[$, daher $x_{n+1} = x_0 + \vartheta \cdot (x - x_0)$ mit $\vartheta \in]0, 1[\Rightarrow f(x) - p_n(x) =$

$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$

Falls f bel. oft diffb., so ist die Reihe $\sum_{v=0}^n \frac{f^{(v)}(x)}{v!} (x - x_0)^v$ nicht immer $= f(x)$ auch dann nicht, wenn Konvergenz vorliegt.