



Beweisgraphen 1

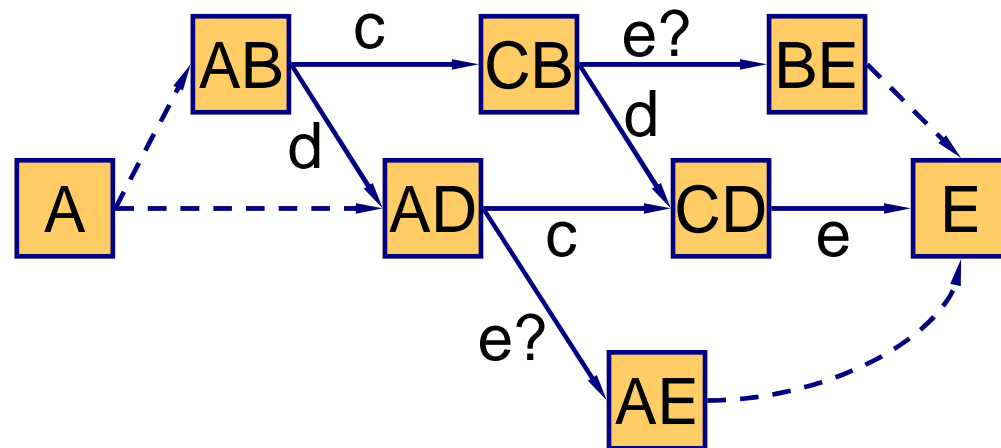
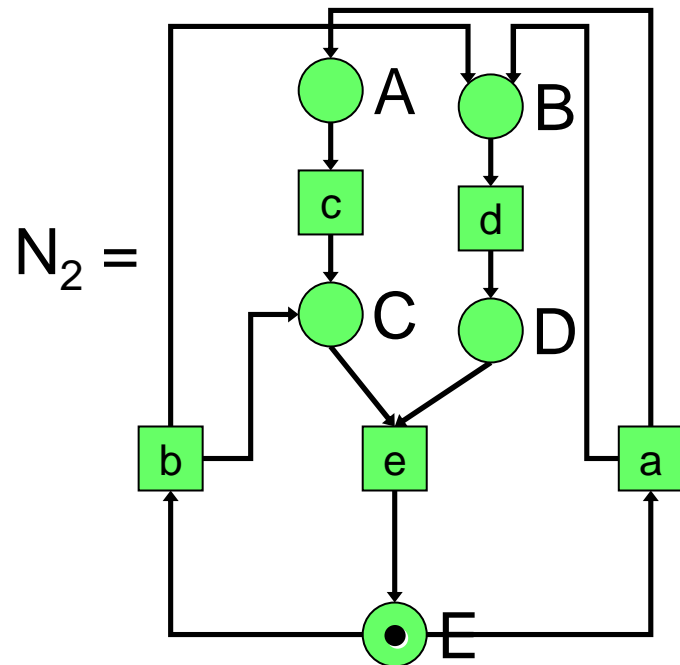
Seminar: Analyse von Petrinetzmodellen
WS 2007/08

Dozent: Peter Massuthe
Vortrag: Mike Herzog

Beweisgraphen - aber wozu?

- Betrachten **Verhalten** von Petrinetzen
 - Normalerweise Modelchecking
 - Häufig Formeln der Form **$G(p \rightarrow Fq)$**
- Mit Beweisgraphen effizienter möglich

Beweisgraphen - Beispiel



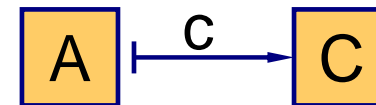
Beweisgraph für $N_2 \models A \mapsto E$

Beweisgraphen - Eigenschaften

- gerichteter Graph G (genauer: „Netzwerk“) mit je einer ausgezeichneten Quelle p und einer Senke q
- Knoten sind Zustandsformeln in N
- Kantenbeschriftungen sind Transitionen in N
- enthält min 1 Pfad von p nach q
- kreisfrei, zusammenhängend
- bildet Halbordnungsrelation
- Für jeden Knoten r mit den Nachfolgern r_1, r_2, r_3, \dots
gilt: $r \mapsto (r_1 \vee r_2 \vee r_3 \vee \dots)$

Leads-to Formeln

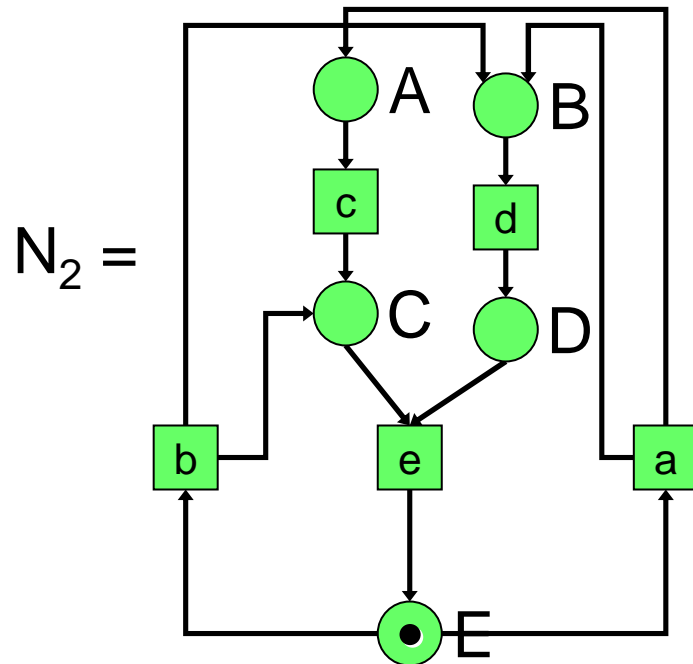
Zustandsformeln p



Sagen

- $M \models p$ („die Markierung M erfüllt p “), gdw. $M(p) \geq 1$
- $w \models p \mapsto q$ („der Ablauf w erfüllt p leads-to q “), gdw.
Zu jedem i mit $M_i \models p$ existiert ein j mit $j \geq i$ und $M_j \models q$
- $N \models p \mapsto q$ („das Netz N erfüllt p leads-to q “), gdw.
Jeder Ablauf w des Netzes gilt $w \models p \mapsto q$

Leads-to Formeln - Beispiele



$$N_2 \models A \mapsto C$$

$$N_2 \models AB \mapsto CD$$

$$N_2 \models A \mapsto E$$

$$N_2 \models D \mapsto D$$

$$\neg AB \mapsto AD$$

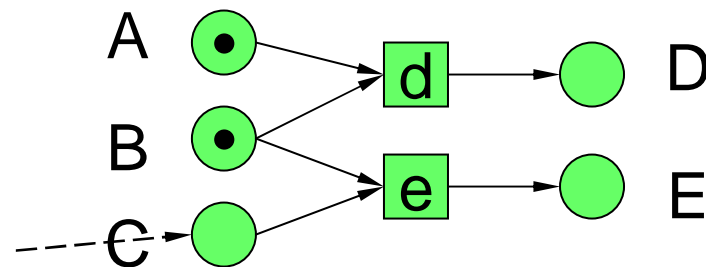
Effekt einer Transition auf eine Markierung - Beispiel

Teilmarkierung

- Wissen oft nicht über gesamtes Netz Bescheid.
- Ist unter Umständen nicht nötig.

„Effekt von t auf L“ am Beispiel

- $eff(AB, d) = D$
- $eff(AB, e) = AE$



Effekt einer Transition auf eine Markierung - Definition

Definition: Sei $N = (P, T, F)$ ein Netz, sei $t \in T$ und sei L eine Markierung. Dann ist die Markierung $eff(L, t) := \max(L(p) + t(p), 0)$ der Effekt von t auf L .

Lemma: Sei $N = (P, T, F)$ ein Netz, sei $t \in T$, sei $M \xrightarrow{t} M'$ ein Schritt von N und sei $L \leq M$. Dann gilt:

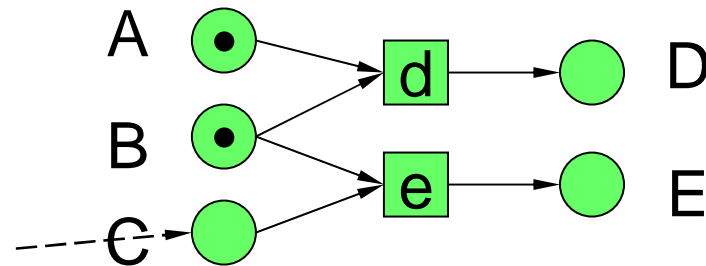
1. $eff(L, t) \leq M'$.
2. Falls $L = M$, gilt $eff(L, t) = M'$

Die Pick-up Regel - Idee

Lemma: $N \models \bullet t \mapsto \bigvee_{u \in (\bullet t) \bullet} \text{eff}(\bullet t, u)$

$N \models AB \mapsto D \vee AE$

$N \models \bullet d \mapsto \text{eff}(\bullet d, d) \vee \text{eff}(\bullet d, e)$



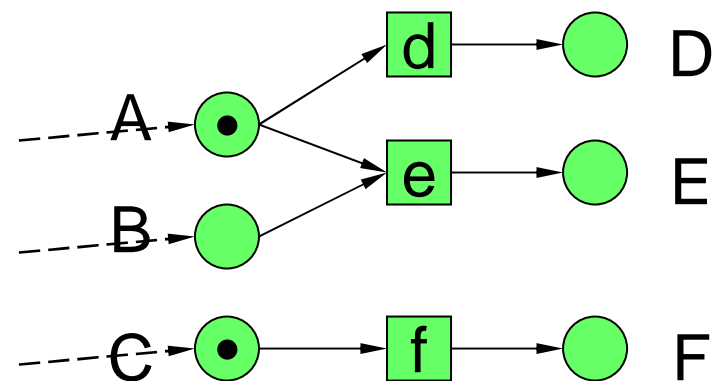
Die Pick-up Regel - Erweitert

Lemma: $N \models \bullet t \mapsto \mathbf{V}_{u \in (\bullet t) \bullet} \text{eff}(\bullet t, u)$

$AC \mapsto \dots$ nicht mit Lemma ableitbar,
da für kein t gilt $AC = \bullet t$.

Es gilt aber dennoch
 $N \models AC \mapsto (CD \vee CE \vee AF)$

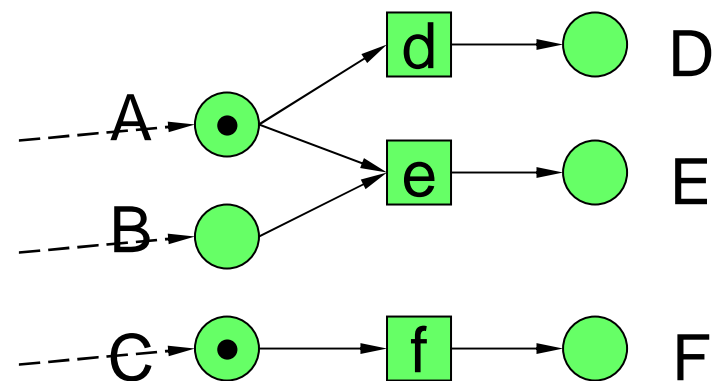
Beobachtung:
AC ist „*progress prone*“



Die Pick-up Regel - Allgemeiner

Lemma: $N \models \bullet t \mapsto \forall_{u \in (\bullet t) \bullet} \text{eff}(\bullet t, u)$

Allgemeineres Lemma: Sei $N = (P, T, F)$ ein Netz, sei $Q \subseteq P$ progress prone. Dann gilt
 $N \models Q \mapsto \forall_{u \in Q \bullet} \text{eff}(Q, u)$.



Die Pick-up Regel - Beispiel

Allgemeineres Lemma: $N \models Q \mapsto \mathbf{V}_{u \in Q} \bullet \text{eff}(Q, u)$

$N \models Q \mapsto \mathbf{V}_{u \in Q} \bullet \text{eff}(Q, u)$

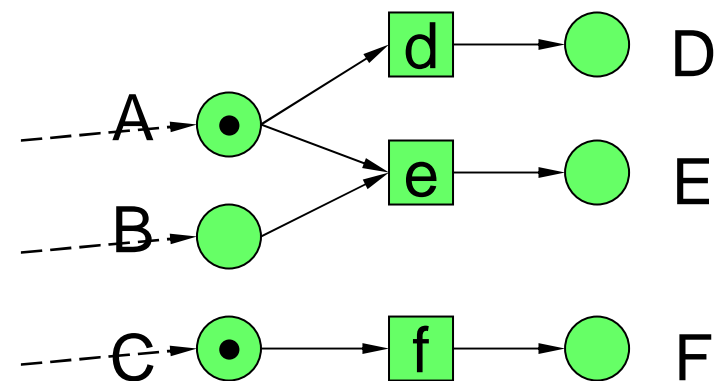
mit $Q = \{AC\}$

$N \models AC \mapsto \mathbf{V}_{u \in AC} \bullet \text{eff}(AC, u)$

mit $AC \bullet = \{d, e, f\}$

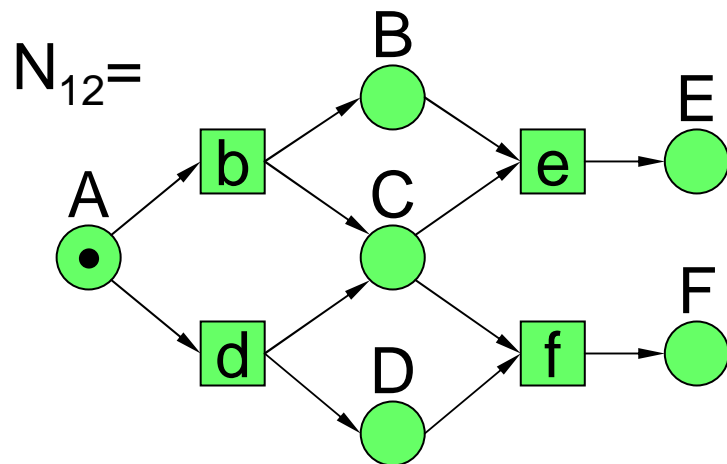
$N \models AC \mapsto \text{eff}(AC, d) \vee \text{eff}(AC, e) \vee \text{eff}(AC, f)$

$N \models AC \mapsto CD \vee CE \vee AF$



Die Pick-up Regel - (cont.)

Allgemeineres Lemma: $N \models Q \mapsto \forall_{u \in Q} \bullet \text{eff}(Q, u)$



Nach Lemma: $BC \mapsto E \vee BF$.
Wissen aber, dass $BC \rightarrow \neg D$.

Lösung: lösche
„*verhinderte Transitionen*“
aus Q •

Die Pick-up Regel

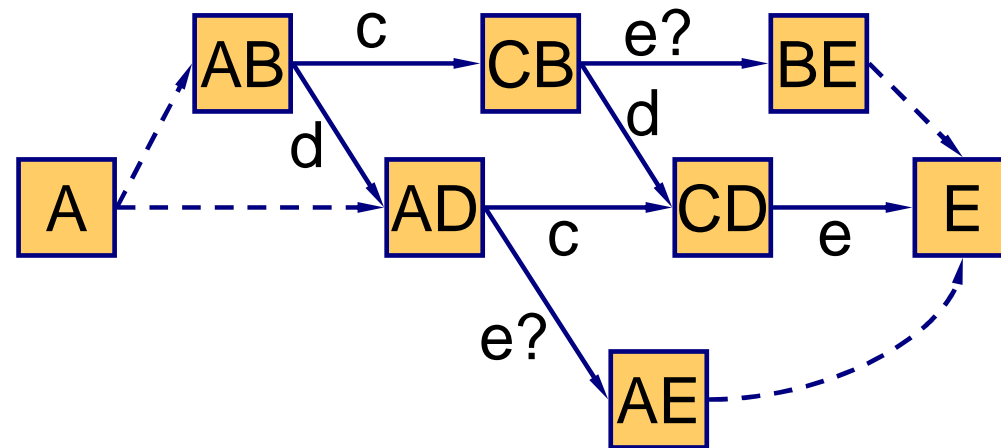
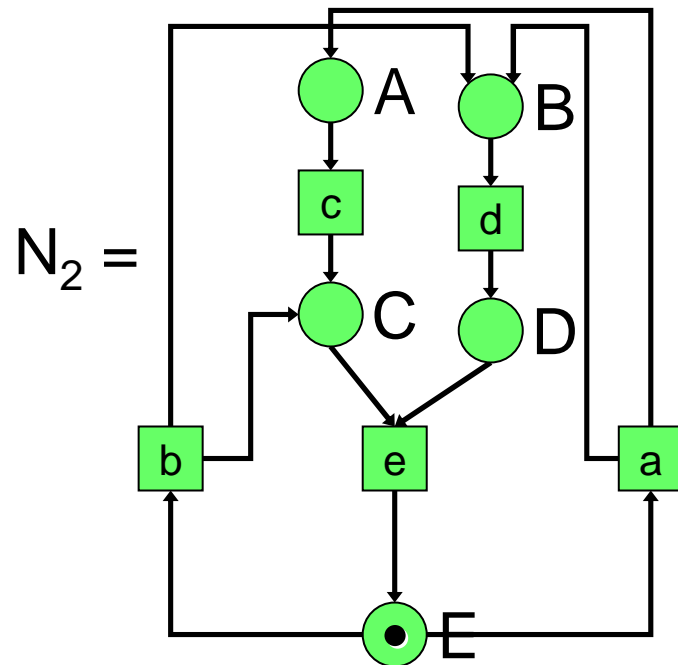
Gegeben: Sei $N = (P, T, F, M_0)$ ein Netz, sei $Q \subseteq P$.

Gesucht: $N \models Q \mapsto \dots$

Lösung:

1. Aktiviert Q eine Transition?
(*Wenn nicht, ist keine Formel ableitbar.*)
2. Setze $U := Q \bullet$
3. Nach belieben: Wenn Q die Transition t verhindert, entferne t aus U
4. Es gilt: $N \models Q \mapsto \bigvee_{u \in U} \text{eff}(Q, u)$

Beweisgraphen - Ende 1. Teil



Beweisgraph für $N_2 \models A \mapsto E$