

# Notiz zur unären Cliquesweite von Strukturen

Hans und Isolde Adler

23. Dezember 2005

Will man die Cliquesweite von endlichen Graphen auf endliche Strukturen verallgemeinern, so muss man sich entscheiden, ob man wie bei Graphen nur die Punkte färben will (Grohe-Turán, hier: „unäre Cliquesweite“), oder ob man für jedes  $n > 0$  (oder evt. nur bis zu einer Obergrenze) auch die  $n$ -Tupel färben will (Blumensath: Partitionsweite). Im letzteren Fall ist a priori nicht klar, was man mit der Cliquesweite überhaupt zählen will. Haben wir einen gemeinsamen Farbvorrat für alle  $n > 0$ ? Oder müssen wir die Farben für die  $n$ -Tupel von den Farben für die  $(n + 1)$ -Tupel disjunkt halten? Damit sind sicherlich noch nicht alle Möglichkeiten aufgezählt.

Eine viel versprechende Möglichkeit besteht darin, für jedes  $n > 0$  eine  $n$ -Cliquesweite zu definieren, die angibt, wieviele Farben man braucht, wenn man *nur* die  $n$ -Tupel färben darf. In diesem Fall ist sicher der Fall  $n = 1$ , also die unäre Cliquesweite, besonders interessant. Vielleicht kommen wir ja auch ganz mit der unären Cliquesweite aus?

In einer frühen Fassung der Arbeit von Grohe-Turán wurde dies ursprünglich vermutet. Etwas präziser formuliert lautet die Vermutung, dass sich die Baumweite einer Struktur durch eine Funktion ihrer unären Cliquesweite nach oben abschätzen lässt.

Till Scheffzik gelang es, diese Vermutung für Strukturen mit höchstens zwei-stelligen Relationssymbolen zu beweisen (Diplomarbeit: Die Cliquesweite von Strukturen, Freiburg, 2002). Scheffzik und Flum vermuteten, dass die Vermutung schon für Strukturen mit höchstens dreistelligen Relationssymbolen falsch ist. In dieser Notiz zeigen wir, dass dies in der Tat der Fall ist.

Wir bezeichnen die Baumweite eines Graphen  $G$  mit  $\text{tw}(G)$  und seine Pfadweite mit  $\text{pw}(G)$ . (Die Pfadweite von Graphen ist definiert wie die Baumweite, nur dass der Baum ein Pfad sein muss.)

Gegeben eine Struktur  $\mathcal{A}$ , bezeichnet  $G_{\mathcal{A}}$  den zu Grunde liegenden Graphen. Seine Punkte sind die Elemente des Trägers (Universums)  $A$  von  $\mathcal{A}$ . Zwei (verschiedene) Punkte liegen in einer gemeinsamen Kante genau dann, wenn sie beide zusammen in einem Tupel vorkommen, auf das in  $\mathcal{A}$  eine Relation zutrifft.

Mit  $\text{ucw } \mathcal{A}$  bezeichnen wir die unäre Cliquesweite von  $\mathcal{A}$ . Eine präzise Definition findet man in Abschnitt 2.2 von Till Scheffziks Diplomarbeit (dort einfach „Cliquesweite“ genannt).

Wir beginnen mit einem positiven Resultat. Danach werden wir zeigen, dass dieses Resultat (bis auf  $\pm 1$ ) optimal ist.

**Proposition 1.** *Für alle relationalen Strukturen  $\mathcal{A}$  gilt*

$$\text{ucw}(\mathcal{A}) \leq \text{pw}(G_{\mathcal{A}}) + 2.$$

*Beweis.* Sei  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$  eine Pfadzerlegung von  $G_{\mathcal{A}}$  mit  $|B_i| \leq k = \text{pw}(G_{\mathcal{A}}) + 1$ . Sei  $\mathcal{A}'$  die Struktur  $\mathcal{A}$  mit der folgenden Färbung:

- Alle Elemente von  $A \setminus B_n$  haben die Farbe 1.
- Alle Elemente von  $B_n$  sind verschieden gefärbt, unter Verwendung der Farben  $2, \dots, k + 1$ .

Wir zeigen durch Induktion nach  $n$ , dass  $\mathcal{A}'$  Auswertung eines  $\mathcal{F}_{k+1}^\tau$ -Terms ist (wobei  $\tau$  die Signatur von  $\mathcal{A}$  bezeichnet).

Die Induktionsbasis  $n = 1$  ist offensichtlich. Wenn nun  $\mathcal{A}' \upharpoonright (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1})$  mit einer Färbung, bei der die Elemente von  $B_{n-1}$  durch ihre Farben ( $> 1$ ) eindeutig bestimmt sind, bereits Auswertung eines  $\mathcal{F}_{k+1}^\tau$ -Terms ist, dann brauchen wir nur die Elemente  $e \notin B_n$  in die Farbe 1 umzufärben und dann die noch fehlenden Elemente von  $B_n$  in passenden Farben neu einzuführen. Da alle Punkte aus  $B_n$  durch ihre Farben eindeutig bestimmt sind, können wir jede innerhalb von  $B_n$  liegende Relation einführen. Weil jedes Tupel, das in einer Relation liegt, eine Clique in  $G_{\mathcal{A}}$  induziert und jede Clique in  $G_{\mathcal{A}}$  von einem  $B_i$  abgedeckt wird, erhalten wir auf diese Weise alle Relationen, die in  $\mathcal{A}$  gelten.  $\square$

**Lemma 2.** *Für jede relationale Struktur  $\mathcal{A}$  mit nur einem, zweistelligen, Relationssymbol  $E$  gibt es eine relationale Struktur  $\mathcal{A}'$  mit um 1 Element größerem Träger, welche die folgenden Eigenschaften hat:*

- (1)  $\mathcal{A}'$  hat genau ein Relationssymbol  $R$ , und dieses ist dreistellig.
- (2)  $\text{tw}(G_{\mathcal{A}'}) = \text{tw}(G_{\mathcal{A}}) + 1$ .
- (3)  $\text{pw}(G_{\mathcal{A}'}) = \text{pw}(G_{\mathcal{A}}) + 1$ .
- (4)  $\text{ucw}(\mathcal{A}') \geq \text{pw}(G_{\mathcal{A}'}) + 1$ .

(Anmerkung: Das  $+1$  in (2),(3) kommt daher, dass  $G_{\mathcal{A}'}$  ein Kegel über  $G_{\mathcal{A}}$  ist. Das  $+1$  in (4) korrigiert dagegen ein mutwilliges  $-1$  in der Definition von Pfadweite und Baumweite.)

*Beweis.* Der Träger von  $\mathcal{A}'$  ist  $A' = A \dot{\cup} \{t\}$ , und die Relation  $R$  interpretieren wir wie folgt:

$$\mathcal{A}' \models Racb \iff \left( a \neq b \text{ und } c \in \{a, b\} \text{ und } (\mathcal{A} \models Eab \text{ oder } a = t) \right).$$

(2) und (3) gelten, weil  $G_{\mathcal{A}'}$  ein Kegel über  $G_{\mathcal{A}}$  ist. (Das heißt,  $G_{\mathcal{A}}$  ist induzierter Subgraph von  $G_{\mathcal{A}'}$ , und  $G_{\mathcal{A}'}$  hat genau einen weiteren Punkt, der zudem mit

jedem Punkt von  $G_{\mathcal{A}}$  verbunden ist.) Für den Beweis von (4) beobachten wir zunächst:

Sei  $\tau' = \{R\}$  die Signatur von  $\mathcal{A}'$ , und sei  $k < \omega$ . Wenn man  $\mathcal{A}'$  (mit einer beliebigen Färbung) als Auswertung eines  $\mathcal{F}_k^{\tau'}$ -Terms erhalten kann, dann haben in der Auswertung desjenigen Subterms, in dem die Relation  $Racb$  eingeführt wird, die Punkte  $a$  und  $b$  verschiedene Farben. (Denn es ist  $c = a$  oder  $c = b$ . Hätten  $a$  und  $b$  dieselbe Farbe, so würde zugleich mit  $Racb$  auch  $Raaa$  eingeführt.)

Es folgt insbesondere, dass in einem Subterm, der  $t$  nicht enthält, *alle* Punkte verschieden gefärbt sind. (Angenommen,  $a \neq b$  haben dieselbe Farbe. Wenn irgendwann später der Punkt  $t$  dazukommt, können wir  $Rtaa$  und  $Rtbb$  nicht mehr einführen, ohne zugleich  $Rtab$  und  $Rtba$  einzuführen.)

Deshalb erhalten wir jeden Term, dessen Auswertung  $\mathcal{A}'$  ergibt, im Wesentlichen wie folgt:

1. Den Punkt  $t$  einführen (in der Farbe 2).
2. Zusätzliche Punkte so einführen, dass es für jede Farbe  $\geq 2$  höchstens einen Punkt dieser Farbe gibt.
3. Relationen zwischen Punkten einführen, die durch ihre Farbe eindeutig bestimmt sind.
4. Gewisse Punkte mit Farben  $> 2$  in die Farbe 1 umfärben.
5. Ggf. weiter im 2. Schritt.

Sei nun  $k + 1 = \text{ucw}(\mathcal{A}')$ , so dass wir mit den  $k + 1$  Farben  $1, 2, \dots, k + 1$  auskommen können. Seien  $B_1, B_2, B_3, \dots$  die Mengen der Punkte, die jeweils im 3. Schritt durch ihre Farbe eindeutig bestimmt sind, und zwar beim ersten, zweiten, dritten, ... Durchlaufen des 3. Schritts. Dann ist natürlich  $|B_i| \leq k + 1$  für  $i = 1, 2, 3, \dots$  (Tatsächlich können wir sogar annehmen, dass ab dem zweiten Durchlaufen des 3. Schritts mehr als ein Punkt die Farbe 1 hat. Dann ist für  $i \geq 2$  sogar  $|B_i| \leq k$ . Es ist aber nicht klar, was wir mit diesem Wissen anfangen können.) Da  $B_1, B_2, B_3, \dots$  offensichtlich eine Pfadzerlegung von  $G_{\mathcal{A}'}$  ist, folgt  $\text{pw}(G_{\mathcal{A}'}) + 1 \leq k + 1 = \text{ucw}(\mathcal{A}')$ .  $\square$

**Korollar 3.** *Für jedes  $n < \omega$  gibt es eine Struktur  $\mathcal{A}$  mit nur einem, dreistelligen, Relationssymbol, so dass*

- (1)  $\text{tw}(G_{\mathcal{A}}) = 2$  und
- (2)  $\text{ucw}(\mathcal{A}) > n$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{G}$  ein ungerichteter Baum als Struktur in der Signatur  $\{E\}$  ( $E$  zweistelliges Relationssymbol), so dass  $\text{pw}(G_{\mathcal{G}}) \geq n$ . Sei  $\mathcal{A} = \mathcal{G}'$ , wie im Lemma. Dann ist  $\text{tw}(G_{\mathcal{G}'}) = \text{tw}(G_{\mathcal{G}}) + 1 = 2$  und  $\text{ucw}(\mathcal{G}') \geq \text{pw}(G_{\mathcal{G}'}) + 1 = \text{pw}(G_{\mathcal{G}}) + 2 > n$ .  $\square$

Man überlegt sich leicht, dass dieses Problem im Wesentlichen dadurch verursacht wird, dass es keine Operation „alle Punkte der Farbe  $i$  identifizieren“ gibt. (Da die binäre Relation „ $=$ “ in der Modelltheorie üblicherweise nicht als Teil der Signatur aufgefasst wird, gibt es keine Operation „ $a = b$  einführen für

alle Punkte  $a$  der Farbe  $i$  und  $b$  der Farbe  $j$ “.) Wäre diese Operation zugelassen, dann könnte man genauso wie oben in Proposition 1 die Abschätzung  $\text{ucw}(\mathcal{A}) \leq \text{tw}(G_{\mathcal{A}}) + 2$  für beliebige relationale Strukturen  $\mathcal{A}$  beweisen.