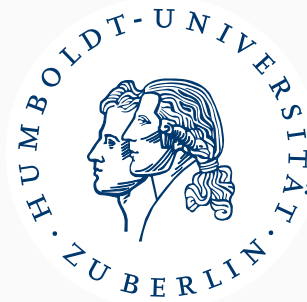


High-Level Invarianten II

Johannes Klaus Fichte

Institut für Informatik,
Humboldt-Universität zu Berlin

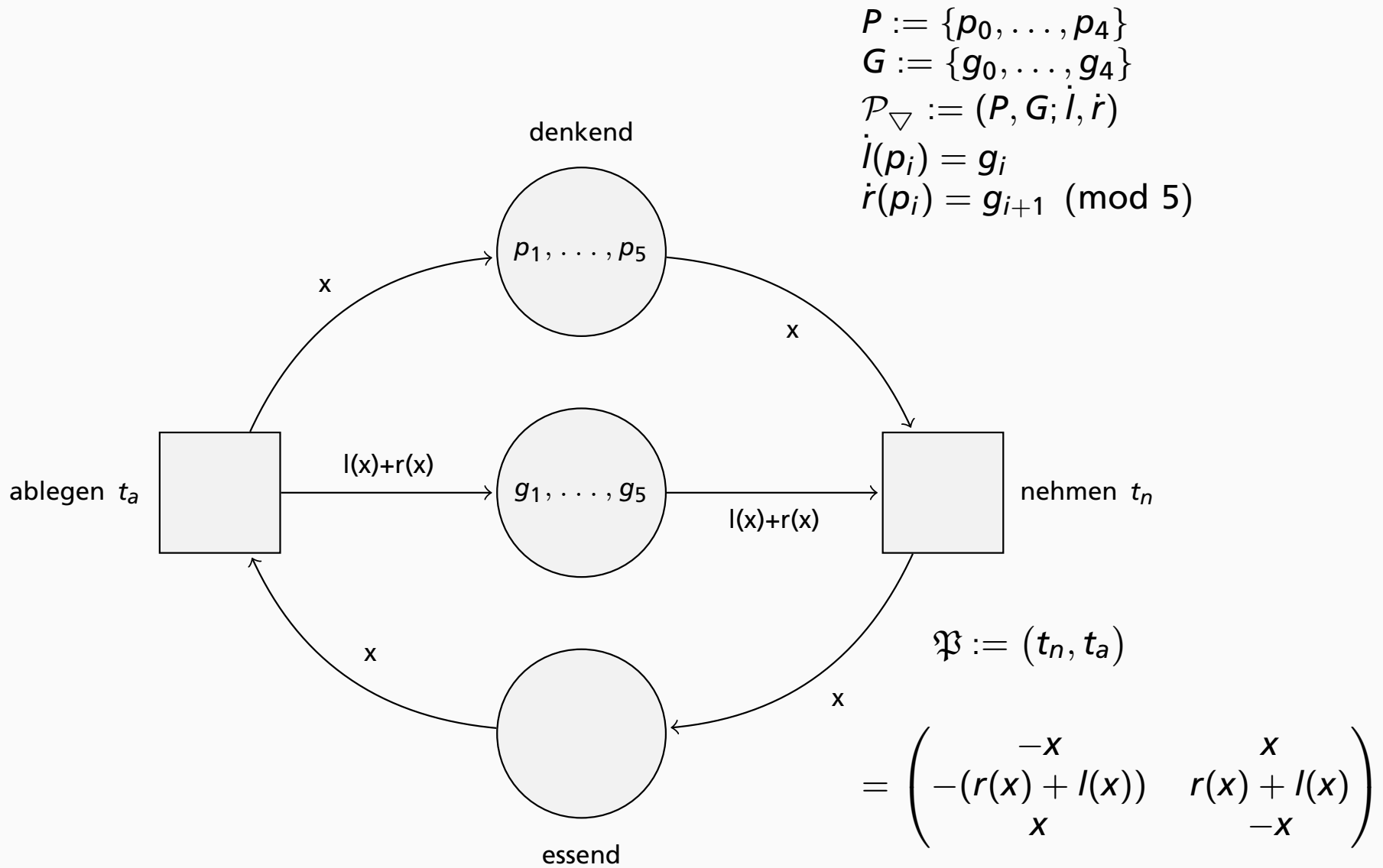
11.02.2008



Platz-Invariante

- Plätzen wird Gewicht zugeordnet
- Invariante:
 - Summe der Gewichte ändert sich unter Transition nicht
 - Notwendiges Kriterium für Erreichbarkeit einer Markierung
 - Nur vom Netz nicht von einer aktuellen Markierung abhängig

Speisende Philosophen 5-Phil



Testen von Invarianten

Plätze	nehmen (t_n)	ablegen (t_a)	M_0	\vec{s}_1	\vec{s}_2
denkend	$-x$	x	$p_0 + \dots + p_4$	y	$r(y) + l(y)$
verfügbar	$-(l(x) + r(x))$	$l(x) + g(x)$	$g_0 + \dots + g_4$	0	$-z$
essend	x	$-x$	ϵ	y	0

Für alle $t \in T$ gilt: $\vec{s} \cdot \vec{t} \equiv 0$

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{t}_n \equiv 0 \text{ und } \vec{s}_1 \cdot \vec{t}_a \equiv 0$$

$$t_n : y \circ (-x) + y \circ x \equiv 0 \checkmark$$

$$t_a : y \circ (x) + y \circ (-x) \equiv 0 \checkmark$$

Agenda

1 Invarianten überprüfen

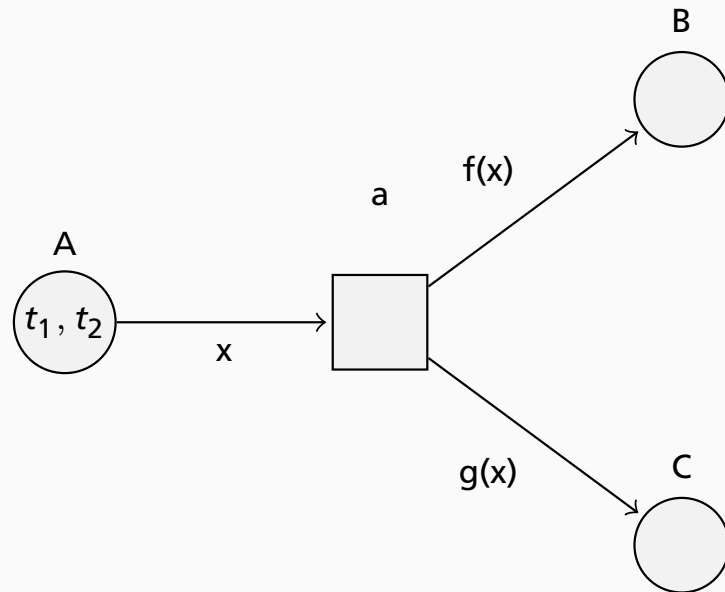
- Operator \circ
- Umkehrung

2 Modulo-Invarianten

- Motivation
- Definition
- Pebble Game

Operator ○

Beispiel 1



	\vec{a}	m_0	\vec{s}
A	$-x$	$t_1 + t_2$	$f(A) + g(A)$
B	$-f(x)$		B
C	$g(x)$		C

$$\vec{s} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -x \\ f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(A) + g(A) \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0$$

Operator ○

Produkt zweier Vektoren

Definition 1 ($\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2$)

Für Vektoren \vec{t}_1, \vec{t}_2 sei das Produkt $\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 : P \rightarrow T_\sigma$ durch

$$\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 := \sum_{p \in P} \vec{t}_1(p) \circ \vec{t}_2(p)$$

definiert.

$$\begin{pmatrix} -x \\ f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(A) + g(A) \\ B \\ C \end{pmatrix} = (-x \circ [f(A) + g(A)]) + (f(x) \circ B) + (g(x) \circ C)$$

Operator ○

Produkt zweier Terme

Definition 2 ($t_1 \circ t_2$)

Sei σ eine Signatur und X eine Menge von Variablen.
Für Terme $t_1, t_2, t' \in T_\sigma$ sei das Produkt $t_1 \circ t_2 \in T_\sigma$ per Induktion wie folgt definiert:

$$(0): \quad 0 \circ t' = 0$$

$$(D): \quad (t_1 + t_2) \circ t' = t_1 \circ t' + t_2 \circ t'$$

$$(N): \quad (-t_1) \circ t_2 = -(t_1 \circ t_2)$$

$$(A): \quad t_1 \circ t_2 = \beta_{\frac{t_1}{x}}(t_2)$$

Operator ◦

Beispiel 1 – Fortsetzung

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -x \\ f(x) \\ g(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f(A) + g(A) \\ B \\ C \end{pmatrix} &= (-x \circ [f(A) + g(A)]) + (f(x) \circ B) + (g(x) \circ C) \\
 &= -([x \circ f(A)] + [x \circ g(A)]) + (f(x) \circ B) + (g(x) \circ C) \\
 &= -\beta \frac{x}{A}(f(A)) - \beta \frac{x}{A}(g(A)) + \beta \frac{f(x)}{B}(B) + \beta \frac{g(x)}{C}(C) \\
 &= -f(x) - g(x) + f(x) + g(x)
 \end{aligned}$$

Umkehrung

Umkehrung der Belegung?

Definition 3 ($t_1 \circ t_2$)

Sei σ eine Signatur und X eine Menge von Variablen.
Für Terme $t_1, t_2, t' \in T_\sigma$ sei das Produkt $t_1 \circ t_2 \in T_\sigma$ per Induktion wie folgt definiert:

$$(0): \quad 0 \circ t' = 0$$

$$(D): \quad (t_1 + t_2) \circ t' = t_1 \circ t' + t_2 \circ t'$$

$$(N): \quad (-t_1) \circ t_2 = -(t_1 \circ t_2)$$

$$(A): \quad t_1 \circ t_2 = \beta_{\frac{t_1}{x}}(t_2)$$

Fazit

Die Umkehrung β^{-1} einer Belegung β ist nur in ganz besonderen Spezialfällen möglich.

Motivation

- Gegeben: Petrinetz, Markierungen m_0, m_1
- Frage: Kann die gegebene Markierungen m_1 von der Markierung m_0 im Petrinetz erreicht werden
- Ideal: Hinreichendes Kriterium für die Nicht-Erreichbarkeit

Motivation

Nicht-Erreichbarkeit (Low Level)

Falls es keinen Vektor $x \in \mathbb{N}^n$ gibt, so dass

$$m_0 + \mathfrak{A} \cdot x = m_1$$

gilt, dann ist m_1 von m_0 aus nicht erreichbar.

$\mathfrak{A} \dots$ Inzidenzmatrix

$$m_0 \xrightarrow{\tau} m_1$$

$\tau \dots$ Sequenz von Transition

$$x := \Psi(\tau) \in \mathbb{N}^n$$

Überprüfung der Erreichbarkeit

Bemerkung 4

Das Problem Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems ist NP-vollständig.

Lösung: Invarianten

Problem?

- Falls $m_1 + m$ von $m_0 + m$ erreichbar
→ Platzinvariante »versagt«
- Platzinvariante \vec{s} kann die Nicht-Erreichbarkeit von m_1 aus m_0 nicht identifizieren

Definition

Modulo-Invarianten

Definition 5

Sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Eine Modulo- k -Invariante eines Petrinetzes $N = (P, T, F)$ ist ein Vektor $\vec{s} \in \mathbb{Z}^m$ der für jeden Spaltenvektor \vec{a} der Inzidenzmatrix \mathcal{A} von N die Gleichung $\vec{s} \cdot \vec{a} \equiv 0 \pmod{k}$ erfüllt.

Jede Modulo- k -Invariante ist ein Modulo-Invariante.

Definition

Proposition 6

Falls $m_0 + \mathfrak{A} \cdot \vec{x} = m_1$ eine Lösung $\vec{x} \in \mathbb{Z}^n$ hat und \vec{s} eine Modulo- k -Invariante ist, dann ist m_1 von m_0 aus erreichbar.

Kurz:

$$\vec{s} \cdot m_0 \equiv \vec{m}_1 \pmod{k}$$

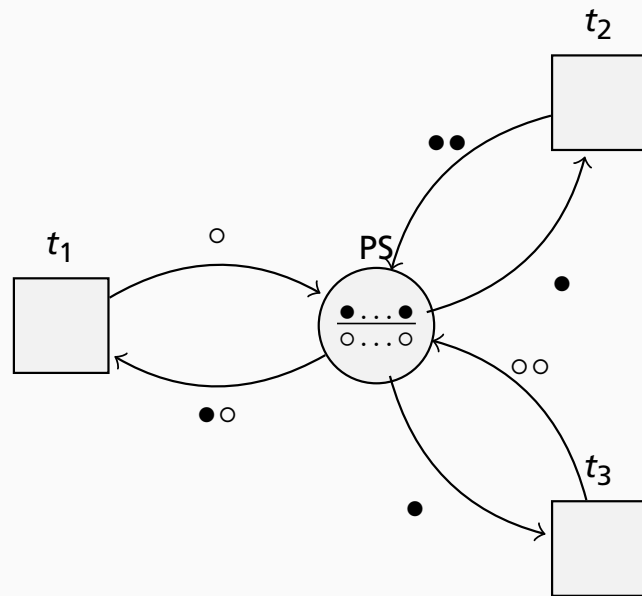
Pebble Game

Djikstras Pebble Game

- 1 Pebbles und Funktion, die einem Pebble eine Farbe $c : P \rightarrow \{\bullet, \circ\}$ zuordnet
- 2 Nimm zwei Pebble p_1, p_2
- 3 Lege ein Pebble p zurück, so dass
$$\begin{cases} c(p) = \circ, & \text{falls } c(p_1) \neq c(p_2) \\ c(p) = \bullet, & \text{sonst} \end{cases}$$
- 4 Gewinnbedingung: Nur noch ein \bullet Pebble übrig

Pebble Game

Invarianten des Pebble Games



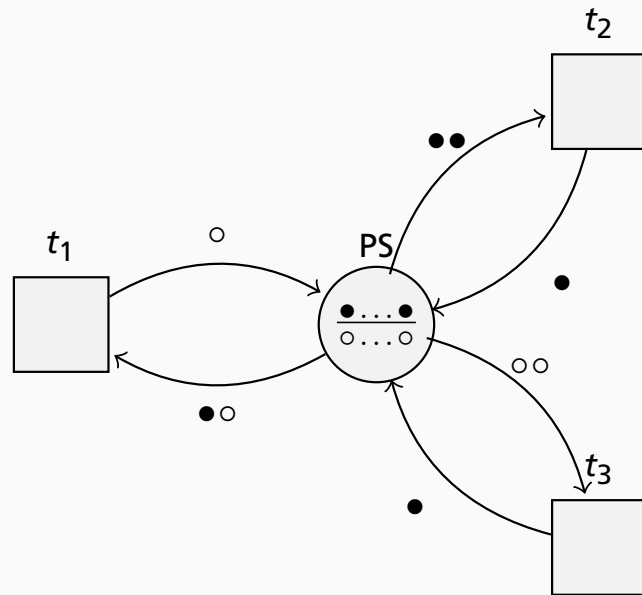
$$\begin{aligned}
 & b \cdot t_2 \pmod{2} \\
 & \equiv f(x) \cdot ([\bullet] - [\circ, \circ]) \pmod{2} \\
 & \equiv f(x) \cdot [\bullet] - f(x) \cdot [\circ, \circ] \pmod{2} \\
 & \equiv f([\bullet]) - f([\circ, \circ]) \pmod{2} \\
 & \equiv f([\bullet]) - (f([\circ]) + f([\circ])) \pmod{2} \\
 & \equiv 0 - (1 + 1) \pmod{2} \\
 & \equiv 0 - 0 \pmod{2} \equiv 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & f(x) \cdot (-[\bullet]) \pmod{2} \\
 & \equiv f(-[\bullet]) \pmod{2} \\
 & \equiv -f([\bullet]) \pmod{2} \equiv -0 \equiv 0
 \end{aligned}$$

	t_1	t_2	t_3	b	m_0
Pebbles	$-[\bullet]$	$[\bullet] - [\circ, \circ]$	$-[\bullet]$	$f(x)$	$B \cdot [\bullet] + W \cdot [\circ]$

Pebble Game

Gewinnstrategie für das Pebble Game



$$\begin{aligned}
 & f(m_0) \pmod{2} \\
 & \equiv f(B \cdot [\bullet] + W \cdot [\circ]) \pmod{2} \\
 & \equiv f(B \cdot [\bullet]) + f(W \cdot [\circ]) \pmod{2} \\
 & \equiv B \cdot f([\bullet]) + W \cdot f([\circ]) \pmod{2} \\
 & \equiv B \cdot 0 + W \cdot f([\circ]) \pmod{2} \\
 & \equiv 0 + W \pmod{2} \equiv W \pmod{2}
 \end{aligned}$$

$$\equiv \begin{cases} 0, & \text{falls } W \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } W \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$m_{fin} = [\bullet] \Leftrightarrow f(\bullet) = 0 \Leftrightarrow W \text{ ungerade}$$

	t_1	t_2	t_3	b	m_0
Pebbles	$-[\bullet]$	$[\bullet] - [\circ, \circ]$	$-[\bullet]$	$f(x)$	$B \cdot [\bullet] + W \cdot [\circ]$