# Seminar: Analyse von Petrinetzen

## Überdeckbarkeitsgraph Teil 1

von Martin Filip

# Inhalt

- Vorarbeit
  - Überdeckung einer Markierung
  - Monotonie des Schaltens
  - EG-ÜG
- Überdeckbarkeitsgraph
- Algorithmus
- Eigenschaften des Ü-Graphes

# Überdeckung einer Markierung

Sei N = $(P,T,F,V,m_0)$ ein Petri-Netz

1. Eine Markierung m heißt von m´ überdeckt, wenn $m \leq m'$ gilt, d.h. $\forall p_i \in P$ gilt: $m(p_i) \leq m'(p_i)$

2. m wird überdeckbar in N genannt, wenn es eine in N erreichbare Markierung m´ gibt, die m überdeckt.

Beispiele:

$(0,1,0,2) \leq (0,2,7,2)$

$(2,1,0,2) \leq (2,2,4,3)$

aber nicht: $(0,1,0,2) \leq (0,0,0,3)$

# Monotonie des Schaltens

Sei $N = (P,T,F,V,m_0)$ ein Petri-Netz, $t \in T$ aktiviert in Markierung m, dann gilt:

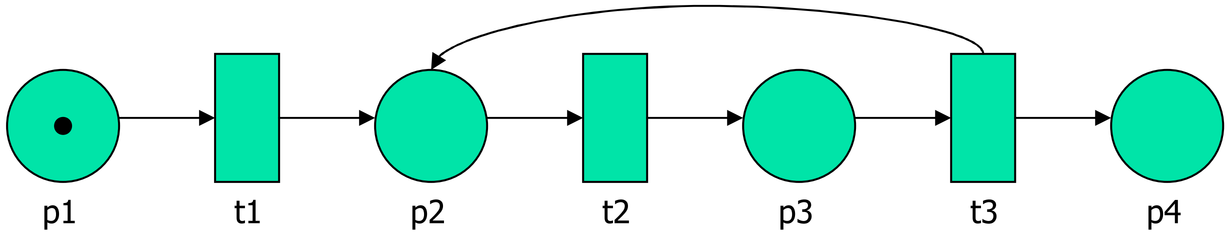
t auch aktiviert in $m'$, wenn $m \leq m'$ gilt.

# Monotonie des Schaltens

Beispiel:

- $m(0,1,0,1) \wedge \Delta t(0,0,0,1)=t^{+}(0,1,0,1)-t^{-}(0,1,0,0)$
  - t aktiviert($(0000) \leq m-t^{-}$)
- $m' = m + \Delta t$
- nach dem Schalten: $m'(0,1,0,2)$
- $m(0,1,0,1) \leq m'(0,1,0,2)$
- t erneut in m´ ist aktiviert

# Erreichbarkeitsgraph




$m(1000) \xrightarrow{t1} m(0100)$

$m(0100) \xrightarrow{t2} m(0010) \xrightarrow{t3} m(0101) \xrightarrow{t2} m(0011)$

$m(0011) \xrightarrow{t3} m(0102)$

$m(0102) \xrightarrow{t2} m(0012) \xrightarrow{t3} m(0103) \xrightarrow{t2} m(0013)$

$m(0013) \xrightarrow{t3} \ldots$

<u>Beobachtung:</u>

$\exists\ m \leq m'$,

dann EG unendlich

# Problem-Ziel

- Unendlichkeit EG problematisch (Beschreibung, Analyse)

⇒ Ziel: endlichen Graph

# EG - ÜG

<u>EG</u>

m(1000)

$\downarrow$ t1

m´(0100)

$\downarrow$ σ= t2,t3

(σ aktiviert in m´)

m´´(0101)

(===>)

(σ aktiviert in m´´)

<u>ÜG</u>

m(1000)

$\downarrow$ t1

m´´(010ω)

# Inhalt

- Vorarbeit
  - Überdeckung einer Markierung
  - Monotonie des Schaltens
  - EG-ÜG
- Überdeckbarkeitsgraph
- Algorithmus
- Eigenschaften des Ü-Graphes

# Überdeckbarkeitsgraph

- Grundidee:

  $m(p) \in N \cup \{\omega\}$ ($\omega$–Markierung)

  $m(p) = \omega$ (unbeschränkt viele Marken)

- Rechenregeln:

  $\omega - n = \omega$

  $\omega + n = \omega$

  $\omega * n = \omega \qquad (n \geq 1)$

  $\omega * 0 = 0$

# Überdeckbarkeitsgraph
## (nach Karp&Miller)

Definition: Sei $N=(P,T,F,V,m_0)$ ein Petrinetz. Ein Transitions-system $(S,E,T,m_0)$ heißt Überdeckbarkeitsgraph für N, wenn es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Zustände S sind Vektoren $m: P \rightarrow N \cup \{\omega\}$
2. $m_0 \in S$
3. wenn $m \in S$ und $t \in T$, so dass $\forall p \in P$: $V(p,t) \leq m(p)$ gilt, dann gibt es einen Folgezustand $m' \in S$, so dass $(m,t,m') \in E$.

# Überdeckbarkeitsgraph
## (nach Karp&Miller)

- Vorbemerkung:
  - $\Omega(m) = \{p|m(p)= \omega\}$ (Teilmenge von Plätzen, die echte $\omega$-Plätze)

4. wenn $(m,t,m') \in E$, dann $\Omega(m) \subseteq \Omega(m')$ und es eine Transitionssequenz $\sigma$ gibt, so dass $\sigma$ von $m+\Delta t$ ausgeführt werden kann, dann gilt:
   - $\Delta\sigma(p) = 0$ für $p\in P\backslash\Omega(m')$
   - $\Delta\sigma(p) > 0$ für $p\in \Omega(m')\backslash\Omega(m)$

5. (S,E,T) ist von $m_0$ erreichbar (zusammenhängend)

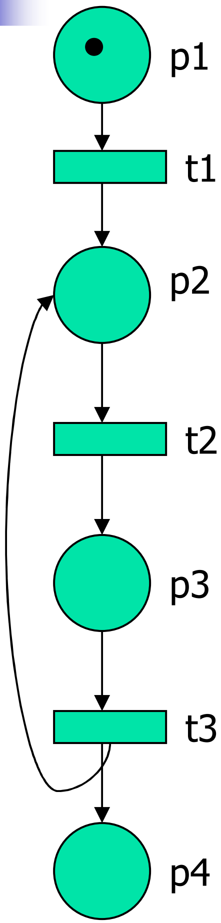
# Inhalt

- Vorarbeit
  - Überdeckung einer Markierung
  - Monotonie des Schaltens
  - EG-ÜG
- Überdeckbarkeitsgraph
- Algorithmus
- Eigenschaften des Ü-Graphes

# Algorithmus

BEGIN
  $W:=\{m_0\}$; $Vor(m_0):=\emptyset$   (noch nicht bearbeitete Zustände)
  $R:=\emptyset$; $B:=\emptyset$
  WHILE $W\neq\emptyset$ DO
    wähle $m\in W$;   $W:=W-\{m\}$; $R:=R\cup\{m\}$
      $Konz:=\{t \mid t^{-}\leq m\}$;
      FOR $t\in Konz$ DO
        $m':=m+\Delta t$;
        $m^*:=m$;
        WHILE $(m^*\neq\emptyset)$ AND NOT $(m^*\leq m')$ DO: $m^*:=Vor(m^*)$
        IF $(m^*\neq\emptyset)$ $m':=m'+(m'-m^*)*\omega$
        $B:=B\cup\{(m,t,m')\}$;
        IF $(m'\notin R\cup W)$ THEN $W:=W\cup\{m'\}$; $Vor(m'):=m$;
      END (*FOR*)
  END (*WHILE*)
END (*BEGIN*)

# Beispiel-Netz




$W := \{m_0\}$; $Vor(m_0) := \emptyset$

$R := \emptyset$; $B := \emptyset$

WHILE $W \neq \emptyset$ DO

  wähle $m \in W$;  $W := W - \{m\}$; $R := R \cup \{m\}$

   $Konz := \{t \mid t^{-} \leq m\}$;

   FOR $t \in Konz$ DO

    $m' := m + \Delta t$;

    $m^* := m$;

    WHILE $(m^* \neq \emptyset)$ AND NOT $(m^* \leq m')$ DO: $m^* := Vor(m^*)$

    IF $(m^* \neq \emptyset)$ $m' := m' + (m' - m^*)_{*}\omega$

    $B := B \cup \{(m, t, m')\}$;

    IF $(m' \notin R \cup W)$ THEN $W := W \cup \{m'\}$; $Vor(m') := m$;

   END (*FOR*)

END (*WHILE*)

# Überdeckbarkeitsgraph
## (nach Finkel)

Definition: Sei $N=(P,T,F,V,m_0)$ ein Petrinetz. Ein Transitions-system $(S,E,T,m_0)$ heißt Überdeckbarkeitsgraph für N, wenn es die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Zustände S sind Vektoren m: $P \rightarrow N \cup \{\omega\}$
2. $\exists m' \in S$, so dass $m' \geq m_0$ (m´ ist überdeckender Anfangszustand)
3. Für jede $m \in S$ gibt es eine Sequenz von erreichbaren Markierungen, so dass alle $p \in \Omega(m)$ strikt größer werden und alle $m(p)$ = konstant für $p \in P \setminus \Omega(m)$

# Überdeckbarkeitsgraph

## (nach Finkel)

4. Für jede Markierung $m \in S$ und jede Transition t, für die $V([p,t]) \leq m(p) \; \forall p \in P$ gilt, gibt es ein $m' \in S$, die die Bedingung $m' \geq m + \Delta t$ erfüllt

⇒ Graph ist minimal: für alle $m, m' \in S$, $m \neq m'$ gilt: m wird nicht von m´ überdeckt

# Überdeckbarkeitsgraph
## (nach Finkel)

<u>ÜG(Finkel)</u>

$$
\begin{tikzcd}
m(1000) \arrow[d, "t1"] \\
m(010\omega) \arrow[d, shift right=2, "t2"'] \\
m(001\omega) \arrow[u, shift right=2, "t3"']
\end{tikzcd}
$$

# Eigenschaften des Ü-Graphes

1. Der Ü-Graph ist immer endlich.
2. EG = ÜG, wenn in EG keine unbeschränkten Plätze existieren.

# Quellen


- Peter H. Starke:“Analyse von Petri-Netz-Modellen“,B.G. Teubner Stuttgart, 1990
- Karsten Schmidt:“Explicit State Space Verification“,2002