High-Level Invarianten I

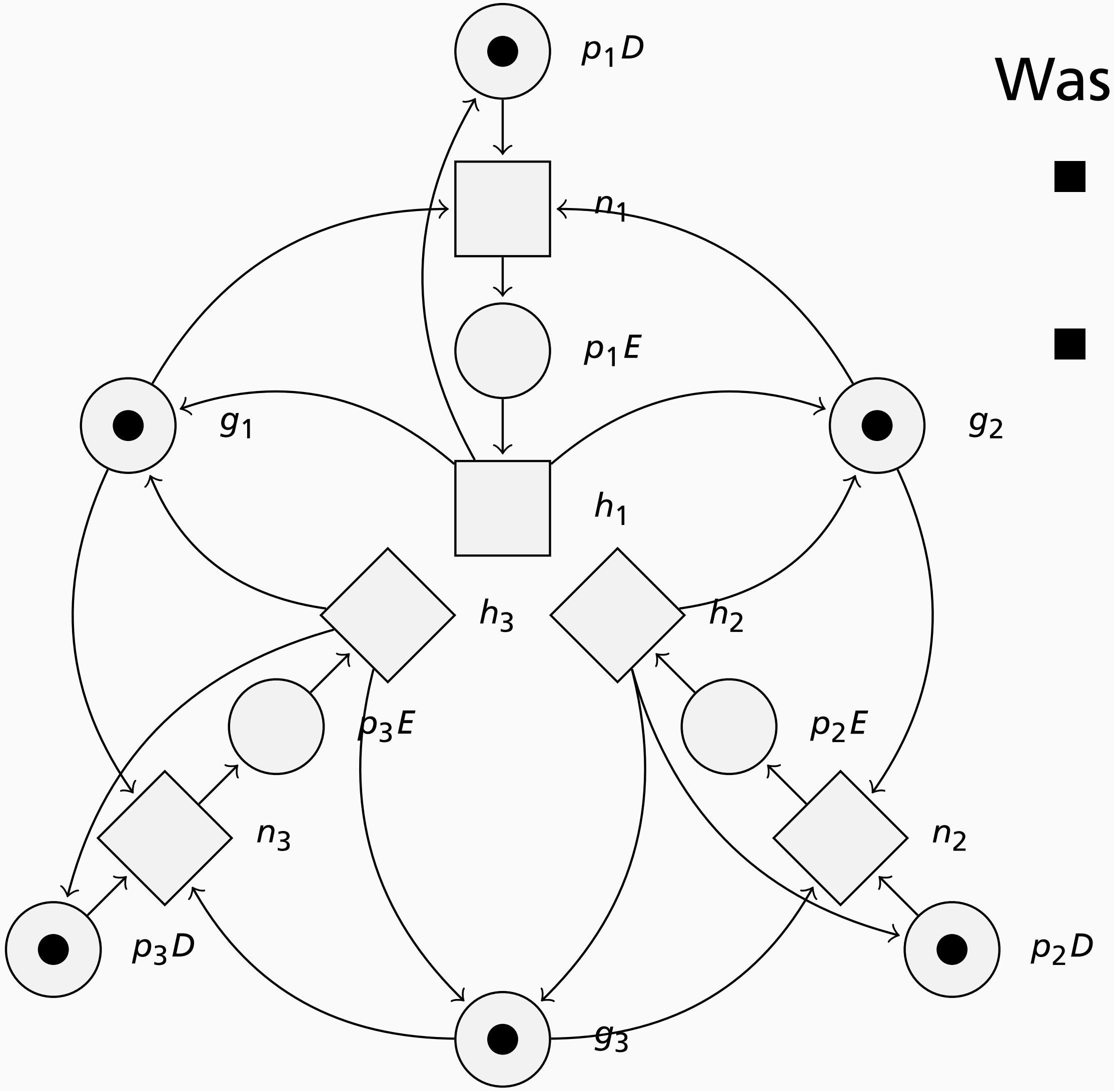
Johannes Klaus Fichte

Institut für Informatik,
Humboldt-Universität zu Berlin

28.01.2008

Agenda

Speisende Philosophen



Was bleibt »gleich«?

- S_1: Jeder Philosoph denkt oder ißt.
- S_2: Wenn eine Gabel zur Verfügung steht, dann denken beide potentiellen Nutzer.

Invariante

- zu jedem Zeitpunkt erfüllte Eigenschaft
- Geg. Petrinetz $\Rightarrow$ Invariante überprüfen
  Invariante ausrechnen
- Repräsentation über dem Raum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
  - des Petrinetzes $N = (P, T, F)$ als Inzidenzmatrix $\mathfrak{A}$,
  - der Markierungen M als Vektor $\vec{m} : P \to \mathbb{N}$,
  - der Invariante I als Vektor $\vec{s} : P \to \mathbb{N}$

Inzidenzmatrix $\mathfrak{A}$

Seien die Plätze $p \in P$ und die Transistionen $t \in T$ geordnet.

$$t := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ mit } z_i := \begin{cases} -1, & \text{wenn } p_i \in \bullet t \text{ und } p_i \notin t\bullet \\ +1, & \text{wenn } p_i \in t\bullet \text{ und } p_i \notin \bullet t \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$\mathfrak{A} := (t_1, t_2, \cdots, t_k)$$

Platz-Invarianten

Definition 1 (Platz-Invariante)

Sei $N = (P, T, F)$ ein Petrinetz, der Vektor $\vec{s} : P \to \mathbb{N}$ heißt **Platz-Invariante**, genau dann wenn für alle Markierungen M und M' von N mit $M \xrightarrow{t \in T} M'$ gilt: $\vec{s} \cdot M = \vec{s} \cdot M'$.

Theorem 2

Platz-Invarianten sind die Lösungen des linearen Gleichungssystems $\vec{s}^T \cdot \mathfrak{A} = 0$.

Ein Beispiel

Signatur , Algebra , Terme

- $\sigma := \{\dot{N}, \dot{Z}, +, \times, 0, 1\}$
- $\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \mathbb{Z}; +^{\mathcal{A}}, \times^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, 1^{\mathcal{A}})$
- $\cancel{\varphi := \exists 1\, \forall x\, (1 < x \vee x = 1)}$
- $\varphi(x) := 1 + x$

Notation:
$T_\sigma \ldots$ Menge aller Terme über der Signatur σ
$GT_\sigma \ldots$ Menge aller Grundterme

Belegung β

Definition 3

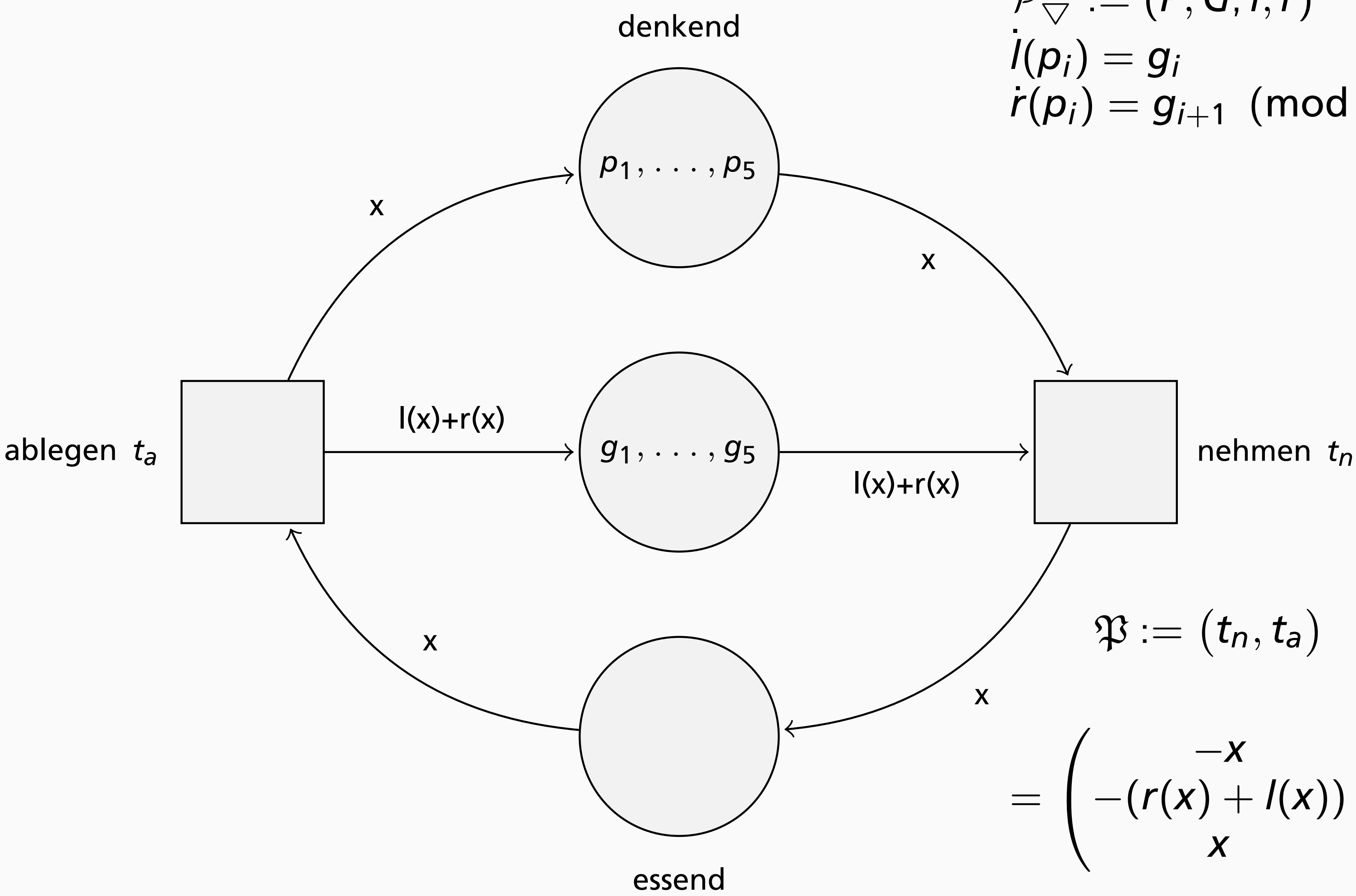
Eine **Belegung** β ist eine Abbildung $\beta : VAR_i \rightarrow GT_\sigma$, die jeder Variablen einen Grundterm zuweist.

Beispiel:
$x_0 \in VAR_{\dot{N}}$
$\beta := \{\frac{1+1+1}{x_0}\}$

Grundlagen

Speisende Philosophen 5-Phil

$$P := \{p_0, \ldots, p_4\}$$
$$G := \{g_0, \ldots, g_4\}$$
$$\mathcal{P}_{\bigtriangledown} := (P, G; \dot{l}, \dot{r})$$
$$\dot{l}(p_i) = g_i$$
$$\dot{r}(p_i) = g_{i+1} \pmod 5$$



$$\mathfrak{P} := (t_n, t_a)$$

$$= \begin{pmatrix} -x & x \\ -(r(x) + l(x)) & r(x) + l(x) \\ x & -x \end{pmatrix}$$

Platz-Invarianten II

- Erweiterung des Begriffes Platzinvariante auf neue Trägermenge
- Platz-Invariante $\vec{s} : P \rightarrow T_\sigma$
- $\vec{s}$ bleibt invariant unter Schrittbildung

Theorem 4

Sei $N = (P, T, F)$ ein Petrinetz, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\vec{s} : P \rightarrow T_\sigma$ eine Abbildung, so ist $\vec{s}$ eine Platz-Invariante, genau dann wenn $\vec{s} \cdot \vec{t} \equiv 0$ für alle $\vec{t} \in T(\mathfrak{A})$ gilt.

Invariante I_1, I_2 für 5-Phil

S_1: Zu jedem Zeitpunkt denkt oder ißt jeder Philosoph.
S_2: Wenn eine Gabel verfügbar ist, so denken beide potentiellen Nutzer.

Inzidenzmatrix $\mathfrak{P}$ für $Phil_5$:

Plätze	nehmen (t_n)	ablegen (t_a)	M_0	$\vec{s}_1$	$\vec{s}_2$
denkend	$-x$	x	$p_0 + \ldots + p_4$	y	$r(y) + l(y)$
verfügbar	$-(l(x) + r(x)$	$l(x) + g(x)$	$g_0 + \ldots + g_4$	0	$-z$
essend	x	$-x$	ϵ	y	0

Invariante S_1 Testen

Plätze	nehmen (t_n)	ablegen (t_a)	M_0	$\vec{s}_1$	$\vec{s}_2$
denkend	$-x$	x	$p_0 + \ldots + p_4$	y	$r(y) + l(y)$
verfügbar	$-(l(x) + r(x)$	$l(x) + g(x)$	$g_0 + \ldots + g_4$	0	$-z$
essend	x	$-x$	ϵ	y	0

Für alle $t \in T$ gilt: $\vec{s} \cdot \vec{t} \equiv 0$

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{t}_n \equiv 0 \text{ und } \vec{s}_1 \cdot \vec{t}_a \equiv 0$$

$$t_n : y \circ (-x) + y \circ x \equiv 0 \checkmark$$

$$t_a : y \circ (x) + y \circ (-x) \equiv 0 \checkmark$$

Weiter mit Invariante 2

Invariante und Markierungen

- Platz-Invarianten erst zusammen mit Startmarkierung M_0 für Netze interessant
- Wert $w := \vec{s} \cdot M$ während des Laufes für alle erreichbaren Markierungen M gleich
- Liefert notwendiges strukturelles Kriterium für die erreichbaren Markierungen

Invariante I_2 Testen

Plätze	nehmen (t_n)	ablegen (t_a)	M_0	$\vec{s}_1$	$\vec{s}_2$
denkend	$-x$	x	$p_0 + \ldots + p_4$	y	$r(y) + l(y)$
verfügbar	$-(l(x) + r(x)$	$l(x) + g(x)$	$g_0 + \ldots + g_4$	0	$-z$
essend	x	$-x$	ϵ	y	0

Für alle $t \in T$ gilt: $\vec{s} \cdot \vec{t} = 0$

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{t}_n = 0 \text{ und } \vec{s}_1 \cdot \vec{t}_a = 0$$

$$t_n : (l(y) + r(y)) \circ -x + \; - y \circ -(l(x) + r(x)) = 0 \checkmark$$

$$t_a : (l(y) + r(y)) \circ x + \; - y \circ (l(x) + r(x)) = 0 \checkmark$$

Weiter

Platz-Invarianten III

Corollary 5

Sind $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ Platz-Invarianten für ein Petrinetz N, so sind auch $\vec{s}_1 \oplus \vec{s}_2$ Platz-Invarianten für N.

Weiter

Literatur

- Reisig, Wolfgang: Petri nets and algebraic specification. Journal of Theoretical Computer Science, 1991.
- Reisig, Wolfgang: Petrinetze. Eine neue Einführung. 2008.
- Smith, Einar: Principles of High-Level Net Theory. Technischer Bericht, 1991.