Formulieren und Argumentieren

Karsten Schmidt

16. Oktober 2002

Zusammenfassung

Wir klären die Bedeutung bestimmter Kategorien und Wendungen in der mathematischen Fachsprache der Informatik sowie Grundtechniken zum schlüssigen Argumentieren.

1 Aussagen

Eine Aussage ist eine sprachliche Widerspiegelung eines Sachverhalts, z.B. in Form eines Satzes in der natürlichen Sprache. Aussagen erkennt man daran, daß sie einen *Wahrheitsgehalt* besitzen, also entweder *wahr* oder *falsch* sind. Die Sätze *„Eins plus eins ist zwei“* und *„Eins plus eins ist drei“* sind demnach Aussagen, während *„Berechne Eins plus eins!“* und *„Wieviel ergibt eins plus eins?“* keine Aussagen sind, weil sie keine Sachverhalte darstellen und ihnen auch nicht sinnvoll ein Wahrheitsgehalt zugeordnet werden kann.

Zur Klassifizierung einer Äußerung als Aussage ist es unerheblich, ob wir den Wahrheitsgehalt der Aussage kennen, oder in der Lage sind, ihn zu bestimmen. Demnach war auch schon vor 100 Jahren die Äußerung *„Es gibt für $n \geq 3$ keine ganzzahligen positiven Lösungen der Gleichung $x^n + y^n = z^n$“* eine Aussage, obwohl ihr Wahrheitsgehalt erst in den 90er Jahren des 20. Jahrhunderts endgültig ermittelt werden konnte.

Weiterhin gibt es viele Äußerungen, deren Wahrheitsgehalt von einem bestimmten Kontext abhängt, also davon, wer sie wann, wem gegenüber, wo, warum, wie usw. getätigt hat. Beispiele: *„Heute ist Montag“*, *„Ich bin im Kino“*, *„Das Stück hat dir gefallen“*, *„Ich mag nicht mitkommen, weil ich Kopfschmerzen habe“*. Solche Äußerungen wollen wir nur insoweit als Aussagen anerkennen, wie der relevante Kontext ohne mögliche Mißverständnisse bekannt ist.

Aussagen stehen im Mittelpunkt aller fachsprachlichen Äußerungen. Sie erscheinen z.B. als Fakten und Abläufe in einem Kundenunternehmen, die zu notieren sind, Anforderungsspezifikationen in einem Pflichtenheft, Schnittstellenspezifikationen, Theoreme, Thesen, usw. In den meisten Fällen dienen sie der Kommunikation von Wissen. Es ist daher wichtig, daß Aussagen so formuliert werden, daß der widergespiegelte Sachverhalt unabhängig von der schreibenden/sprechenden oder lesenden/hörenden Person der gleiche ist. Zu diesem Zweck bedienen wir uns einer in der Mathematik gewachsenen, und dort bewährten, Kultur und Disziplin im Umgang mit Aussagen. Zu den Kernpunkten dieser Kultur gehören unter anderem:

- Exakte Festlegungen über die Bedeutung von Formulierungen und Begriffen;
- Die Anerkennung von Aussagen als *wahre* Aussagen nur auf der Grundlage einer vollständigen und schlüssigen Argumentation (einem Beweis).

2 Aussagenverbindungen

Für den gesamten Verlauf der Vorlesung ist es wichtig, Aussagen als Gebilde zu akzeptieren, mit denen man „rechnen“ kann, wie etwa mit arithmetischen Termen und Gleichungen. Insbesondere kann man elementare Aussagen zu komplexen Aussagen verbinden sowie komplexe Aussagen in elementare Aussagen zerlegen. Wir wollen an dieser Stelle einige für das vor uns liegende Semester zentrale Aussagenverbindungen kennenlernen und ihre Bedeutung festlegen.

2.1 Negation

Wenn H eine Aussage ist, so ist *nicht* H, die Negation von H, ebenfalls eine Aussage.

Das Wort *nicht* muß dabei nicht unbedingt am Anfang der sprachlichen Widerspiegelung von H stehen, es muß sich lediglich auf H beziehen.

Beispiele: Die Negation von *„Eins plus eins ist drei“* ist *Eins plus eins ist nicht drei* oder *„es ist nicht richtig, daß eins plus eins zwei ist“* (nicht etwa: *„eins plus eins ist zwei“*!!!). Die Negation von *„Die Katze ist schwarz“* ist *„Die Katze ist nicht schwarz“* oder *„die Farbe der Katze ist verschieden von schwarz„* (nicht etwa: *„die Katze ist weiß“*). Wendungen wie „ist verschieden von“ als Negationen zu erkennen obliegt dem hier vorausgesetzten gesunden Menschenverstand.

Der Wahrheitsgehalt einer negierten Aussage ist immer verschieden vom Wahrheitsgehalt der Originalaussage. Wir fassen dies in einer sogenannten Wahrheitstabelle zusammen.

H	*nicht* H
wahr	falsch
falsch	wahr

2.2 Konjunktion

Wenn H_1 und H_2 Aussagen sind, so auch die Äußerung „H_1 *und* H_2“. Diese bereitet den Wenigsten irgendwelche Schwierigkeiten, so daß wir es bei der Angabe der Wahrheitstabelle belassen können.

H_1	H_2	H_1 *und* H_2
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	falsch

2.3 Disjunktion

Wenn H_1 und H_2 Aussagen sind, so auch dieÄußerungen H_1 *oder* H_2 sowie *entweder* H_1 *oder* H_2. Im Alltag kann mit der Wendung *oder* Verschiedenes gemeint sein. Die gebräuchlichsten Interpretationen sind:

- mindestens eine der Teilaussagen ist wahr;
- genau eine der Teilaussagen ist wahr;
- höchstens eine der Teilaussagen ist wahr.

Welche Interpretation der Sprecher meint, muß man entweder nach Plausibilität aus dem Inhalt der Aussage schließen, oder nachfragen. Diese Mehrdeutigkeit ist für unsere Fachsprache inakzeptabel. Wir werden also für alle Zeit folgendes verabreden. Meinen wir die erste Interpretation, verwenden wir *oder*. Meinen wir die zweite Interpretation, verwenden wir *entweder, oder*. Die dritte Interpretation drücken wir ganz ohne Verwendung des Wortes oder aus, nämlich mit Hilfe von *nicht* und *und*: „Es ist nicht richtig, daß H_1 und H_2 wahr sind“. Ab jetzt sind also keine Mißverständnisse in der Interpretation von *oder* mehr möglich.

H_1	H_2	H_1 *oder* H_2	*entweder* H_1 *oder* H_2	*nicht sowohl* H_1 als auch H_2
wahr	wahr	wahr	falsch	falsch
wahr	falsch	wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch	falsch	wahr

2.4 Implikation

Wenn H_1 und H_2 Aussagen sind, so auch die Äußerung *wenn* H_1, *dann/so* H_2. Diese Äußerung führte in den vergangenen Jahren des Öfteren zu Mißverständnissen, daher gleich die ab jetzt verbindliche Deutung:

H_1	H_2	*wenn* H_1 *dann* H_2
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	wahr

Unter der Voraussetzung, daß H_1 richtig ist, soll auch H_2 richtig sein. Oder: H_2 ist eine Schlußfolgerung aus H_1. Oder: In denjenigen Situationen, wo H_1 wahr ist, ist auch H_2 wahr (während in denjenigen Situationen, wo H_1 nicht wahr ist, nichts über H_2 verlangt wird).

Nehmen wir ein paar der üblichen Mißdeutungen auseinander. Die erste Mißdeutung akzeptiert, frei nach dem Motto „wichtig ist, was hinten herauskommt“ eine Schlußfolgerung nur dann, wenn die geschlußfolgerte Aussage (H_2) wahr ist, egal unter welchen Voraussetzungen. Dies entspräche der Tabelle

H_1	H_2	Mißdeutung 1 von wenn/dann
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
falsch	falsch	falsch

Damit würde aber die Verbindung wenn/dann keinen Sinn ergeben, denn ihr Wahrheitsgehalt entspräche ja genau dem der zweiten Teilaussage. Der beste Weg, Frieden mit Schlüssen aus falschen Voraussetzungen zu schließen ist der, sich die Voraussetzung H_1 im Konjunktiv vorzustellen: Wenn $1 = 2$ wäre, dann wäre $2 = 4$ (eine Instanz des für alle Zahlen x, y und z gültigen Schlusses Wenn $x = y$, dann $x \cdot z = y \cdot z$ mit $x = 1$ und $y = z = 2$, in der beide Teilaussagen falsch sind). Oder: Wennn 1= 2 wäre, dann wäre 0 = 0 (eine weitere Instanz mit $x = 1$, $y = 2$ und $z = 0$, wo die linke Teilaussage falsch, die rechte aber wahr wird).

Die zweite Fehldeutung wünscht sich in der 3. Zeile der Wahrheitstabelle ein falsch: Schlüsse dürfen den Wahrheitsgehalt nicht beeinflussen. Abgesehen vom eben genannten Beispiel ist hierzu zu sagen, daß wir dieser Situation eine eigene Wendung geben wollen, die im nächsten Abschnitt zu besprechende Äquivalenz.

Die dritte Gruppe akzeptiert Schlüsse nur dann, wenn ein kausaler Zusammenhang zwischen Voraussetzung (H_1) und Behauptung (H_2) erkennbar ist. Die nach unserer Vereinbarung wahre Aussage *wenn die Erde eine Scheibe ist, dann hat es im Radsport nie Doping gegeben* wird intuitiv oft schwer als wahr akzeptiert. In der Tat wird in der Alltagssprache mit der wenn/dann-Konstruktion ein kausaler Zusammenhang suggeriert. Für den Gebrauch in der Fachsprache wollen wir aber *festlegen*, daß der Wahrheitsgehalt unabhängig von Kausalitäten nur vom Wahrheitsgehalt der Teilaussagen abhängt. Dies ist einfach praktisch, weil sich kausale Zusammenhänge schwerer zweifelsfrei nachweisen lassen als der Wahrheitsgehalt von Teilaussagen.

2.5 Äquivalenz

Wenn H_1 und H_2 Aussagen sind, so auch die Äußerung „H_1 genau dann, wenn H_2“. Diese hat, wie im vorigen Abschnitt versprochen, die Tabelle

H_1	H_2	H_1 *genau dann, wenn* H_2
wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
falsch	falsch	wahr

2.6 Schlußbemerkungen

Die genannten Wendungen bilden das Grundgerüst logischen Handwerks. Wir werden ihnen später in der Vorlesung das komplette Kapitel *Aussagenlogik* widmen. Bis hierhin ist es erstmal wichtig, die Wendungen zu kennen und ausschließlich entsprechend der vereinbarten Bedeutung zu benutzen. Die exklusive Behandlung soll suggerieren, daß die Wendungen zentrale Bedeutung in der Fachsprache haben. Daher ist es für von Dir anzufertigende Arbeiten (Mitschriften, Hausaufgaben, Klausuren) wichtig, die Wendungen auch explizit zu verwenden und sie nicht durch Kommata, Lücken oder anderweitig herabzuwürdigen.

3 Namen

In den meisten relevanten Aussagen werden Objekte, Kategorien, Beziehungen und anderes oft mittels Namen („x“, „Aussage“, „Primzahl“, „ungerade“, „teilbar“) oder Zeichen („0“, „$\geq$“, „+“) angesprochen. Auch Zeichen wollen wir als Namen ansehen. Wir unterscheiden zwei Klassen von Namen, nämlich Namen für *bestimmte* (eindeutig festgelegte) Objekte/Beziehungen/Kategorien usw. sowie Namen für *unbestimmte* (variable) Objekte/Beziehungen/Kategorien. In der Regel erkennt man die Natur eines Namens daran, ob er bei seiner Einführung (d.h. der ersten Erwähnung in einer Abhandlung) mit bestimmtem oder mit unbestimmtem Artikel verwendet wird. Beispiele. „*Die* Relation Teilbarkeit besteht zwischen *einer* von *der* Zahl Null verschiedenen ganzen Zahl x und *einer* von *der* Zahl Null verschiedenen ganzen Zahl y, wenn es *eine* ganze Zahl k gibt mit $x \cdot k = y$“. Die Teilbarkeitsrelation ist demnach eine *bestimmte* Beziehung zwischen ganzen Zahlen, es ist also genau festgelegt, welche Zahlen in dieser Beziehung stehen und welche nicht. Ebenso ist die Zahl Null eine ganz bestimmte, ein für allemal feste Zahl. Dagegen sind x, y und k Unbestimmte, d.h. sie stehen stellvertretend für eine ganze Klasse bestimmter Objekte, in diesem Fall für beliebige von Null verschiedene ganze Zahlen. Zu beachten ist, daß Namen für Unbestimmte nur bei ihrer erstmaligen Erwähnung mit dem unbestimmten Artikel versehen sind, bei jeder weiteren Erwähnung dagegen mit dem bestimmten Artikel: „Sei k *eine* Primzahl. Dann ist *die* Zahl k nur durch (die Zahl) 1 und (die Zahl) k teilbar.“ Das hat folgende Bewandnis. Der unbestimmte Artikel bei der ersten Verwendung signalisiert die Unbestimmtheit des Objekts (in unserem Fall k). k steht also stellvertretend für irgendeine Primzahl. Nun würde die Aussage aber völlig sinnlos werden, wenn bei den drei Erwähnungen in der betrachteten Aussage k jeweils stellvertretend für verschiedene Primzahlen stehen würde. Wir meinen doch, daß jede Erwähnung von k ein zwar nicht näher bestimmtes, aber an allen Stellen der obigen Aussage doch ein und dasselbe Objekt bezeichnet. Wir stellen uns also vor, daß nach einmaliger Wahl von k (durch „sei k eine Primzahl“) der Wert von k unveränderlich immer dem einmal gewählten Wert entspricht. In allen Erwähnungen von k außer der ersten trägt also k den Charakter einer Bestimmten und wird deshalb auch mit dem bestimmten Artikel verwendet. Dieser Gedankengang spiegelt sich auch in einer in der Mathematik gängigen Formulierung wider: „Sei k eine beliebig, aber fest gewählte Primzahl“.

Viele Verständnisfragen in der vor uns liegenden Vorlesung lassen sich leicht klären, wenn der Charakter eines Namens als bestimmt/unbestimmt richtig erkannt wird. Ich rate deshalb dazu, erstens den Gebrauch von unbestimmten und bestimmten Artikeln in der Fachliteratur detailliert zu analysieren (auch wenn die diskutierten Regeln in manchen Fällen aufgrund von Schlampigkeit oder grammatikalischer Gegebenheiten in Ausnahmefällen verletzt sind), zweitens sich genau Rechenschaft über die Bestimmtheit von Begriffen abzulegen, und drittens in eigenen Ausarbeitungen die genannten Regeln zur Verwendung von Artikeln streng zu exerzieren.

3.1 Definitionen

Definitionen dienen dazu, neue Begriffe zu bilden. Eine Definition ordnet einem Begriff eine Begriffsbestimmung zu. Diese Bestimmung ist vom Moment der Definition an verbindlich als Bedeutung des definierten Begriffs, unabhängig davon, welche intuitive Bedeutung jemand bisher mit dem Begriff verband. Um Konfusion zu vermeiden, gehört es sich nicht, einen bereits definierten Begriff mit einer neuen Bestimmung zu versehen, also „umzudefinieren“. Die in einer Definition gebildeten Begriffe sind in aller Regel bestimmte Begriffe. Es ist deshalb, entgegen der landläufigen Meinung, daß man definieren kann, was man will, mitunter notwendig, eine Definition zu *rechtfertigen*. Eine Rechtfertigung einer Definition ist eine schlüssige Argumentation darüber, daß die in der Definition enthaltene Bestimmung konsistent und eindeutig ist. Eine Bestimmung ist konsistent, wenn es das durch die Bestimmung festgelegte „Ding“ (Objekt, Kategorie, Beziehung usw.) überhaupt gibt, sie ist eindeutig, wenn nicht mehrere verschiedene “Dinge“ auf die Bestimmung passen. Zum Bespiel wäre die Bestimmung der Zahl „Zwünf“ als „diejenige Zahl, die kleiner als 3 und größer als 5 ist“ inkonsistent, während ihre Bestimmung als „diejenige Zahl, die kleiner als 17 und größer als 3 ist“, uneindeutig ist. Streng genommen ist eine solche Rechtfertigung für jede Definition notwendig, die einen bestimmten Begriff festlegt, in den allermeisten Fällen liegt die Konsistenz und Eindeutigkeit aber unmittelbar auf der Hand, so daß auf eine explizite Rechtfertigung verzichtet wird. Achtung ist jedoch geboten, denn inkonsistente oder mehrdeutige Definitionen sind potentielle Fehlerquellen.

Die in einer Definition verwendete Bestimmung enthält normalerweise wieder Begriffe. Sind diese Begriffe sämtlich im Vorfeld mit einer Definition versehen worden, sind wir auf der sicheren Seite, was die Sinnhaftigkeit des neu definierten Begriffs angeht. Eine solche Definition nennen wir *explizite* Definition. Es gibt aber auch Definitionen, in denen nicht alle zur Bestimmung verwendeten Begriffe vorher definiert sind. Dies birgt arge Konsistenzprobleme, speziell dann, wenn die gegenseitige Verwendung von Begriffen in Begriffsbestimmungen zyklisch wird. Dennoch sind implizite Definitionen gängig und in der vor uns liegenden Vorlesung zum Teil von zentraler Bedeutung. Sie begegnen uns ausschließlich in der Form, daß der zu definierende Begriff in seiner eigenen Begriffsbestimmung verwendet wird. Daß ein implizit definierter Begriff eindeutig und konsistent ist, ist normalerweise nicht offensichtlich. Hier findet man dann in der Tat Rechtfertigungen. Ein einfaches Beispiel für eine implizite Definition ist die folgende für die Zahl „Wurzelzwei“: *Wurzelzwei ist diejenige reelle Zahl, die die folgenden beiden Eigenschaften besitzt: Erstens ist Wurzelzwei größer als Null und zweitens ergibt das Produkt von Wurzelzwei mit sich selbst die Zahl zwei.* Der zu definierende Begriff (Wurzelzwei) ist also Bestandteil seiner eigenen Begriffsbestimmung. Trotzdem ist diese Definition konsistent und eindeutig, und Mathematiker sind durchaus in der Lage diese Tatsache auch zu belegen.

3.2 Aussageformen

Tauchen in einer sprachlichen Konstruktion Unbestimmte auf, kann es gut sein, daß es sich dabei um keine Aussage handelt. Steht zum Beispiel x als Unbestimmte für einen der Werte 0,1,2,3,4 oder 5, so ist die Formulierung $x < 3$ keine Aussage, denn je nachdem, welchen der 6 möglichen Werte x annimmt, wird die Formulierung wahr oder falsch.

Jede Äußerung, die zu einer Aussage dadurch wird, daß ggf. vorkommende Unbestimmte durch einen der durch sie repräsentierten Werte ersetzt wird, nennen wir Aussageform. Auch Aussagen sind demnach spezielle Aussageformen, in denen Null Unbestimmte ersetzt werden müssen, um ihren Wahrheitsgehalt zu fixieren.

Es gibt allerdings Situationen, in denen einer Äußerung trotz vorkommender Unbestimmter ein Wahrheitsgehalt zugewiesen werden kann, ohne die Unbestimmte durch irgendwelche durch sie repräsentierte Werte zu ersetzen. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn wir die obige Aussage ergänzen zu: „es gibt ein x mit $x < 3$“, „es gibt genau ein x mit $x < 3$“ oder „für alle x ist $x < 3$“. Ohne zu zögern erkennen wir die erste Aussage als falsch und die anderen beiden als richtig an. Eine Ersetzung von x in diesen Aussagen führt zu Unsinn wie „es gibt eine 1 mit $1 < 3$“. Daß dies Unsinn ist, erkennt man schon an der Verwendung des unbestimmten Artikels für die immer noch als eindeutig festgelegt geltende 1. Solche Sprachmuster, die sich auf eine Unbestimmte dahingehend beziehen, daß anstatt über einen konkret Wert über die Gesamtheit der durch die Unbestimmte repräsentierten Werte gesprochen wird, nennen wir *Quantifizierungen* (es geht um die *Zahl* der durch die Unbestimmte repräsentierten Objekte, nicht mehr um ein einzelnes Obkekt). Wir werden im Verlauf der Vorlesung nur die drei Quantifizierungen „es gibt ein“, „für alle“ und „es gibt genau ein“ verwenden. In einem Ausnahmefall kommt noch eine Konstruktion mit “diejenigen x, die...“ hinzu. Dabei legen wir fest, daß wir unter „es gibt ein“ grundsätzlich „es gibt *mindestens* ein“ verstehen wollen. Ansonsten gibt es kaum Mißverständnisse in der Interpretation dieser Wortgruppen.

Eine sprachliche Konstruktion, in der es ausschließlich Unbestimmte gibt, auf die sich auch Quantifizierungen beziehen, ist eine Aussage. Um eine Aussageform zu einer Aussage zu machen, sind nur solche Unbestimmte durch konkrete Werte zu ersetzen, auf die sich keine Quantifizierung bezieht. Eine andere Möglichkeit, eine Aussageform in eine Aussage zu verwandeln ist, weitere Quantifizierungen zu ergänzen. Um Mißverständnisse zu vermeiden, ist es ratsam, jede Unbestimmte zu quantifizieren. Dadurch können Unklarheiten in Bezug auf die Rolle einer Unbestimmten ausgemerzt werden.

Wenn wir unbestimmt über eine Aussageform sprechen, in der die Variable x vorkommt, ohne daß sich auf sie eine Quantifikation bezieht, schreiben wir dies als $H(x)$. Kommen z.B. drei Unbestimmte x, y und z vor, schreiben wir analog $H(x, y, z)$.

Ein paar Verständnisprobleme gibt es im Umgang mit mehreren Unbestimmten für die gleiche Klasse. Nehmen wir an, wir haben drei Unbestimmte x, y, z in einer Aussage, z.B. „$x + y = z$“, von denen jede für eine der Zahlen 1,2 oder 3 steht. Dann gibt es eben nicht nur die folgenden 6 Möglichkeiten, diese Unbestimmten durch konkrete Werte zu ersetzen: $(x = 1, y = 2, z = 3)$, $(x = 1, y = 3, z = 2)$, $(x = 2, y = 1, z = 3)$, $(x = 2, y = 3, z = 1)$, $(x = 3, y = 1, z = 2)$, $(x = 3, y = 2, z = 1)$, die jeder sofort akzeptiert, sondern sage und schreibe 21 weitere Möglichkeiten, die gleichberechtigt zu diesen 6 in Betracht gezogen werden müssen:
$(x = 1, y = 1, z = 1)$, $(x = 1, y = 1, z = 2)$, $(x = 1, y = 1, z = 3)$, $(x = 1, y = 2, z = 1)$, $(x = 1, y = 2, z = 2)$, $(x = 1, y = 3, z = 1)$, $(x = 1, y = 3, z = 3)$, $(x = 2, y = 1, z = 1)$, $(x = 2, y = 1, z = 2)$, $(x = 2, y = 2, z = 1)$, $(x = 2, y = 2, z = 2)$, $(x = 2, y = 2, z = 3)$, $(x = 2, y = 3, z = 2)$, $(x = 2, y = 3, z = 3)$, $(x = 3, y = 1, z = 1)$, $(x = 3, y = 1, z = 3)$, $(x = 3, y = 2, z = 2)$, $(x = 3, y = 2, z = 3)$, $(x = 3, y = 3, z = 1)$, $(x = 3, y = 3, z =$

2) und ($x = 3, y = 3, z = 3$). Also: Gleiche Unbestimmte - gleicher Wert, verschiedene Unbestimmte - verschiedener oder gleicher Wert!

3.3 Zwischenfazit

Wir haben bis hierhin eine Reihe von Vereinbarungen getroffen, wie wir bestimmte Sprachmuster interpretieren wollen. Daß wir gerade diese Muster festlegen, zeigt schon, daß sie im weiteren Verlauf der Vorlesung und des Studiums eine herausgehobene Rolle spielen werden. Es ist deshalb in mündlichen und schriftlichen Äußerungen äußerst wichtig, diese Sprachmuster gezielt (d.h. ihrer festgelegten Bedeutung entsprechend) einzusetzen. Solche Formulierungen sind bei Weitem nicht immer die ästhetischsten, oder gar coolsten, erlauben aber nach einer kurzen Eingewöhnungszeit einen Grad an Präzision (mit wenig verbalem Aufwand), der weitaus ärmer an möglichen Mißverständnissen ist als alles „ich sag mal“, „über den Daumen gepeilt“, und „wenn ich mich nicht irre“. Schauen Sie sich die Sprachregelungen in der Vorlesung und bei den Übungsleitern ab, trainieren Sie sie in Gruppenarbeit und testen Sie Ihre Fertigkeiten per Mitarbeit in den Übungen sowie in den durch Sie anzufertigenden Arbeiten. Stellen Sie vor allem die logische Struktur Ihrer Aussagen explizit dar, indem Sie schon sprachlich bestimmte und unbestimmte Sachverhalte korrekt kennzeichnen, die richtigen Aussagenverbindungen (z.B. oder/entweder oder) benutzen (und hinschreiben) und Unbestimmte geeignet quantifizieren.

4 Argumentieren

Wahre Aussagen nennen wir *Sätze* oder *Theoreme*. Mit der Ausweisung einer Aussage als Satz geht die Verpflichtung eines Beweises dieser Aussage einher. Sätze, die nur von vorübergehender Bedeutung sind (z.B. als Zwischenschritte im Beweis einer anderen Aussage) nennen wir *Hilfssatz* oder *Lemma*. Auch hier besteht die Verpflichtung zu einem Beweis.

Aussagen, von deren Wahrheit wir überzeugt sind, aber für die wir keinen Beweis erbringen können (oder wollen), nennen wir *Thesen*. Aussagen, deren Wahrheit wir nicht beweisen, sondern ***postulieren***, heißen Axiome. Axiome dienen der Begründung von Theorien. Alle in der Theorie abgeleiteten Aussagen stehen unter dem Vorbehalt, daß die zugrundeliegenden Axiome tatsächlich wahr sind, d.h. sie gelten nur in einem Kontext, in dem die Axiome erfüllt sind. Nimmt man als Axiom z.B. „die Innenwinkelsumme eines Dreiecks beträgt 180 Grad“, so sind daraus abgeleitete Theoreme in der Ebene gültig, aber auf Kugeloberflächen nicht gültig (weil dort das Axiom nicht erfüllt ist).

In diesem Abschnitt geht um Techniken, wie man Aussagen beweisen kann. Ein Beweis ist eine stichhaltige, vollständige und folgerichtige Argumentation über die Korrektheit einer Aussage. Unter „stichhaltig“ wollen wir für den Moment verstehen, daß auch ein uns übel gesonnener Leser die Argumentation akzeptieren muß, wenn er sich nicht lächerlich machen will. Mindestanforderungen sind dabei erstens, daß jedes einzelne Argument begründet und abgesichert ist und zweitens, daß die Argumentation alle Fälle, auch die abartigen, abdeckt. Es reicht also nicht, zum Beweis der Aussage „Alle ungeraden Zahlen sind Primzahlen“ die ersten 4 Fälle (1,3,5,7) und ein paar zufällig gewählte (19,29,97) vorzurechnen.

Wir wollen im folgenden ein paar Grundtechniken zum Analysieren und zum Finden von Beweisen kennenlernen. Dazu ist es wichtig zu verstehen, daß in einem Beweis zwei Sorten von Aussagen eine Rolle spielen: Voraussetzungen/Annahmen auf der einen und Beweisverpflichtungen/Behauptungen auf der anderen Seite. Zu Beginn eines Beweises bildet die zu beweisende Aussage eine Beweisverpflichtung, und es gibt zunächst keine Voraussetzungen. Im Verlauf einer Argumentation verändern sich die Verhältnisse zwischen Voraussetzungen und Beweisverpflichtungen Schritt für Schritt, bis am Ende alle Beweisverpflichtungen eingelöst sind.

Ein Beispiel. Wir beweisen die Aussage „Für jede natürliche Zahl x gilt: wenn x durch 6 teilbar ist, so ist x durch 3 teilbar.“ Hier ein Beweis:

> Sei x_0 eine natürliche Zahl, die durch 6 teilbar ist. Zu zeigen ist, daß x_0 durch 3 teilbar ist. Weil x_0 durch 6 teilbar ist, gibt es nach Definition der Teilbarkeit eine natürliche Zahl k derart, daß $x_0 = 6 \cdot k$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß es eine natürliche Zahl k' gibt, so daß $x_0 = 3 \cdot k'$ ist. Wir setzen $k' = 2 \cdot k$. Dann ist $x_0 = 6 \cdot k = 2 \cdot 3 \cdot k = 3 \cdot k'$. w.z.b.w.

Sezieren wir diesen Beweis. Zu Beginn haben wir als Beweisverpflichtung „Für jede natürliche Zahl x gilt: wenn x durch 6 teilbar ist, so ist x durch 3 teilbar“ und keine Annahmen. Diese Aussage hat die Struktur „für alle x aus einer Klasse von Objekten (in diesem Fall: die natürlichen Zahlen) gilt eine Aussageform $H(x)$“. Wir brauchen also eine Argumentation, die jede natürliche Zahl erfaßt. Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, würde eine Argumentation, die jede Zahl einzeln abhandelt, zu lange dauern. Der Trick, um zu einer endlichen Argumentation zu kommen, ist der, daß wir mit *einer* Unbestimmten arbeiten, die stellvertretend für jedes beliebige zu erfassende Objekt steht und die Argumentation anhand dieser Unbestimmten fortsetzen. Wir ersetzen also die Beweisverpflichtung „für alle x aus einer Klasse K gilt $H(x)$“ durch eine Annahme und eine neue Beweisverpflichtung: die Annahme „x_0 (eine frische Unbestimmte) ist ein Objekt aus der Klasse K“ und die Beweisverpflichtung „$H(x_0)$“. Dieses Vorgehen sollte, bis zur Behandlung der Methode *Induktion*, der Standardweg zum Beweis von Aussagen der Form „für alle ...“ sein. Im Beweistext ist diese Herangehendweise durch den Ausdruck „Sei x_0 eine natürliche Zahl...“ dokumentiert. Aussagen, die mit *sei* oder *angenommen,...* eingeleitet werden, signalisieren immer Annahmen. Dagegen sind Aussagen, die mit *Zu zeigen* oder ähnlichen Konstruktionen eingeleitet werden, Beweisverpflichtungen. Die derzeit aktuelle Beweisverpflichtung lautet „Wenn x_0 durch 6 teilbar ist, so ist x_0 durch 3 teilbar.“ Sie ist nicht explizit im Beweistext aufgeführt. Das liegt daran, daß im Text der vorige und der nächste Schritt zusammengefaßt wurden. Eine Beweisverpflichtung der Form „Wenn H_1, so H_2 verarbeiten wir in der Regel dadurch, daß wir H_1 zu den Voraussetzungen hinzufügen, während sich die Beweisverpflichtung zu H_2 reduziert. Klar, in wenn-dann-Konstruktionen signalisiert ja H_1 gerade die Voraussetzung und H_2 die Behauptung. Also haben wir als Annahmen inzwischen erstens, daß x_0 eine natürliche Zahl ist und zweitens, daß x_0 durch 6 teilbar ist, und als verbleibende Beweisverpflichtung, daß x_0 durch 3 teilbar ist. Dieses Zwischenfazit ist im Beweis explizit erwähnt durch „Sei x_0 eine natürliche Zahl, die durch 6 teilbar ist“ auf der Annahmenseite sowie „Zu zeigen ist, daß x_0 durch 3 teilbar ist“ auf der Beweisverpflichtungsseite. Die darauf folgende Passage signalisiert die Anwendung einer Definition. Eine Definition anzuwenden heißt, in einer Aussage einen Begriff gegen seine in der Definition festgelegte Bestimmung einzutauschen. Die Definition „Eine ganze Zahl n ist durch eine andere ganze Zahl m teilbar, wenn es eine ganze Zahl k gibt mit $n = k \cdot m$ wird als bekannt vorausgesetzt. Der Begriff Teilbarkeit – eine Beziehung zwischen zwei Zahlen m und n – wird festgelegt durch die Bestimmung „es gibt ein k mit $k \cdot m = n$. Das Austauschen des Begriffs gegen seine definierte Bestimmung ist immer ein zulässiges Argument und wird immer eine zentrale Rolle spielen, wenn wir Aussagen über frisch definierte Begriffe beweisen. Was sonst, als seine Bestimmung sollen wir denn zum Nachweis von Eigenschaften eines Begriffs verwenden? Die Erfahrung aus den vergangenen Jahren lehrt: Wenn Du beim Beweis einer Aussage nicht vorankommst, suche nach einem für die Aussage wesentlichen Begriff und ersetze ihn gegen seine Bestimmung. Zurück zu unserem Teilbarkeitsbeweis. Aus der Annahme „x_0 ist durch 6 teilbar“ wird durch Anwendung der Definition der Teilbarkeit die neue Annahme „es gibt eine natürliche Zahl k mit $x_0 = 6 \cdot k$“. Parallel dazu wird durch Anwendung derselben Definition aus der Beweisverpflichtung „x_0

ist durch 3 teilbar“ die neue Beweisverpflichtung „es gibt ein k' mit $x_0 = 3 \cdot k'$“. Die verbleibende Beweisverpflichtung hat die Form „Es gibt ein k' mit der Eigenschaft $H(k')$“. Für solche Aussagen gibt es ebenfalls eine Standardherangehensweise. Um die Existenz von k' nachzuweisen, führen wir ein speziell gewähltes k' vor und und zeigen, daß das von uns gewählte k' der Anforderung $H(k')$ genügt. Dabei dürfen wir zur Wahl natürlich Werte verwenden, die uns auf Grund von Annahmen symbolisch zur Verfügung stehen, in diesem Fall k: „Wir setzen $k' = 2 \cdot k$“. Nach der Annahme „es gibt ein k mit ...“ steht es uns frei, k' in Abhängigkeit von k festzulegen. Warum gerade $k' = 2 \cdot k$ und nicht $k' = 25 \cdot k^2$? Ganz einfach: Weil's so funktioniert. Dies ist im vorliegenden Beweis die einzige Stelle, wo man kreativ tätig werden muß. Dieser Ansatz liefert uns jedenfalls die neue Annahme $k' = 2 \cdot k$, während die Beweisverpflichtung immer noch $x_0 = 3 \cdot k'$ lautet. Aus den beiden Annahmen $x_0 = 6 \cdot k$ und $k' = 2 \cdot k$ kann nun aber die neue Voraussetzung $x_0 = 3 \cdot k'$ abgeleitet werden. Wenn eine Beweisverpflichtung als Annahme auftaucht, gilt sie als eingelöst. Wir dürfen sie aus der Liste der Beweisverpflichtungen streichen. Da in unserem Beweis nunmehr alle Beweisverpflichtungen eingelöst sind, ist der Beweis schließlich erbracht. Dies wird traditionell durch die Formel „was zu beweisen war“ (w.z.b.w.) oder das lateinische Pendant q.e.d., in neueren Texten aber auch oft einfach durch ein abschließendes $\Box$ dokumentiert.

Was lernen wir daraus? Ein Beweis dokumentiert einen Prozeß von Transformationen, die Beweisverpflichtungen und Voraussetzungen betreffen, wobei Teilaussagen manchmal die Seiten wechseln können. Jeder einzelne Schritt entspricht dabei einer relativ mechanisch abarbeitbaren Aktion, die zudem aus einem Vorrat an abgesicherten Argumentationsweisen stammt. Weiter unten liste ich einen Grundvorrat an Transformationen auf, der ausreicht, um alle zu Beginn des Semesters gestellten Aufgaben zu lösen. Im Laufe des Semesters lernen wir weitere Muster sowie Methoden kennen, wie wir den Vorrat an Argumentationsweisen („Schlußregeln“) selbständig ergänzen können, ohne uns dabei Fehlschlüsse einzuhandeln. Ein Beweis dokumentiert dem Leser, welche Transformationen in welcher Reihenfolge die orginale Beweisverpflichtung (die zu beweisende Aussage) einlösen. Den Stil, einen Beweistext zu formulieren, erlernt man am besten durch Abschauen und Nachahmen.

Folgende Übungen erleichtern es, präzises Argumentieren zu erlernen.

- Nimm Beweise aus Vorlesung/Skript/Sekundärliteratur und extrahiere den Prozeß der Transformation von Aussagen zur Einlösung von Beweisverpflichtungen. Ordne die entsprechenden Formulierungen den Transformationsschritten zu;

- Nimm Aussagen, auf deren Beweis in der Vorlesung verzichtet wird, finde heraus, wie man diese Aussagen unter Verwendung der unten angegebenen Argumentationsmuster beweisen kann, formuliere Deinen Beweis als Text und kontrolliere, inwieweit Kommilitonen in der Lage sind, Deine Transformationsschritte zu reproduzieren.

- Übernimm die Rolle des „Anwalts der Gegenseite“, wenn Kommilitonen Dir ihre Versuche vorstellen. Achte, ganz nach Anwaltsmanier, nicht auf die Richtigkeit der zu beweisenden Aussage, sondern ausschließlich darauf, ob die Argumente als solche hieb- und stichfest sind. Die Frage ist immer: Kann dasselbe Argument, in einer anderen Situation als der aktuellen angewendet, geeignet sein, eine falsche Aussage zu begründen?

5 Die ersten Grundargumentationsmuster

Implikation - direkter Beweis

Anwendbar auf eine Beweisverpflichtung der Form „Wenn H_1, so H_2“.

Anwendung: H_1 wird zu den vorhandenen Annahmen hinzugefügt, H_2 wird neue Beweisverpflichtung. Die alte Beweisverpflichtung „Wenn H_1, so H_2“ entfällt.

Dokumentation im Beweistext: „Angenommen/Voraussetzung:, H_1. Zu zeigen ist H_2.“

Begründung: Wir sprechen über diese Argumentationsregel noch einmal im Zusammenhang mit vollständiger Fallunterscheidung und Wahrheitstabellen, weiter unten.

Implikation - indirekter Beweis

Anwendbar auf eine Beweisverpflichtung der Form „Wenn H_1, so H_2“.

Anwendung: *nicht* H_2 wird Annahme, *nicht* H_1 wird Beweisverpflichtung. Die alte Beweisverpflichtung „Wenn H_1, so H_2“ entfällt.

Dokumentation im Beweistext: „Angenommen, H_2 wäre falsch. Wir führen diese Annahme zum Widerspruch mit H_1.“

Begründung: Wer weiter unten den Abschnitt mit den Wahrheitstabellen einsieht, kann leicht überprüfen, daß für beliebige Aussagen H_1 und H_2 die Verbindungen „Wenn H_1, so H_2“ und „Wenn nicht H_2, so nicht H_1“ logisch gleichwertig sind.

Kommentar: Im Beweisen Ungeübte tendieren viel zu schnell zu indirekten Beweisen. Diese sind aber schwieriger, weil Annahmen und Beweisverpflichtungen schnell durcheinandergeraten. Die meisten Beweise sind leichter zu finden und besser zu verstehen, wenn sie direkt geführt werden.

Äquivalenz

Anwendbar auf eine Beweisverpflichtung der Form „H_1 genau dann, wenn H_2“.

Anwendung: Die Verpflichtung wird ersetzt durch zwei neue Beweisverpflichtungen „Wenn H_1, so H_2“ und „Wenn H_2, so H_1“.

Dokumentation im Beweistext: „Teil 1: Voraussetzung H_1, zu zeigen ist H_2. ...; Teil 2: Voraussetzung H_2, zu zeigen ist H_1. ...“.

Begründung: „H_1 genau dann, wenn H_2“ ist logisch gleichwertig zu „Wenn H_1, so H_2 *und* wenn H_2, so H_1“.

Universalaussagen

Anwendbar auf Beweisverpflichtungen der Form „für alle x gilt $H(x)$“.

Anwendung: Die Verpflichtung wird ersetzt durch eine Annahme „x_0 ist ein beliebig gewähltes Objekt“. und eine neue Verpflichtung „$H(x_0)$“.

Dokumentation im Beweistext: „Sei x_0 beliebig gewählt. Wir zeigen $H(x_0)$.“

Begründung: Da in der weiteren Argumentation x_0 stellvertretend für jedes Objekt steht, muß die Aussage für jedes Ding stimmen, das durch x repräsentiert wird.

Existenzaussagen

Anwendbar auf Beweisverpflichtungen der Form „es gibt ein x mit $H(x)$“.

Anwendung: Die Beweisverpflichtung wird ersetzt durch die Annahme „x ist gleich (hier geeignete Wahl einsetzen)“ und die neue Beweisverpflichtung „$H($ (hier ebendiese Wahl einsetzen) $)$“.

Dokumentation im Beweistext: „Wir wählen x als (geeignete Wahl) und zeigen daß H für (geeignete Wahl) gilt“.

Begründung: Indem wir eine korrekte Wahl für x vorführen, beweisen wir die Existenz.

Anwendung von Definitionen

Anwendbar auf beliebige Aussagen, egal ob Verpflichtung oder Annahme.

Anwendung: Ersetze einen vorkommenden Begriff durch seine definierte Bestimmung.

Begründung: Wenn die Definition festlegt, was ein Begriff bedeutet, kann das Austauschen von Begriff und Bedeutung den Inhalt der Aussage nicht ändern.

Dokumentation im Beweistext: (neu entstandene Aussage), nach Definition von (Begriff).

Kommentar: Diese Möglichkeit wird am häufigsten ignoriert.

Schulwissen und Triviales

Anwendbar auf Beweisverpflichtungen, deren Wahrheit offensichtlich oder aus der Schule bekannt ist.

Anwendung: Streiche die Beweisverpflichtung. Wahlweise kann eine triviale oder aus der Schule bekannte Aussage auch als zusätzliche Annahme eingefügt werden.

Dokumentation: „Das ist offensichtlich/trivial". bzw. „laut Schulwissen".

Kommentar: Mit Trivialitäten meinen wir derart offensichtlich wahre Beweisverpflichtungen wie „$0 = 0$", „$1 + 1 = 2$", „H oder nicht H" usw. Da Schulwissen erfahrungsgemäß höchst verschieden ausfällt, wollen wir hier festlegen, daß als Schulwissen alle Kentnisse im Umgang mit den Grundrechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division in den Bereichen der natürlichen, ganzen, gebrochenen, rationalen und reellen Zahlen gelten, dazu die Relationen $<$, $=$, $\leq$, $>$, $\geq$ und Teilbarkeit, die Begriffe des kleinsten gemeinsamen Vielfachen und größten gemeinsamen Teilers, der Begriff der Primzahlen und die Primfaktorzerlegung ganzer Zahlen.

> Die bis hierhin aufgezählten Transformationen haben alle gemeinsam, daß es erfahrungsgemäß immer sinnvoll ist, sie auch wirklich zu verwenden, wenn die Voraussetzungen zu ihrer Anwendung erfüllt sind. Jetzt stelle ich noch ein paar weitere Regeln vor, deren Anwendung in einigen Fällen hilfreich und notwendig ist, aber in anderen Fällen in eine Sackgasse führen kann, d.h. in eine Situation, in der wir zur Einlösung unserer Beweisverpflichtungen mit unserem Latein ans Ende kommen. In solchen Situationen muß man sich in einen früheren Arbeitsstand zurückbegeben und etwas anderes probieren.

Fallunterscheidung

Anwendbar in beliebigen Situationen.

Anwendung: Man suche sich eine geeignete Aussage der Form $H = H_1 oder H_2 oder ... oder H_n$, wobei H eine als immer wahr gesicherte Aussage ist. (Beispiel: $H = x$ ist gerade *oder* x ist ungerade, wobei x eine Unbestimmte ist, die für ganze Zahlen steht.) Dann setze man mit n getrennten Argumentationen fort, wobei in der Argumentation Nummer i alle bisherigen Annahmen, alle bisherigen Beweisverpflichtungen sowie als neue Annahme H_i geführt werden.

Begründung: Da H besagt, daß jederzeit mindestens eine der Aussagen H_1 bis H_n zutrifft, gibt es also für jede konkrete Situation mindestens einen Fall (eine Teilargumentation), die für diese Situation die Originalaussage nachweist.

Dokumentation im Beweistext: „Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Erster Fall: Es gelte H_1. (Argumentation 1) Zweiter Fall: Es gelte H_2 (Argumentation 2) .... n-ter Fall: Es gelte H_n." Falls die Wahrheit von H nicht offensichtlich ist, muß man zusätzlich die Gründe angeben: „Diese Fallunterscheidung ist vollständig, weil H aus folgenden Gründen wahr ist: ...".

Beispiel: Um zu beweisen, daß kein Quadrat einer natürlichen Zahl n bei Division durch drei den Rest 2 läßt, nehmen wir ein beliebiges n_0 her und unterscheiden die drei Fälle, daß n_0 bei Division durch drei den Rest 0 (H_1), 1 (H_2) bzw. 2 (H_3) läßt. Im ersten Fall gibt es ein k_1 mit $n_0 = 3 \cdot k_1$, deren Quadrat ist $3 \cdot (3 \cdot k_1^2)$ und läst bei Division durch 3 also den Rest 0. Im zweiten Fall gibt es ein k_2 mit $n_0 = 3 \cdot k_2 + 1$. Deren Quadrat ist $9k_2^2 + 6k_2 + 1 = 3 \cdot (3k_2^2 + 2k_2) + 1$ und läst bei Division durch 3 also den Rest 1, und im dritten Fall gibt es ein k_3 mit $n_0 = 3 \cdot k_3 + 2$ und deren Quadrat ist $3 \cdot (3k_3^2 + 4k_3 + 1) + 1$ und läßt bei Division durch 3 also ebenfalls den Rest 1. w.z.b.w.

Wahrheitstabellen

Anwendbar in Situationen, wo in der Beweisverpflichtung diejenigen Verbindungen wesentlich sind, für die wir weiter oben eine Wahrheitstabelle angegeben haben (also *nicht, und, oder, entweder oder, wenn-dann, genau dann-wenn*).

Anwendung: Man tabelliert für die vorkommenden Grundaussagen alle Kombinationen von Wahrheitswerten, die diesen Aussagen zugeordnet werden können, und berechnet für jede Konstellation den Wahrheitswert der Gesamtaussage laut den Wahrheitstabellen der Verbindungen. Wenn dabei in jeder Konstellation der Wert *wahr* für die Gesamtaussage entsteht, ist die Beweisverpflichtung eingelöst (kann also aus der Liste der Verpflichtungen gestrichen werden). Entsteht auch nur in einer Konstellation ein *falsch*, war der Aufwand umsonst.

Dokumentation: „Aussage H kann durch Aufstellung einer Wahrheitstabelle als wahr nachgewiesen werden.“ Wir wollen hier als Papiersparregel vereinbaren, daß die explizite Aufstellung der Tabelle in schriftlichen Ausarbeitungen (Hausaufgaben, Klausuren) weggelassen werden darf (es muß nur stimmen!), es sei denn, die Aufgabenstellung verlangt diese Tabelle explizit. Wer's nicht glaubt, kann ja jederzeit selbst nachrechnen.

Begründung: Dies ist im Grunde die Kombination von zwei bereits bekannten Argumentationsmustern. Da jede Einzelaussage einen der Werte *falsch* oder *wahr* annehmen muß, können wir aus dieser Beobachtung eine Fallunterscheidung in zwei Fälle bilden. Bei mehreren beteiligten Einzelaussagen entstehen entsprechend mehr Fälle. In jedem einzelnen Fall kann nun der Wahrheitsgehalt der Beweisverpflichtung berechnet werden, was eine Anwendung einer Definition ist. Die weiter oben beschriebenen Wahrheitstabellen sind nämlich nichts weiter als Definitionen der Begriffe *nicht, und, oder* usw. Wenn sich also in jeder Teilargumentation herausstellt, daß die Beweisverpflichtung wahr ist, muß sie also insgesamt wahr sein.

Die Implikationsregel in neuem Licht

Kehren wir noch einmal zur Implikationsregel zurück. Sie ist anwendbar auf Beweisverpflichtungen der Form „Wenn H_1, so H_2“. In Kenntnis der Methoden zur Fallunterscheidung und der Tatsache, daß die Verbindung „wenn-dann“ per Wahrheitstabelle gegeben ist, könnte man auf die Idee kommen, diese Methoden auf die Verpflichtung anzuwenden. Führen wir spaßeshalber einmal eine Fallunterscheidung in Bezug auf die erste Teilaussage durch. Erster Fall: Die erste Teilaussage ist falsch. Ein Blick auf die Wahrheitstabelle der Verbindung *wenn-dann* verrät, daß in dieser Situation die Gesamtaussage garantiert wahr ist, ohne daß der Wert von H_2 dabei irgendeine Rolle spielt. Zweiter Fall: Annahme, H_1 ist wahr. Dann wird die wenn-dann-Verbindung nur wahr, wenn jetzt auch noch H_2 wahr wird. Der zweite Fall entspricht also genau der Konstellation, die wir beim direkten Beweis haben: H_1 wird Annahme (hier: die Fallannahme), H_2 wird neue Beweisverpflichtung. Daher kann, wer mag, die Regel des direkten Beweises als eine Kurzform der Regel der Fallunterscheidung, angewendet auf die erste Teilaussage einer wenn-dann-Verbindung auffasen, wo der erste Fall unerwähnt bleibt, weil sowieso klar ist, daß die Gesamtaussage hier wahr wird.

Führen wir in analoger Form eine Fallunterscheidung nach der zweiten Teilaussage anstalle nach der ersten durch, kommen wir übrigens bei der Regel des indirekten Beweises an. Du kannst das selbständig überprüfen.

Abschwächung von Annahmen

Anwendbar in Situationen, wo es zu einer Annahme H_1 eine bereits im Vorfeld bewiesene Aussage $H =$ „wenn H_1, dann H_2“ gibt.

Anwendung: Ersetze H_1 durch H_2.

Dokumentation im Beweistext: „Aus H_1 folgt H_2, nach Satz (Referenz auf die Stelle, wo H formuliert und bewiesen ist)“. Zur Referenz auf eine frühere Aussage bieten sich deren laufende Numerierung oder eine spezielle Kennzeichnung (meist mit Sternchen) an.

Begründung: Als Annahme dürfen wir H_1 als wahr voraussetzen. Wenn zudem „wenn H_1, so H_2“ ebenfalls wahr ist, hat unter dieser Voraussetzung H_2 keine andere Chance als ebenfalls wahr zu sein.

Kommentar: Auf diese Weise bringt man Hilfssätze in eine Gesamtargumentation ein.

Verschärfung von Beweisverpflichtungen

Anwendbar in Situationen, wo es zu einer Beweisverpflichtung H_2 eine früher bewiesene Aussage der Form „wenn H_1, so H_2“ gibt.

Anwendung: Ersetze H_2 durch die neue Beweisverpflichtung H_1

Dokumentation: „Nach Nachweis von H_2 genügt es, H_1 zu zeigen, nach Satz (Referenz auf H).

Kommentar: Beachte die umgekehrte Richtung der Anwendung von H gegenüber der vorigen Regel. Die Begriffe *Abschwächung* und *Verschärfung* rühren daher, daß im Fachjargon in einer wahren Aussage *wenn H_1, dann H_2* man H_1 schärfer als H_2 sowie H_2 schwächer als H_1 nennt. Der Grund für diese Benennung erschließt sich mit der Zeit ganz von allein.

Vollständige Induktion über den natürlichen Zahlen

Dies ist etwas für Fortgeschrittene. Erfahrungsgemäß ist der Kenntnisstand in Sachen Induktion zu Semesterbeginn extrem unterschiedlich. Das Konzept wird deshalb im Lauf des Semesters von vorn vermittelt. Wer allerdings schon mit induktiven Beweisen vertraut ist, mag seine Kenntnisse mit der folgenden Regel in Einklang bringen:

Anwendbar auf eine Beweisverpflichtung „für jede natürliche Zahl x gilt $H(x)$“.

Anwendung: Die Verpflichtung wird ersetzt durch zwei neue Beweisverpflichtungen „H(0)“ und „für jede natürliche Zahl x_0 gilt: wenn $H(x_0)$, so $H(x_0+1)$“.

Dokumentation: „Beweis durch Induktion über x. Induktionsanfang: Wir zeigen $H(0)$ (Hier folgt die Argumentation zur Einlösung der Beweisverpflichtung $H(0)$). Induktionsvoraussetzung: $H(x_0)$, Induktionsbehauptung: $H(x_0+1)$. (hier folgt die Argumentation zur Einlösung der zweiten Verpflichtung)“.

Na, wiedererkannt? Die Argumentation für $H(0)$ ist meist kurz. Manchmal wird die Null nicht als vollwertige natürliche Zahl angesehen. Dann zeigt man im Induktionsanfang $H(1)$ anstatt $H(0)$.

6 Wir konstruieren einen kleinen Beweis

Wir wollen nun mit Hilfe der vorgestellten Methoden die Aussage „Für jede reelle Zahl x gilt: wenn x verschieden von Null ist, so gibt es eine reelle Zahl y mit $x \cdot y = 1$“.

Dies ist unsere Beweisverpflichtung, derzeit noch ohne Voraussetzungen. Wir notieren sie auf einem Schmierzettel. Nun suchen wir in der obigen Liste nach einem anwendbaren Argumentationsschritt. Da die Beweisverpflichtung die From „Für alle x gilt ....“ hat, werden wir unter der Überschrift *Universalaussagen* fündig. Im Prinzip sind noch weitere Regeln anwendbar, diese gehört jedoch zu denen, deren Anwendung ich immer besonders empfehle, wenn sie anwendbar sind. An diese Empfehlung will ich mich also auch selbst halten. Die Anwendung der Regel liefert eine neue Konstellation, in der wir eine Annahme haben, nämlich „x_0 ist eine reelle Zahl, sowie eine neue Beweisverpflichtung „Wenn $x_0 \neq 0$, dann gibt es eine reelle Zahl y mit $x_0 \cdot y = 1$“. Um den Beweistext kümmern wir uns später.

Die neue Aussage hat wenn-dann-Struktur. Daher wenden wir eine Regel für die Implikation an, und zwar entsprechend meinen erteilten Ratschlägen die des direkten Beweises. Wir erhalten eine neue Situation mit den Annahmen „x_0 ist eine reelle Zahl“ und „$x_0 \neq 0$“ und der Beweisverpflichtung „es gibt eine reelle Zahl y mit $x_0 \cdot y = 1$“. Auf die neue Beweisverpflichtung paßt offenbar die Regel für Existenzaussagen. Dazu müssen wir uns überlegen, wie man y geeigneterweise wählt, damit man die Aussage $x_0 \cdot y = 1$ hinbekommt. x_0 steht uns laut Annahme „x_0 ist eine reelle Zahl“ zur Vefügung, also können wir vernünftigerweise y als $\frac{1}{x_0}$ wählen. Wir haben nun die Annahmen „x_0 ist eine reelle Zahl“, „$x_0 \neq 0$“, $y = \frac{1}{x_0}$ und die Verpflichtungen „$\frac{1}{x_0}$ ist eine reelle Zahl“ (nicht vergessen!) und „$x_0 \cdot \frac{1}{x_0} = 1$“. Für beide Verpflichtungen können wir uns nun auf den Schulstoff berufen, wobei für die erste Aussage die Annahme, daß $x_0 \neq 0$ ist, in der Tat wichtig ist. Wir haben also die ursprüngliche Beweisverpflichtung eingelöst, unter Anwendung der Schritte Universalaussage, Implikation/direkter Beweis, Existenzaussage, Schulstoff, Schulstoff.

Nun holen wir das gute Papier heraus und setzen den abzugebenden Beweistext zusammen. Vom Schritt *Universalaussage* übernehmen wir „Sei x_0 eine reelle Zahl. Wir zeigen, daß es eine reelle Zahl y gibt mit $x_0 \cdot y = 1$“. Den Schritt Implikation dokumentieren wir durch „Sei $x_0 \neq 0$. Wir zeigen, daß es eine reelle Zahl y gibt mit $x_0 \cdot y = 1$.“ Die Existenzaussage wird eingelöst durch den Text „Wir wählen y als $\frac{1}{x_0}$“. Aus den Schulstoffanteilen notieren wir: „Wie aus der Schule bekannt ist, ist $\frac{1}{x_0}$ eine reelle Zahl, weil $x_0 \neq 0$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß $x_0 \cdot \frac{1}{x_0} = 1$ ist, was ebenfalls aus der Schule bekannt ist.“. Fertig. Noch mal alles zusammen:

> Sei x_0 eine reelle Zahl. Wir zeigen, daß es eine reelle Zahl y gibt mit $x_0 \cdot y = 1$. Sei $x_0 \neq 0$. Wir zeigen, daß es eine reelle Zahl y gibt mit $x_0 \cdot y = 1$. Wir wählen y als $\frac{1}{x_0}$. Wie aus der Schule bekannt ist, ist $\frac{1}{x_0}$ eine reelle Zahl, weil $x_0 \neq 0$ ist. Es bleibt zu zeigen, daß $x_0 \cdot \frac{1}{x_0} = 1$ ist, was ebenfalls aus der Schule bekannt ist. w.z.b.w.

So kriegt man schon volle Punktzahl. Man kann nun natürlich noch die Sache etwas weniger holprig formulieren, z.B.

> ‘Sei x_0 eine reelle Zahl $x_0 \neq 0$. Wir zeigen, daß es eine reelle Zahl y gibt mit $x_0 \cdot y = 1$. Wir wählen y als $\frac{1}{x_0}$. Dies ist, wie aus der Schule bekannt, eine eine reelle Zahl, weil $x_0 \neq 0$ ist. Es bleibt also zu zeigen, daß $x_0 \cdot \frac{1}{x_0} = 1$ ist, was ebenfalls aus der Schule bekannt ist. w.z.b.w.

7 Wir kritisieren eine unschlüssige Argumentation

In den vergangenen Jahren sahen wir des öfteren „Lösungen“ von Aufgaben, die etwa folgendermaßen lauteten. Zu beweisen war z.B., daß eine Gleichung gilt. Die Argumentation startet mit der zu beweisenden Gleichung. Dann folgen mehrere Zeilen der Form: „daraus folgt:“ und eine neue Gleichung, die aus einer Umformung der alten Gleichung entsteht (z.B. Addieren von 17 auf beiden Seiten). In der letzten Zeile steht: „daraus folgt: $0 = 0$, wahre Aussage.“

Analysieren wir einen solchen Beweis. Nennen wir die zu beweisende Gleichung (Aussage) H. Die Formulierung „daraus folgt“ signalisiert, daß zwischen einer Gleichung und der jeweils nächsten Gleichung eine wenn-dann-Beziehung besteht. Wenn wir die Argumentation über mehrere Zeilen zusammenfassen, ist sie geeignet, die Aussage „Wenn H, dann $0 = 0$“ einwandfrei zu belegen. Außerdem ist 0=0 trivialerweise wahr. Dummerweise nutzen diese beiden Tatsachen überhaupt nichts, um die Richtigkeit von H selbst zu belegen, denn ein Blick auf die Wahrheitstabelle von wenn-dann, verrät, daß es sehr wohl sein kann, daß die Aussagen „Wenn H_1, dann H_2“ und „H_2“ beide richtig sind, die Aussage H_1 dagegen falsch. Die Argumentation oben löst die Beweisverpflichtung H nicht ein!

Das kann auch gar nicht sein, denn man könnte sonst leicht beweisen, daß $3 = 17$ ist. Es ist nämlich sehr wohl so, daß, wenn zwei Zahlen gleich sind, dann auch ihr Produkt mit 0 gleich ist. Ich mache also absolut nichts falsch, wenn ich hinschreibe„Aus $3 = 17$ folgt: $3 \cdot 0 = 17 \cdot 0$“ und die nächste Zeile „daraus folgt: $0 = 0$, wahre Aussage“. Alles, was da steht, ist korrekt. Nur beweist es lange nicht $3 = 17$.

Was man in einer solchen Situation stattdessen tun könnte, wäre, die gesamte Argumentation umzukehren. Wir starten also mit der Aussage $0 = 0$ und formen diese Gleichung um. Wenn wir es dadurch schaffen, am Ende bei der Originalgleichung H anzukommen, stehen wir weitaus besser da. Wir haben es dann nämlich geschafft, die Aussage „Wenn $0 = 0$ ist, dann stimmt H“ mit einer ordentlichen Argumentation zu belegen. Da außerdem $0 = 0$ nach wie vor wahr ist, zeigt ein Blick auf die Tabelle von wenn-dann, daß aus diesen beiden Tatsachen nun in der Tat folgt, daß H richtig sein muß.

Der Witz bei der Umformung von einer zu beweisenden Gleichung in eine offensichtlich geltende Gleichung $0 = 0$ ist also nicht der Weg von der Gleichung zu $0 = 0$, sondern der *umgekehrte* Weg von $0 = 0$ zur gesuchten Gleichung! Aus der Gleichung $0 = 0$ kann ich nämlich durch keine erlaubte Umformung $3 = 17$ ableiten. Wenn man denn schon bei der Originalgleichung startet, ist der Trick, daß man sogenannte *äquivalente Umformungen* benutzt. Und das sind gerade solche Umformungen, die man auch in umgekehrter Richtung anwenden kann. Die Multiplikation mit 0 ist keine äquivalente Umformung. Die Multiplikation mit einer anderen Zahl, oder die Addition/Subtraktion beliebiger Zahlen sind äquivalente Umformungen. Über die Tatsache, daß man sich der Verwendung äquivalenter Umformungen bewußt ist, sollte man den Lesern dadurch Kenntnis geben, daß man die Formulierung „daraus folgt“ durch die Formulierung „genau dann, wenn“ ersetzt. Diese Formulierung belegt, daß sowohl die nächste Zeile aus der aktuellen als auch die aktuelle aus der nächsten folgt. Ob das stimmt, können Leser nun leicht nachprüfen. Diese scheinbare Spitzfindigkeit macht, wenn die genau-dann-wenn-Beziehung wirklich vorliegt, aus einer unschlüssigen Argumentation eine korrekte, wenn auch eine mit etwas zuviel Inhalt (der Teil „wenn H, so $0 = 0$“ mag ja stimmen, ist aber zum Nachweis von H irrelevant). Und weil Deine erste Aufgabe darin besteht, die weiter vorn vorgestellten Formulierungen regelgerecht einzusetzen, werden wir nach kurzer Eingewöhnungszeit Fehler wie den hier diskutierten gnadenlos ahnden.

8 Wo bleibt die Kreativität?

Die Anwendung der beschriebenen Techniken stellt sich als ein weitgehend mechanischer und inspirationsloser Prozeß dar. Und als solchen möchte ich ihn auch verstanden wissen, denn genau durch den Rückzug auf tausendfach bewährte Standardmuster schaffen wir es, fehlerhafte Argumentationen zu vermeiden. Dies heißt nicht, daß im Falle schwieriger Aussagen nicht auch ein Maß an Genialität erforderlich ist. Die Genialität besteht aber auch hier zuerst darin herauszufinden, *welche* der allseits akzeptierten Argumente *in welcher Abfolge* angeführt werden müssen, um eine Aussage zu beweisen. Die Ausführung der Argumente an sich folgt ausschließlich Regeln wie den oben vorgestellten (natürlich gibt es davon noch ein paar mehr). Deshalb ist es um Dimensionen einfacher, einen Beweis als korrekt zu überprüfen, als ihn zu finden (zumindest, wenn er ordentlich aufgeschrieben ist). Zur Überprüfung muß ich lediglich den Argumentationsweg in der beschriebenen mechanischen Weise nachempfinden. Außerdem sind kleinere Lücken selbst zu schließen, die gern aus Faulheit nicht ins Detail beschrieben werden.

9 Fazit

Schlüssiges Argumentieren ist ein Prozeß, der sowohl handwerkliche Fähigkeiten als auch Kreativität, Inspiration und zuweilen Genialität erfordert. Die handwerklichen Fertigkeiten wollen wir trainieren, weil sie präzises Denken fördern und daher die Aufmerksamkeit gegenüber möglichen Fehlern steigern.

10 Nachtrag für Unterforderte

Da wir den Schwerpunkt auf die handwerklichen Fertigkeiten legen, kann es sein, daß Du Dich durch die inhaltliche Einfachheit der Übungsaufgaben beleidigt fühlst. Du solltest Dich trotzdem mit ihnen beschäftigen, weil ein späterer Einstieg von 0 auf 100 schon von so manchem Vertreter Deiner Spezies verpaßt wurde. Der beste Weg für Dich ist die intensive Arbeit mit Kommilitonen, und zwar solchen, die Schwierigkeiten haben. Deren Fragen zeigen Dir gnadenlos Deine Grenzen und bringen Dich dazu, zum Zwecke einer erhellenden Erklärung die Materie tiefgründig zu verarbeiten. Wenn Du diese Prüfung bestehst, bestehst Du auch unsere mit Bravour. Dein persönlicher Profit, nämlich die trainierte Fähigkeit zum verständlichen Erklären, ist mindestens soviel wert wie der Effekt für Deine „Versuchspersonen“.

11 Nachtrag für Überforderte

Mit lückenhaften oder lange zurückliegenden Kenntnissen in Mathematik scheinen Deine Startbedingungen schlecht zu sein. Mit der richtigen Herangehensweise muß das nicht so sein. Es hat durchaus Vorteile, bei 0 anzufangen. Dir fällt es leichter als den Cracks, Dich auf unsere Methoden und Inhalte einzulassen, während die Cracks hin und wieder durch ihren Stolz behindert werden, alles auf eigene Faust lösen zu wollen. Außerdem bist Du Dir von Anfang an darüber im Klaren, daß Aufwand zum Erreichen Deiner Ziele notwendig ist. Das Wichtigste für Dich ist, den Respekt abzulegen. Respekt vor der Schwierigkeit von Aufgaben hindert Dich oft daran, die bereitgestellten Methoden in der Tat auszuprobieren. Diesen Respekt mußt Du überwinden. Respekt vor den angeblich übermenschlichen Fähigkeiten Deiner Kommilitonen hindert Dich daran, Deine Fragen in den Übungen oder Deinen Mitstudenten gegenüber anzusprechen. Auch diesen Respekt mußt Du ablegen, er ist nicht gerechtfertigt. Die abgestuften Angebote in den Übungen sollen es Dir erleichtern, sie für Dich zu nutzen. Auf andere, speziell (momentan) stärkere Studierende mußt Du dafür umso bewußter zugehen. Bei der Organisation Deines Selbststudiums kommt es nicht nur auf die verwendete Zeit an, sondern darauf, wie effizient diese Zeit genutzt wird. In den Vorjehren gab es immer eine ganze Reihe von Studierenden, die mit Deinen Voraussetzungen gestartet sind und am Ende die Prüfung mit der Note 1 abgelegt haben. Die mußt Du finden und ausquetschen.