Seminar Analyse von Petrinetzen: Unfoldings II

Yves Radunz

14. Januar 2008

Was bisher geschah:

Inhalt von Unfoldings I:

1. *Warum* entfalten wir Netze?
    - Vermeidung der Erzeugung des Erreichbarkeitsgraphen
    - Möglichst wenig Informationsverlust
2. *Wie* entfalten wir Netze?
    - Vorgehen bei der Entfaltung
    - Endlichkeit

Und nun die Fortsetzung...

Was machen wir mit der Entfaltung?

1. Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
2. Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
3. Erfüllbarkeitstests dieser Formeln
    - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
    - Zerlegung in Formeln in Normalform
    - Reduktion auf maximale Konfigurationen der endlichen Entfaltung

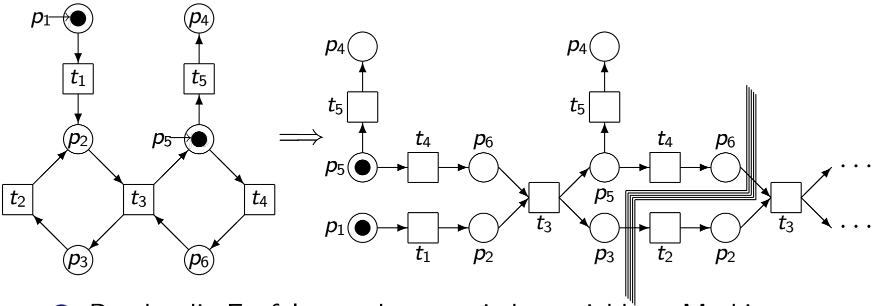
Und nun die Fortsetzung...

Was machen wir mit der Entfaltung?

1. Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
2. Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
3. Erfüllbarkeitstests dieser Formeln
   - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
   - Zerlegung in Formeln in Normalform
   - Reduktion auf maximale Konfigurationen der endlichen Entfaltung

Erinnerung: Entfaltung von Netzen

1. Füge, von den Plätzen mit der Startmarkierung ausgehend, Transitionen hinzu. Füge ggf. Kopien von Plätzen ein, damit die Entfaltung konfliktfrei bleibt.



2. Breche die Entfaltung ab, wenn jede erreichbare Markierung eine Repäsentation (*Konfiguration*) in dem entfalteten Netz hat.

Aufbau der Formeln unserer Logik

Definition: Formel

Sei $N = (P, T, F, m_0)$ ein 1-beschränktes Netz.
Dann ist φ eine Formel über N, wenn sie durch endlich viele Anwendungen der folgenden Regeln erhalten wird:

1. $\varphi = \textbf{true}$
2. $\varphi = p, p \in P$
3. $\varphi = \neg\psi$, ψ Formel über N
4. $\varphi = \psi \wedge \chi$, ψ, χ Formeln über N
5. $\varphi = \Diamond\psi$, ψ Formel über N

Abkürzung: $\Box\varphi = \neg\Diamond\neg\varphi$

Erfüllbarkeit

Definition: Erfüllbarkeitsrelation $\models$

Seien $N = (P, T, F, m_0)$ ein 1-beschränktes Netz, $N^* = (P^*, T^*, F^*, m_0^*, L^*)$ die zugehörige (vollständige, d.h. ggf. unendliche) Entfaltung (mit $L^* : (P^* \to P) \cup (T^* \to T)$ als Labels) und K eine Konfiguration von N^*.

1. $K \models$ **true**
2. $K \models p \Leftrightarrow p \in L^*(Cut(K))$
   $Cut(K) =$ die durch K markierten Plätze in N^*.
3. $K \models \neg\varphi \Leftrightarrow K \not\models \varphi$
4. $K \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow K \models \varphi$ und $K \models \psi$
5. $K \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow \exists K' \supseteq K : K' \models \varphi$ (K' Konfiguration von N^*)

$N \models \varphi \Leftrightarrow \emptyset \models \varphi$

Transformation von Fragen in Formeln

Seien N ein Netz und K eine Konfiguration in N^*.

- Erzeugt K die Markierung $\{p_2, p_5\}$?
  $\Longrightarrow$ Gilt $K \models p_2 \wedge p_5 \wedge \neg p_1 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_6$?
- Ist die Anfangsmarkierung $\{p_1, p_2\}$?
  $\Longrightarrow$ Gilt $\emptyset \models p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4 \wedge \neg p_5 \wedge \neg p_6$?
- Ist eine Markierung erreichbar, die p_1 markiert?
  $\Longrightarrow$ Gilt $N \models \Diamond p_1$?
- Ist die Transition t_2 lebendig?
  $\Longrightarrow$ Gilt $N \models \Box\Diamond p_3$?

1. Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
2. Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
3. Erfüllbarkeitstests dieser Formeln
    - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
    - Zerlegung in Formeln in Normalform
    - Reduktion auf maximale Konfigurationen der endlichen Entfaltung

Einfache Fälle beim Erfüllbarkeitstest:

1. $\varphi = \textbf{true}$ ($K \models \varphi$ ist immer erfüllt)
2. $\varphi = p$ ($K \models \varphi$ gdw. $p \in L^*(Cut(K))$)
3. $\varphi = \neg\psi$ ($K \models \varphi$ gdw. $K \neg \models \psi$)
4. $\varphi = \psi \wedge \chi$ ($K \models \varphi$ gdw. $K \models \psi$ und $K \models \chi$)

Problematischer:

5. $\varphi = \Diamond\psi$
   Gibt es in der (potentiell unendlichen) Entfaltung N^* irgendwo eine Konfiguration $K' \supseteq K$, welche $K' \models \psi$ erfüllt?

Ziel

Entscheidung der Erfüllbarkeit von $N \models \Diamond\varphi$ nur mit dem endlichen Anfang N^+ der Entfaltung N^*.

Definition: $Sat^*(\varphi), Sat^+(\varphi)$

Seien φ eine Formel über einem Netz N, N^* die vollständige Entfaltung von N und $\mathcal{K}(M)$ die Menge aller Konfigurationen von $M \in \{N^+, N^*\}$.

Dann ist $Sat^*(\varphi) = \{K \in \mathcal{K}(N^*) | K \models \varphi\}$ und
$Sat^+(\varphi) = Sat^*(\varphi) \cap \mathcal{K}(N^+)$.

Es gilt $N \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow Sat^*(\varphi) \neq \emptyset$.

Satz

Seien N ein 1-beschränktes Netz und φ eine Formel über N.

1. $Sat^*(\varphi) = \emptyset$ gilt genau dann, wenn $Sat^+(\varphi) = \emptyset$.
2. $N \models \Diamond\varphi$ gilt genau dann, wenn $Sat^+(\varphi) \neq \emptyset$.

Beweisidee

1. Hinrichtung: klar, wegen $Sat^*(\varphi) \supseteq Sat^+(\varphi)$.
   Reanimation (Rückrichtung): Beweis durch Kontraposition
   $Sat^*(\varphi) \neq \emptyset \Rightarrow \exists K \in Sat^*(\varphi) \Rightarrow \exists K \in \mathcal{K}(N^*) : K \models \varphi$
   $\Rightarrow \exists K' \in \mathcal{K}(\varphi) : L^*(Cut(K')) = L^*(Cut(K))$
   (K' ensteht durch *Verschiebung* von K.)
   Es gilt dann $K' \models \varphi$, also $K' \in Sat^+(\varphi)$, d.h. $Sat^+(\varphi) \neq \emptyset$.
2. $N \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow Sat^*(\varphi) \neq \emptyset \Leftrightarrow Sat^+(\varphi) \neq \emptyset$ $\square$

1. Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
2. Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
3. Erfüllbarkeitstests dieser Formeln
    - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
    - Zerlegung in Formeln in Normalform
    - Reduktion auf maximale Elemente von $\mathcal{K}(N^+)$

Definition: Klausel, Normalform

Sei φ eine Formel über einem Netz $N = (P, T, F, m_0)$.
φ ist eine Klausel, wenn:

- $\varphi = \textbf{true}$ oder $\varphi = \textbf{false} = \neg\textbf{true}$
- $\varphi = p$ oder $\varphi = \neg p, \quad p \in P$
- $\varphi = \psi \wedge \chi, \quad \psi, \chi$ Klauseln

φ ist in Normalform, wenn:

- φ ist eine Klausel
- $\varphi = \psi \wedge \Diamond\chi$ oder $\varphi = \psi \wedge \neg\Diamond\chi, \quad \psi, \chi$ in Normalform

Lemma: Normalformzerlegung

Sei φ eine Formel über einem 1-beschränkten Netz N.
Dann gibt es (explizit berechenbare!) Formeln $\varphi_1, ..., \varphi_n$ über N mit $Sat^*(\varphi) = Sat^*\left(\bigvee_{k=1}^{n} \varphi_k\right)$. (Kein Beweis.)

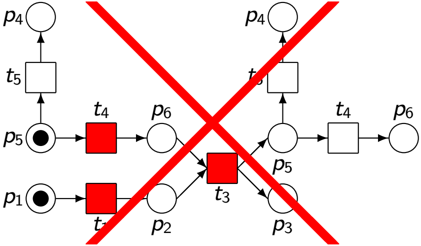
$\Rightarrow$ Zurückführung des Problems $Sat^+(\varphi) \stackrel{?}{=} \emptyset$ auf Formeln in Normalform.

Achtung!
Zerlegung von φ kann exponentielle Größe in Abhängigkeit von der Größe von φ haben.

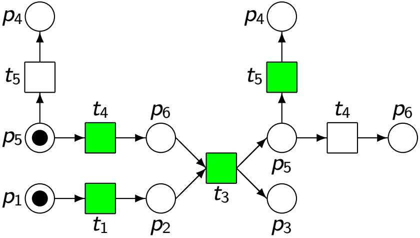
1. Einführung einer Logik für 1-beschränkte Netze
2. Übersetzung von Fragen in Formeln dieser Logik
3. Erfüllbarkeitstests dieser Formeln
    - Reduktion auf endliche Teilmenge der Entfaltung
    - Zerlegung in Formeln in Normalform
    - Reduktion auf maximale Elemente von $\mathcal{K}(N^+)$

Definition $Max(\mathcal{K})$

Sei N ein Netz mit der Entfaltung N^* und $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}(N^*)$.
Für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(N^*)$ schreiben wir $K_1 \leq K_2$, wenn $K_1 \subseteq K_2$.
Dann ist $Max(\mathcal{K}) = \{K \in \mathcal{K} | \forall K' \in \mathcal{K} : K' \not> K\}$ die Menge der maximalen (bzgl. der Halbordnung $\leq$) Konfigurationen aus $\mathcal{K}$.



$\notin Max(\mathcal{K}(N^+))$

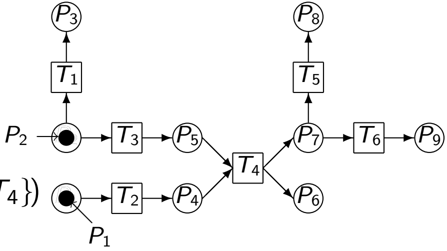


$\in Max(\mathcal{K}(N^+))$

Definition $Sat^+(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2)$

Seien φ eine Formel über N und $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}(N^+)$.
Für $K \in \mathcal{K}(N^+)$ schreiben wir $K \leq \mathcal{K}_1$, wenn ein $K' \in \mathcal{K}_1$ mit $K \leq K'$ existiert. Analog für $\mathcal{K}_2$.
Wir definieren nun
$Sat^+(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2) = \{K \in Sat^+(\varphi) | K \not\leq \mathcal{K}_1, K \leq \mathcal{K}_2\}$.

- $Sat^+(\emptyset, \textbf{true}, \{\emptyset\}) = \{\emptyset\}$
- $Sat^+(\{\emptyset\}, \textbf{true}, \{\emptyset\}) = \emptyset$
- $Sat^+(\{\emptyset\}, \textbf{true}, \mathcal{K}(N^+))$
  $= \mathcal{K}(N^+) \setminus \{\emptyset\}$
- $Sat^+(\{\{T_2\}\}, \neg P_6, \{T_2, T_3, T_4\})$
  $= \{\{T_3\}, \{T_2, T_3\}\}$
- $Sat^+(\{\{T_1\}\}, \textbf{true}, \{\{T_3\}\} = \{\{T_3\}\}$

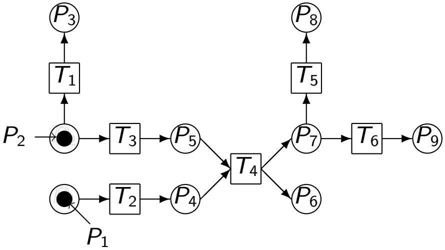


Definition: *Last*

Seien φ eine Formel über N und $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subseteq \mathcal{K}(N^+)$ Mengen von Konfigurationen.

Dann definieren wir $Last(\varphi) = Max(Sat^+(\varphi))$ bzw.
$Last(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2) = Max(Sat^+(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2))$.

$Last(\neg P_6)$
$= \{\{T_2, T_3\}, \{T_2, T_1\}\}$



Satz 2

Sei φ eine Formel über einem 1-beschränkten Netz N.
Dann gilt:

1. $Sat^+(\varphi) = \emptyset \Leftrightarrow Last(\varphi) = \emptyset$
2. $N \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow Last(\varphi) \neq \emptyset$

Beweis:

1. Hinrichtung: klar, wegen $Sat^+(\varphi) \supseteq Last(\varphi)$
   Rückrichtung (per Kontraposition):
   $Sat^+(\varphi) \neq \emptyset \Rightarrow \exists K_0 \in \mathcal{K}(N^+) : K_0 \models \varphi$
   - K_0 in $Sat^+(\varphi)$ maximal $\Rightarrow K_0 \in Last(\varphi) \Rightarrow Last(\varphi) \neq \emptyset$
   - K_0 nicht maximal $\Rightarrow \exists Sat^+(\varphi) \ni K_1 \supset K_0 : K_1 \models \varphi$
     Fortsetzung führt auf $(K_i) = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$.
     N^+ ist endlich, also auch $\mathcal{K}(N^+) \supseteq Sat^+(\varphi)$.
     $\Rightarrow (K_i) = K_0 \subset \dots \subset K_n$ ist endlich.
     $\Rightarrow K_n$ maximal in $Sat^+(\varphi) \Rightarrow K_n \in Last(\varphi) \Rightarrow Last(\varphi) \neq \emptyset$
2. $N \models \Diamond\varphi \Leftrightarrow Sat^+(\varphi) \neq \emptyset \Leftrightarrow Last(\varphi) \neq \emptyset$ □

Satz 3: Berechnung von $\mathit{Last}(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathcal{K}_2)$

Seien φ, ψ Formeln über einem 1-beschränkten Netz N und $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \in \mathcal{K}(N^+)$.
Für $\mathcal{K}', \mathcal{K}'' \in \mathcal{K}(N^+)$ sei $K' \bigtriangledown K'' = \{K_1 \cap K_2 | K_1 \in \mathcal{K}', K_2 \in \mathcal{K}''\}$.
Weiterhin sei $\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{K}(N^+) | \exists K' \in \mathcal{K}(N^*) : L^*(K') = L^*(K),$
K' wird durch Verschieben von
$K'' \in \mathit{Last}(\psi)$ erzeugt$\}$.

Dann gilt $\mathit{Last}(\varphi) = \mathit{Last}(\emptyset, \varphi, \mathcal{K}(N^+))$ und

1. $\mathit{Last}(\mathcal{K}_1, \varphi \wedge \Diamond\psi, \mathcal{K}_2) = \mathit{Last}(\mathcal{K}_1, \varphi, \mathit{Max}(\mathcal{K}_2 \bigtriangledown \mathcal{K}))$
2. $\mathit{Last}(\mathcal{K}_1, \varphi \wedge \neg\Diamond\psi, \mathcal{K}_2) = \mathit{Last}(\mathit{Max}(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}), \varphi, \mathcal{K}_2)$

(Kein Beweis.)

Fertig ... und nun?

Unser aktueller Stand

1. Übersetzung von Fragen nach Eigenschaften des Netzes in Formeln φ über N
   - Auswertung von φ einfach, außer bei $\varphi = \Diamond\psi$
2. $N \models \Diamond\psi \Leftrightarrow \mathit{Last}(\varphi) \neq \emptyset$ (Satz 2)
3. Zerlegung in Teilformeln in Normalform (Lemma zur Normalformzerlegung)
4. Rekursionsgleichung zur Berechnung von $\mathit{Last}(\varphi)$, wenn φ in Normalform ist (Satz 3)

Zusätzliche Bemerkungen

Am Ende des zweiten Vortrags kam die Frage auf, ob es für zwei Markierungen m und m' möglich ist, eine Formel zu finden, welche aussagt, dass aus der (erreichbaren) Markierung m die Markierung m' erreichbar ist.
Seien φ_m und $\varphi_{m'}$ die Formeln mit der Eigenschaft $K \models \varphi_m \Leftrightarrow L^*(Cut(K)) = m$ (bzw. m'), d.h. die Formeln, die m bzw. m' beschreiben.
Dann ist $\varphi = \Diamond(\varphi_m \wedge \Diamond\varphi_{m'})$ die gesuchte Formel, denn:
$N \models \varphi \Leftrightarrow \exists \emptyset \subseteq K \in \mathcal{K}(N^*) : K \models \varphi_m \wedge \Diamond\varphi_{m'}$
$\Leftrightarrow \exists \emptyset \subseteq K \subseteq K' \in \mathcal{K}(N^*) : K' \models \varphi_{m'}$ und $K \models \varphi_m$, d.h. m ist durch K erreichbar und es gibt eine Menge von Transitionen $K' \setminus K$, sodass aus m auch m' erreichbar ist.
Wenn nicht sichergestellt werden soll, dass m auch erreichbar ist, dann können wir die Formel $\psi = \Diamond\varphi_m \rightarrow \varphi$ verwenden. Diese ist erfüllt, wenn m nicht erreichbar ist, oder φ gilt.