



Seminar: Analyse von Petrinetzen

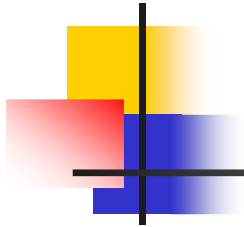
Überdeckbarkeitsgraph Teil 2

von Martin Filip



Inhalt

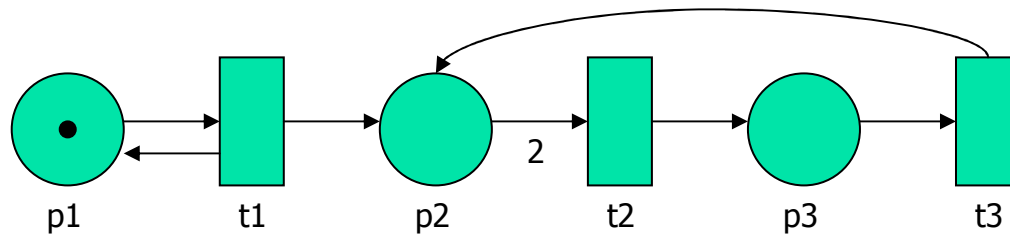
- Rückblick (mit Problem)
- Logik
- Konvergenz
- Theoreme 1-3



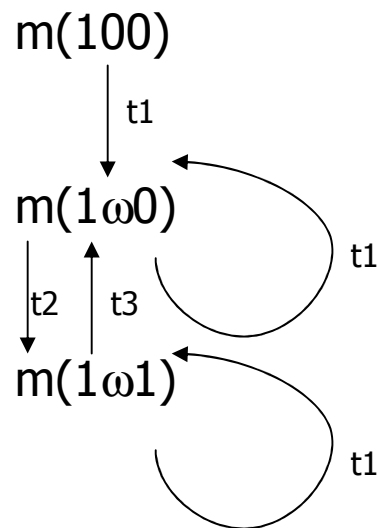
Rückblick

- Unbeschränkter Platz \Rightarrow EG unendlich
- \ddot{U} -Graph:
 - Vorteil: endlich, leicht generierbar + analysierbar
 - Nachteil: verliert Informationen

Informationsverlust



ÜG:



Ü-Graph besagt:

schalte t1, dann kann t2 schalten

Leider falsch!



Logik

Definition Formel:

Sei $N = (P, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz.

- $\forall p_i \in P$ und $\forall k \in \mathbb{N}$ sind $p < k$, $p \leq k$, $p = k$, $p \geq k$, $p > k$, $p \neq k$
atomare Formeln
- Wenn H_1 und H_2 Formeln sind, so auch:
 $(H_1 \wedge H_2)$, $(H_1 \vee H_2)$, $\neg H$, $\diamond H$, $\square H$



Logik

Vereinbarung: $m \vDash H$ (eine Markierung m erfüllt Formel H)

Interpretation der Formeln(für Petrinetze):

Sei N ein Petri-Netz und H eine Formel. $m \vDash H$ ist dann wie folgt definiert:

1. Sei $H = pRk$ ($R \in \{<, \leq, =, \geq, >, \neq\}$), dann $m \vDash H$, wenn $m(p)Rk$.
2. Sei $H = (H_1 \wedge H_2)$, dann $m \vDash H$, wenn $m \vDash H_1$ und $m \vDash H_2$.
(das gleiche gilt für $(H_1 \vee H_2)$)
3. Sei $H = \neg H_1$, dann $m \vDash H$, wenn $\neg(m \vDash H_1)$.
4. Sei $H = \diamond H_1$, dann $m \vDash H$, wenn $\exists m' \in EG(m)$, so dass $m' \vDash H_1$.
5. Sei $H = \square H_1$, dann $m \vDash H$, wenn $\forall m' \in EG(m)$, so dass $m' \vDash H_1$.



Ausblick

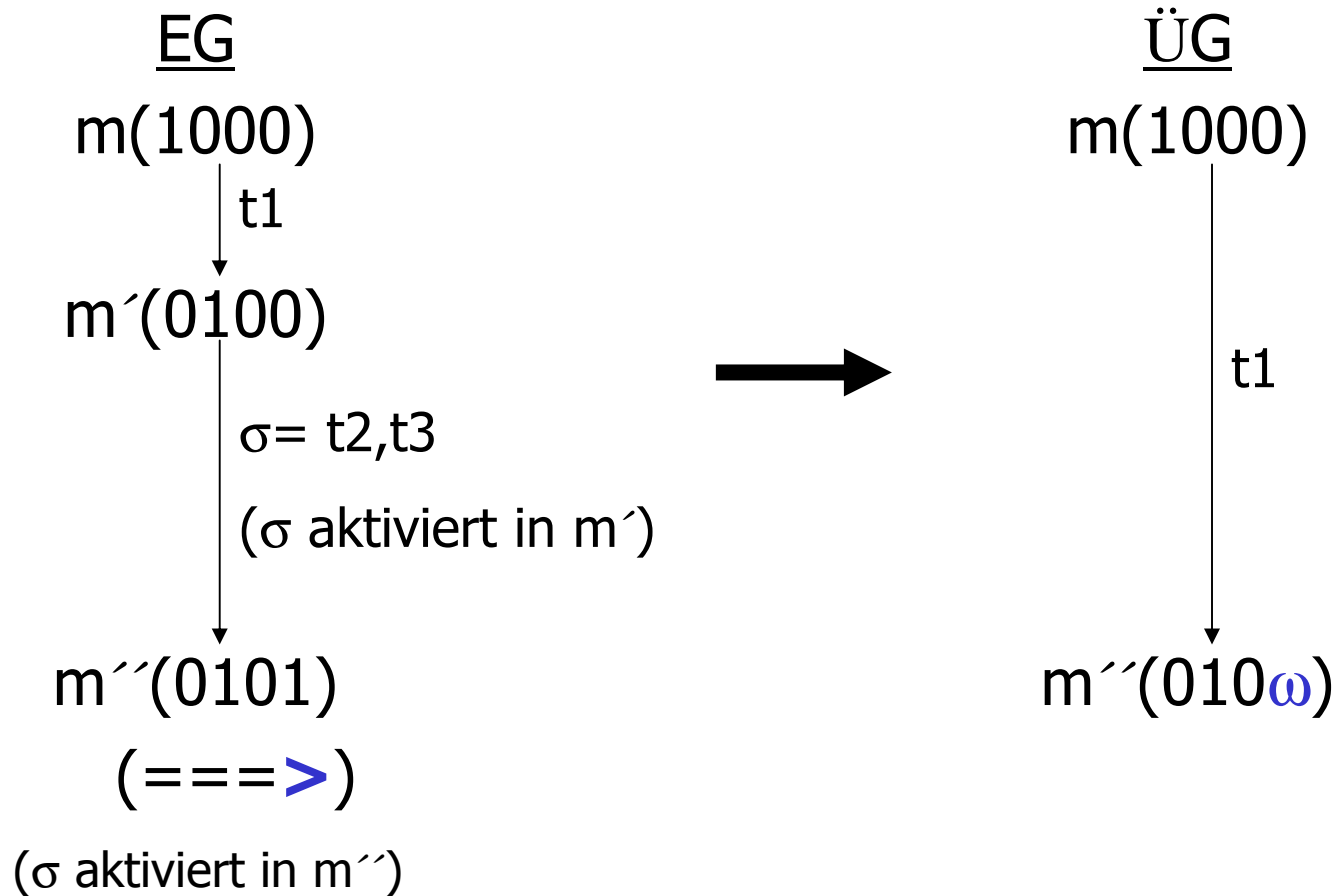
- Wozu das ganze?
- Anfragen stellen:
 $((p_3 \geq 5 \wedge p_7 = 1) \Rightarrow \diamond(p_3 \geq 5 \wedge p_9 \geq 27))$
- Logikverarbeitende Prozedur antwortet:
ja/nein



Bemerkung

- Logik für beschränkte Netze entscheidbar
- Logik für unbeschränkte Netze unentscheidbar

Rückblick(strikte Monotonie)





Konvergenz

Definition Konsistenz:

Sei $N = (P, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und μ eine generalisierte Markierung ($\mu: P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$).

- Markierung m ist konsistent mit μ , wenn für alle $\forall p \notin \Omega(\mu)$ gilt: $m(p) = \mu(p)$

Definition Konvergenz:

Eine Markierungssequenz $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen μ , wenn $\forall i m_i$, die konsistent mit μ sind und $\forall p \in \Omega(\mu)$ und $\forall s \in \mathbb{N}$ ein $\exists k \in \mathbb{N}$, so dass $\forall l \in \mathbb{N}$ mit $l > k$, $m_l(p) > s$ gilt.



Anpassung \succ -Operator

Definition neuer \succ -Operator

Sei $N = (P, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz und μ eine generalisierte Markierung ($\mu: P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\omega\}$).

- μ erfüllt H **strikt** ($\mu \succ_{\forall} H$), wenn für jede erreichbare Markierung m , die konsistent mit μ ist gilt: $m \succ H$
- μ **konvergiert** gegen H ($\mu \succ_{\lim} H$), wenn für jede Sequenz von erreichbaren Markierungen $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ die gegen μ konvergiert, es ein i_0 gibt, so dass für alle $i > i_0$ gilt: $m_i \succ H$.



Anpassung \succ -Operator

Definition neuer \succ -Operator(Fortsetzung)

- μ erfüllt H **infini** ($\mu \succ_{\infty} H$), wenn es eine Sequenz von erreichbaren Markierungen $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ gibt, so dass gilt: unendlich viele $m_i \succ H$.
- μ erfüllt H **schwach** ($\mu \succ_{\exists} H$), wenn es eine erreichbare Markierung m gibt, die konsistent mit μ ist, so dass gilt: $m \succ H$.



Aussagen

Theorem 1:

Sei $N = (P, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $\ddot{U}G = (K, E, T)$, $\mu \in K$ und H eine Formel.

Wenn $\mu \not\models H$ für alle $\mu' \in \ddot{U}G(\mu)$ gilt, dann $\mu \not\models \square H$.



Ω -Vermeidungsgraph

Sei $N = (P, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $\ddot{U}G = (K, E, T)$.

Dann ist der $\overline{\ddot{U}G} = (K, E', T)$ definiert als:

$[\mu, t, \mu'] \in E'$ falls $[\mu, t, \mu'] \in E$ und $F(t) \cap \Omega(\mu) = \emptyset$



Aussagen

Theorem2:

Sei $N = (P, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $\ddot{U}G = (K, E, T)$ und H eine Formel.

Dann gilt für alle $\mu \in K$:

Wenn es ein $\mu' \in \overline{\ddot{U}G}(\mu)$ gibt, so dass $\mu' \not\gg_{\forall} H$, dann $\mu \not\gg_{\forall} \diamond H$.



Aussagen

Theorem3:

Sei $N = (P, T, F, V, m_0)$ ein Petri-Netz, $\ddot{U}G = (K, E, T)$, $\mu \in K$ und H eine Formel.

Wenn es ein $\mu' \in \ddot{U}G(\mu)$ gibt, so dass $\mu' \succ_{\text{lim}} H$, dann $\mu \succ_{\text{lim}} \diamond H$.



Zusammenfassung

- Logik nicht entscheidbar für unbeschränkte Netze
- trotzdem sinnvoll \Rightarrow viele Formeln auch für unbeschränkte Netze entscheidbar (siehe Theoreme 1-3)



Quellen

- Karsten Schmidt: "Model-Checking with Coverability Graphs", Berlin