Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Theorie der Programmierung

Gegenüberstellung struktureller Reduktionstechniken für Petrinetze

Diplomarbeit

Thomas Pillat

Berlin, den 31. März 2008

Betreuer: Prof. Dr. Wolfgang Reisig, HU Berlin
Gutachter: Prof. Dr. Karsten Wolf (geb. Schmidt), Uni Rostock

Zusammenfassung

Petrinetze sind eine formale Methode zur Modellierung und Analyse von Systemen. Ein großes Problem bei der Analyse von Petrinetzen ist die Größe des Zustandsraumes. Um dieses Problem abzuschwächen, können Reduktionstechniken eingesetzt werden. Petrinetze sind einer der wenigen Formalismen, die die Möglichkeit bieten, bereits die Struktur des Modells zu reduzieren. Diese strukturellen Reduktionstechniken verändern die Struktur des Netzes und bewahren dabei bestimmte Eigenschaften des ursprünglichen Modells. Es existieren eine Vielzahl wissenschaftlicher Arbeiten, die strukturelle Reduktionstechniken untersuchen.

In der vorliegenden Arbeit werden strukturelle Reduktionstechniken einander gegenübergestellt und katalogisiert. Es wird ermittelt, welche Eigenschaften eines ursprünglichen Netzes durch die Anwendung der Reduktiontechnik bewahrt und für welche Netzklasse diese Reduktionstechnik gilt. Die Reduktionstechniken werden miteinander verglichen und die Beziehungen der Regeln zueinander ermittelt. Basierend auf diesen Ergebnissen wird ein Katalog erstellt, der beschreibt, für welche Netzklasse das Anwenden einer Regel welche Eigenschaften bewahrt.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Modellierung von Systemen ist in der Informatik weit verbreitet. Beispielsweise werden Modelle in der Softwareentwicklung schon seit langem für die Spezifikation, den Entwurf und zum Testen von Systemen verwendet. Modelle sind wichtig, da sie der Analyse von Systemeigenschaften dienen. Ein Formalismus zur Beschreibung von Modellen sind *Petrinetze*. Petrinetze sind mathematisch fundiert, haben eine formale Semantik und eignen sich deshalb zur Analyse von Modellen. Für Petrinetze existieren formale Methoden zur Verifikation von Modelleigenschaften. Für viele Modelleigenschaften muss der Zustandsraum komplett aufgebaut werden. Ein großes Problem hierbei ist die Zustandsraumexplosion. Petrinetze bieten als einer von wenigen Formalismen die Möglichkeit die Struktur des Modells zu reduzieren unter der Bewahrung bestimmter Eigenschaften des Modells. In der Literatur existieren eine Vielzahl wissenschaftlicher Arbeiten, die strukturelle Reduktionstechniken präsentieren und analysieren.

1.1 Hintergund

Im Jahr 1979 präsentierte Valette in [Val79] Verfeinerungstechniken für Petrinetze. Im selben Zeitraum stellten Suzuki und Murata ebenfalls Verfeinerungstechniken für Petrinetze vor [SM83]. Die Verfeinerung ist die komplementäre Transformationstechnik der Abstraktion. Berthelot stellte erstmals zu Beginn der 1980er Jahre mit der Pre- und Post-Agglomeration effiziente Reduktionstechniken vor, die auf der Struktur eines Petrinetzes arbeiten. Diese Arbeiten betrachten die Bewahrung der *Beschränktheit* und der *Lebendigkeit* eines Petrinetzes durch das Anwenden der Reduktionstechniken.

Im Jahr 2000 zeigten Poitrenaud und Pradat-Peyre für die Klasse der sicheren Petrinetze, dass das Anwenden von Berthelots Reduktionstechniken *LTL-Eigenschaften* bewahren [PPP00]. In [HPP04] erweiteren Haddad und Pradat-Peyre den Anwendungsbereich der Reduktionstechniken von Berthelot und zeigen, dass diese Reduktionstechniken LTL-Eigenschaften für alle Klassen von *Platz-Transitions-Netze* (P/T-Netzen) bewahren. Des Weiteren zeigen sie, unter welchen Bedingungen ihre Verallgemeinerung von Berthelots Reduktionstechniken die Lebendigkeit eines Petrinetzes bewahrt.

Mitte der 1990er Jahre präsentierten Shatz et al. Reduktionstechniken für Petrinetze. Diese nutzten sie innerhalb eines Frameworks, dass Eigenschaften von Ada Programme analysiert bzw. verifiziert. Für die Modellierung von Ada

Programmen verwenden sie Ada Netze [SC88], eine spezielle Klasse von Petrinetzen. Gegenstand der Betrachtungen in [STMD96] ist die Bewahrung von *Deadlocks* durch die präsentierten Reduktionstechniken.

Im Jahr 2001 präsentierten Esparza und Schröter in [ES01] Reduktionstechniken für ihr *Model Checking Toolkit*. Dieses übersetzt Modelle verschiedener Formalismen in ein sicheres Petrinetz, um LTL-Eigenschaften des ursprünglichen Modells auf dem sicheren Petrinetz zu verifizieren. Esparza und Schröter analysieren die Bewahrung von LTL-Eigenschaften.

Van der Werf untersucht in [vdW06] mehrere Regeln von Berthelot, Murata sowie von Desel und Esparza. Er analysiert für bestimmte Klassen von P/T-Netzen, inwiefern die Reduktionstechniken die Beschränktheit, Lebendigkeit sowie die *Soundness* [vdA97] eines Petrinetzes bewahren.

1.2 Ziel der Arbeit

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick zu strukturellen Reduktionstechniken für Petrinetze zu geben. Zunächst bestimmen wir die Reduktionstechniken aus [ES01, HPP04, STMD96, SM83, Val79, PPP00], die auf P/T-Netze anwendbar sind. Für diese Reduktionstechniken untersuchen wir, welche Eigenschaften sie für welche P/T-Netzenklassen bewahren. Wir betrachten die folgenden Eigenschaften: Lebendigkeit, Beschränktheit sowie zustands- und aktionsbasierte LTL-Eigenschaften. Die Mehrzahl der Arbeiten betrachtet jeweils nur einen Teil dieser Eigenschaften hinsichtlich ihrer Bewahrung durch die präsentierten Reduktionstechniken. Wir untersuchen jede Reduktionstechnik hinsichtlich der Bewahrung aller oben genannter Eigenschaften. Zusätzlich überprüfen wir, inwiefern die Menge der Schaltfolgen durch die Reduktionstechniken bewahrt wird.

Im Anschluss an die Analyse klassifizieren wir die Reduktionstechniken und vergleichen sie miteinander. Wir untersuchen welche Zusammenhänge zwischen den Reduktionstechniken bestehen. Ergebnis dieser Arbeit ist dann ein Regelkatalog. Unser Ansatz der Analyse der Reduktionstechniken ist allgemeiner als der van der Werfs in [vdW06], da wir die Reduktionstechniken nicht für ausgewählte Klassen von P/T-Netzen sondern allgemein für P/T-Netze analysieren.

1.3 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in 7 Kapitel. Im Folgenden geben wir einen Überblick über die Schwerpunkte der einzelnen Kapitel. In Kapitel 2 definieren wir grundlegende mathematische Begriffe sowie deren Notationen.

In den Kapiteln 3 bis 5 analysieren wir die Reduktionstechniken hinsichtlich der Eigenschaften, die sie bewahren. Des Weiteren analysieren wir die Beziehungen der Regeln untereinander. Wir zeigen, inwiefern Reduktionstechniken andere Reduktionstechniken verallgemeinern.

In Kapitel 6 stellen wir die Reduktionstechniken einander gegenüber. Wir klassifizieren sie hinsichtlich verschiedener Aspekte und präsentieren eine Regelhierarchie. Weiterhin präsentieren wir eine Übersicht, die angibt, welche Eigenschaften durch das Anwenden einer Reduktionstechnik bewahrt werden. Abschließend fassen wir in Kapitel 7 die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammen.

Kapitel 2

Grundlagen und Notationen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über verwendete mathematische Begriffe und deren Notationen in der vorliegenden Arbeit. Hierfür werden zunächst allgemeine mathematische Begriffe (z. B. Menge und Sprache) kurz dargestellt. Anschließend wird ein kurzer Überblick zu den Begrifflichkeiten gegeben, die für Petrinetze relevant sind. Für ein tieferes Verständnis verweisen wir auf [Sta90, Rei82]. Der erste Abschnitt, Kapitel 2.1, orientiert sich strukturell sowie inhaltlich an [Röm00]. Dieser Arbeit sind auch die Mehrzahl der Definitionen entnommen. Im darauf folgenden Abschnitt, Kapitel 2.2, werden Begriffe für Petrinetze definiert. Alle Definitionen in Kapitel 2.2 basieren auf Definitionen aus [Sta90, Rei82]. Abschließend werden in Kap. 2.3 Notationen, die für die *Linear-Time Temporal Logic* (kurz LTL) [Pnu77] von Bedeutung sind, kurz erläutert. Die entsprechenden Definitionen aus diesem Abschnitt basieren auf Definitionen aus [Pnu77] bzw. werden direkt aus [Sch06] übernommen.

2.1 Mathematische Notationen

In diesem Abschnitt werden die Notationen von Mengen, Matrizen, Sprachen und entsprechenden Symbolen gegeben. Der Leser kann auf dieses Kapitel zurückgreifen, wenn in dieser Arbeit verwendete mathematische Notationen nicht klar sind.

Logik Es werden die folgenden Symbole verwendet: $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\neg$ (nicht, Negation), $\Rightarrow$ (Implikation), $\Leftrightarrow$ (Äquivalenz) , $=$ (Gleichheit), $\neq$ (Ungleichheit), $\exists x : P(x)$ (es existiert ein x, das das Prädikat $P(x)$ erfüllt), $\forall x : P(x)$ (für alle x gilt das Prädikat $P(x)$).

Mengen Mit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet. $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, ...\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null. Das Symbol $\emptyset = \{x \,|\, x \neq x\}$ bezeichnet die leere Menge. Für eine beliebige Menge X bezeichnet $x \in X \,(x \notin X)$ das (Nicht-) Enthaltensein eines Elements $x \in X$. Mit $|X|$ wird die Kardinalität einer Menge X bezeichnet. Eine Menge wird durch $\{x \,|\, P(x)\}$ charakterisiert. Für zwei Mengen X und Y bezeichnet $X \subseteq Y \,(X \subset Y)$ die (echte) Teilmenge von X in Y. Binäre Operationen auf Mengen sind *Vereinigung* $(X \cup Y)$, *Durchschnitt* $(X \cap Y)$ und *Differenz*

$(X \setminus Y)$. Die Potenzmenge einer Menge X, $2^X = \{Y \,|\, Y \subseteq X\}$, ist die Menge aller Teilmengen von X. Das *kartesische Produkt* zweier Mengen X und Y wird notiert durch $X \times Y = \{(x,y) \,|\, x \in X \wedge y \in Y\}$. Zwei Mengen X und Y werden *disjunkt* genannt, wenn $X \cap Y = \emptyset$ gilt. Sind mehrere Mengen X_i mit $i \in \mathbb{N}^+$ gegeben, dann wird die Vereinigung dieser Mengen wie folgt angegeben: $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_i \cup \ldots = \bigcup_{i \in I} X_i$ mit $I = \{1, \ldots, n\}$ und $n \in \mathbb{N}^+$.

Abbildungen Eine *Abbildung* f von einer Menge X in eine Menge Y wird wie folgt notiert: $f : X \to Y$. Die Menge X ist der *Definitionsbereich* und Y der *Wertebereich*. Für ein Element $x \in X$ ist $f(x)$ das *Bild*. Die Umkehrfunktion wird mit f^{-1} bezeichnet. Für ein $y \in Y$ ist $f^{-1} = \{x \,|\, f(x) = y\}$. Ist jedem Element des Definitionsbereichs höchstens ein Element des Wertebereichs zugeordnet, also ist $\forall x, y \in X : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ erfüllt, handelt es sich um eine *injektive* Abbildung. Gilt $f(X) = Y$ ist f *surjektiv*. Ist f injektiv und surjektiv, wird f *bijektiv* genannt. Die Abbildung, die einem Paar ganzer Zahlen $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ die größere der beiden Zahlen zuordnet, ist $\max : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$. Die Abbildung max ist wie folgt definiert:

$$\max[x,y] = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq y \\ y, & \text{sonst} \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{Z}.$$

Vektoren und Matrizen Matrizen beschreiben Tabellen von Zahlen, mit denen gerechnet werden kann. Diese bestehen aus Zeilen und Spalten. Matrizen, die ganze Zahlen enthalten, werden formal als eine Funktion

$$\mathbf{A} : \begin{cases} \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} & \to \mathbb{Z} \\ (i,j) & \mapsto A(i,j) \end{cases}$$

aufgefasst, die einem Indexpaar (i,j) einen Funktionswert $\mathbf{A}(i,j)$ zuordnet. Matrizen werden in dieser Arbeit durch einen fetten Grossbuchstaben bezeichnet. Die Matrix $\mathbf{A}$ ist eine $m \times n$-Matrix und es gilt $\mathbf{A} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Eine Matrix ist aus Vektoren aufgebaut, wobei ein Vektor $\vec{l_s} \in \mathbb{Z}^{m \times 1}$ (kurz $\mathbb{Z}^m$) einen Spaltenvektor und ein Vektor $\vec{l_z} \in \mathbb{Z}^{1 \times n}$ einen Zeilenvektor von $\mathbf{A}$ bezeichnet. Vektoren sind demnach spezielle Matrizen. Vektoren werden im Allgemeinen durch einen Pfeil über dem Bezeichner gekennzeichnet. Es existieren jedoch zwei Ausnahmen. Der später eingeführte Markierungsvektor wird ohne diesen Pfeil angegeben und der Nullvektor wird durch Symbol $\mathbf{0}$ repräsentiert. $\mathbf{A}^T$ bezeichnet die Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$, hierbei gilt für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ und für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$, dass $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$.

Sprachen Sei A ein endliches Alphabet und $n \in \mathbb{N}$. Eine *Sequenz* über A der Länge n ist eine Funktion $\sigma : \{i \in | \ 1 \leq i \leq n\} \to A$ und wird als Wort über A der Länge n bezeichnet. Wenn $n > 0$ und $\sigma(1) = a_1, \ldots, \sigma(n) = a_n$ ist, dann wird die Sequenz σ als $a_1 \ldots a_n$ geschrieben, es gilt dann $\sigma \in A^n$ der Menge aller Wörter der Länge n ($A^n = \{a_1 \ldots a_n \mid a_i \in A, 1 \leq i \leq n\}$). Das leere Wort wird mit λ bezeichnet. Die Menge A^* ist die Menge aller endlichen Wörter und die Menge $A^+ = A^* \setminus \{\lambda\}$ die Menge aller Wörter ohne das leere Wort. Mit A^ω wird die Menge der unendlichen Wörter (ω-*Wörter*) über A beschrieben. Eine beliebige Menge von endlichen und unendlichen Wörtern wird als *Sprache* bezeichnet. Ein ω-Wort σ kann als Abbildung $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow A$ gesehen werden (d. h. $\sigma = \sigma(0)\sigma(1)\dots$). Mit σ^i wird der i-te Suffix von σ bezeichnet (d. h. $\sigma^i = \sigma(i)\sigma(i+1)\dots$). Die Menge $\mathit{Pref}(\sigma) = \{\sigma' \mid \exists\sigma''$, so dass $\sigma = \sigma'\sigma''\}$ bezeichnet die Menge aller Präfixe der Schaltfolge σ. Eine Abbildung $\Pi : A \longrightarrow A'$, wobei $A' \subseteq A$ gilt, wird als Projektion eines Wortes auf A' bezeichnet und in der Form $\Pi_{A'}(\sigma)$ notiert. Die Projektion wird induktiv wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\Pi_{A'}(\lambda) &= \lambda,\\ \Pi_{A'}(\sigma a) &= \begin{cases}\sigma, & \text{falls } a \in A \setminus A'\\ \sigma a, & \text{falls } a \in A'\end{cases}\end{aligned}$$

Mit $|\sigma|$ wird die Anzahl der Elemente des Wortes σ bezeichnet. Das ist eine Abbildung $\# : A \longrightarrow \mathbb{N}$.

Graphen Ein *gerichteter Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ mit einer Menge V von Knoten und einer Menge $E \subset V \times V$ von Kanten (auch Bögen). Eine Kante $(u, v) \in E$ ist gerichtet vom Knoten u zum Knoten v. Gegeben seien zwei gerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$. Eine bijektive Abbildung $\phi : V_1 \longrightarrow V_2$ heißt *Graphisomorphie* von G_1 nach G_2, wenn für alle Kanten gilt:

$$\begin{aligned}(v_i, v_j) \in E_1 &\iff (\phi(v_i), \phi(v_j)) \in E_2,\\ \{v_i, v_j\} \in E_1 &\iff \{\phi(v_i), \phi(v_j)\} \in E_2.\end{aligned}$$

2.2 Petrinetze

Petrinetze sind ein Formalismus zur Modellierung und Analyse verteilter und reaktiver Systeme. In diesem Abschnitt werden die Notationen grundlegender Begriffe dieses Formalismus eingeführt und Eigenschaften definiert, die für diese Arbeit von Interresse sind. Die Definitionen dieses Abschnitts sind angelehnt an den Definitionen aus [Sta90, Rei82].

2.2.1 Definition und Eigenschaften

Es existieren viele Klassen von Petrinetzen und dementsprechend viele Definitionen hierfür. In dieser Arbeit sollen ausschließlich *Platz-Transitions-Netze* (P/T-Netze) betrachtet werden. Diese Petrinetze bestehen aus einer Menge von Plätzen und einer Menge von Transitionen. Die Menge der Plätze und die Menge der Transitionen sind disjunkt. Des Weiteren existiert eine Flussrelation, die beschreibt, wie die Menge der Plätze und die Menge der Transitionen miteinander verbunden sind. Zusätzlich gilt die Einschränkung, dass nur Plätze mit Transitionen und umgekehrt miteinander verbunden werden dürfen. Es dürfen keine zwei Plätze und keine zwei Transitionen direkt miteinander verbunden sein. Eine formale Definition für P/T-Netze wird im Folgenden gegeben.

Definition 2.1 (*P/T-Netz*)

Ein Tripel $N = (P, T, F)$ bezeichnet ein P/T-Netz, *wenn folgendes gilt:*

- $(P \cup T, F)$ *ist ein gerichteter Graph, wobei* $P \cap T = \emptyset$ *gilt,*
- $F : (P \times T) \cup (T \times P) \to \mathbb{N}$ *bezeichnet eine Abbildung von einer zweistelligen Relation, der* Flussrelation, *in die natürlichen Zahlen.*

Die Menge P bezeichnet die Menge der Plätze und T die Menge der Transitionen. Ist für ein Knotenpaar $(x, y) \in (P \times T) \cup (T \times P)$*: F(x,y)>0, exsitiert eine Kante vom Knoten x zum Knoten y.*

⌟

Neben dem präzisen mathematischen Formalismus haben Petrinetze eine einfache grafische Darstellung. Grafisch notiert wird ein Platz durch einen Kreis und eine Transition durch ein schwarz ausgefülltes Rechteck. Der Fluss (Kante) von einem Knoten u zu einem anderen Knoten v, $F(u, v)$, wird durch einen Pfeil dargestellt. Ist $F(u, v) > 1$, wird die Zahl neben den Pfeil geschrieben, eine 1 hingegen wird weggelassen. Marken werden durch schwarze Punkte innerhalb eines Platzes dargestellt, solange die Anzahl der Marken nicht grösser als zwei ist. Falls mehr als zwei Marken auf einem Platz sind, wird die entsprechende Anzahl als arabische Ziffer in diesen Platz eingetragen.

Definition 2.2 (*Vor- und Nachbereich*)

Gegeben sei ein P/T-Netz $N = (P, T, F)$. *Für* $x, y \in P \cup T$ *bezeichnet*

(a) $x^\bullet = \{y \mid F(x, y) \geq 1\}$ *den* Nachbereich *von x und*

(b) ${}^\bullet x = \{y \mid F(y, x) \geq 1\}$ *den* Vorbereich *von x.*

Für $X \subseteq (P \cup T)$ *sei* ${}^\bullet X = \bigcup_{x \in X} {}^\bullet x$ *und* $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$.

⌟

Um unterschiedliche Zustände eines Netzes beschreiben zu können, werden sogenannte *Marken* eingeführt. Eine Verteilung der Marken über die Plätze repräsentiert einen *Zustand* des Petrinetzes.

Definition 2.3 (*Markierung*)

Gegeben sei ein P/T-Netz $N = (P, T, F)$. *Eine Abbildung*

$$m : P \to \mathbb{N}$$

wird als Markierung *von P bezeichnet. Die Markierung* $m \in \mathbb{N}^{1 \times |P|}$ *bezeichnet einen Zeilenvektor. Sei eine Teilmenge* $P' \subseteq P$ *gegeben, dann ist* $m|_{P'} = m'$ *eine Abbildung* $m' : P' \longrightarrow \mathbb{N}$ *und bezeichnet die* Projektion von m auf P'.

⌟

Eine spezielle Markierung ist die initiale Belegung aller Plätze eines Netzes. Mit dieser speziellen Markierung kann im Folgenden der Begriff eines *Netzsystems* formalisiert werden.

Definition 2.4 (*P/T-Netzsystem*)

Gegeben sei ein P/T-Netz $N = (P, T, F)$ *und eine Anfangsmarkierung* M_0 *von P.* $\Sigma = (N, M_0)$ *wird als* P/T-Netzsystem *bezeichnet. Wenn* $\forall f \in F : f \leq 1$, *wird das Netzsystems* Σ *als* gewöhnlich *bezeichnet.*

⌟

Für P/T-Netzsystem verwenden wir synonym den Begriff Netzsystem. Bisher wurden nur statische Elemente wie Zustand, Transition sowie Flussrelation beschrieben. Die Dynamik der Zustandsübergänge wird im Folgenden definiert. Hierbei verändern Transitionen unter ganz bestimmten Vorbedingungen die Markierung der Platzmenge. Transitionen *produzieren* bzw. *konsumieren* Marken. Dies soll nun definiert werden.

Definition 2.5 (*Schaltvorgang*)

Gegeben sei ein P/T-Netz $N = (P, T, F)$, eine Markierung m von P und eine Transition $t \in T$.

(a) Die Transition t hat Konzession *bzw. ist* aktiviert *bei der Markierung m (auch als $m \xrightarrow{t}$ notiert), wenn für alle Plätze $p \in {}^{\bullet}t$ gilt: $m(p) \geq F(p,t)$.*

(b) Wenn t Konzession bei m hat, darf t schalten*. Dadurch entsteht eine neue Markierung m' (notiert als $m \xrightarrow{t} m'$), wobei für alle $p \in P$ gilt:*

$$m'(p) = \begin{cases} m(p) - F(p,t) + F(t,p) & \textit{falls } p \in {}^{\bullet}t \cap t^{\bullet}, \\ m(p) + F(t,p) & \textit{falls } p \in t^{\bullet} \setminus {}^{\bullet}t, \\ m(p) - F(p,t) & \textit{falls } p \in {}^{\bullet}t \setminus t^{\bullet}, \\ m(p) & \textit{sonst.} \end{cases}$$

⌟

Ein Wort über der Menge der Transitionen T wird als *Schaltfolge* bezeichnet. Sei $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ ein Netzsystem, dann bezeichnet $\mathcal{R}_\Sigma(m) = \{m' \mid \exists \omega : \omega \in T^* \wedge m \xrightarrow{\omega} m'\}$ die Menge aller von M in N erreichbaren Markierungen. Die Menge aller Schaltfolgen, die von der Anfangsmarkierung M_0 Transition für Transition geschaltet werden können, wird mit $L_\Sigma(M_0) = \{\omega \mid \exists m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) : m \xrightarrow{\omega} m'\}$ bezeichnet. Die Sprache $L^*_\Sigma(M_0)$ ist die Menge aller endlichen Schaltfolgen, die vom Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ akzeptiert werden. Mit $L^\omega_\Sigma(M_0)$ wird die Menge aller unendlichen Schaltfolgen, die vom Netzsystem Σ akzeptiert werden, bezeichnet. Es gilt $L_\Sigma(M_0) = L^*_\Sigma(M_0) \cup L^\omega_\Sigma(M_0)$. Im Folgenden sollen einige der Eigenschaften von Netzsystemen definiert werden.

Definition 2.6 (*Dynamische Eigenschaften von Systemen*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und sei $n \in \mathbb{N}^+$.

(1) $M : P \to \mathbb{N}$ ist n-beschränkt, falls $\forall p \in P : m(p) \leq n$ gilt. Σ ist n-beschränkt, wenn gilt $\forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) : p$ ist n-beschränkt. Ein 1-beschränktes P/T-Netzsystem wird sicher *genannt.*

(2) Eine Transition $t \in T$ ist lebendig*, falls $\forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \exists m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) : m' \xrightarrow{t}$.*

(3) Eine Markierung $m : P \to \mathbb{N}^{|P|}$ heißt tot*, falls $\nexists t \in T \nexists m' \in \mathcal{R}_\Sigma(m) : m' \xrightarrow{t}$. Das Netzsystem Σ besitzt eine* Verklemmung *(engl.* deadlock*), wenn $\exists m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) : m$ ist tot.*

(4) Das Netzsystem Σ ist lebendig*, falls alle $t \in T$ lebendig sind.*

⌟

Die Beschränktheit eines Netzes klassifiziert Netze insofern, dass für beschränkte Netzsysteme die Menge der erreichbaren Markierungen endlich ist. Für unbeschränkte Netzsysteme hingegen ist die Menge der erreichbaren Markierungen und somit der Zustandsraum unendlich.

Des Weiteren kann eine Teilmenge aller endlichen von einem Netzsystem akzeptierten Schaltfolgen definiert werden, die Menge aller akzeptierten *maximalen* Schaltfolgen, $L_{\Sigma}^{\max}(M_0) \subseteq L_{\Sigma}^{*}(M_0)$, die zu toten Markierungen führen. Diese Menge ist, wie folgt, definiert: $L_{\Sigma}^{\max}(M_0) = \{\sigma \in T^* \mid \exists m \in \mathcal{R}_{\Sigma}(M_0) : M_0 \xrightarrow{\omega} m$ und m ist tot$\}$.

2.2.2 Zustandsgleichung und Invarianten

Eine algebraische Repräsentation der Menge der erreichbaren Markierungen eines Netzsystems $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ ist die *Zustandsgleichung*. Sei $M \in \mathcal{R}_{\Sigma}(M_0)$ eine erreichbare Markierung und $p \in P$ ein Platz, dann kann die Anzahl der Marken von p in m wie folgt berechnet werden: Die Anzahl der Marken, die p in M_0 hat, und die Differenz der Marken, die vom Vorbereich produziert und vom Nachbereich konsumiert werden. Daraus resultiert die folgende Gleichung:

$$m(p) = M_0(p) + \sum_{t \in {}^\bullet p} \#t \cdot F(t,p) - \sum_{t \in p^\bullet} \#t \cdot F(p,t),$$

wobei $\#t$ die Anzahl des Auftretens von t in der Schaltfolge $\sigma = t_1 \dots t_m$ ist. Es kann ein Vektor definiert werden, der für jede Transition eines Netzes die Anzahl dieser Transition in einer beliebigen Schaltfolge enthält.

Definition 2.7 (*Parikh-Vektor*)

Für jede Schaltfolge $\sigma \in T^*$ bezeichnet $\boldsymbol{\sigma} = (\#t_1, \dots, \#t_n)^T$ den Parikh-Vektor *von σ. Das ist eine Abbildung von T in $\mathbb{N}$, die für alle $t \in T$ die Anzahl des Vorkommens von t in σ als Wert hat.*

⌟

Seien für ein beliebiges Petrinetz $N = (P, T, F)$ die Menge der Plätze $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ und die Menge der Transitionen $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ durchnummeriert, dann kann das Folgende definiert werden.

Definition 2.8 (*Inzidenzmatrix*)

Es sei $N = (P, T, F)$ ein P/T-Netz. Als Inzidenzmatrix *von N (engl. incidence matrix) wird die Matrix*

$$\mathbf{N}(p,t) = \begin{cases} F(t,p) - F(p,t) & \textit{falls } p \in t^\bullet \cap {}^\bullet t, \\ F(t,p) & \textit{falls } p \in t^\bullet, \\ -F(p,t) & \textit{falls } p \in {}^\bullet t, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

bezeichnet.

⌟

Die Inzidenzmatrix $\mathbf{N}$ ist eine $P \times T$-Matrix. Mit Hilfe des Parikh-Vektors und der Inzidenzmatrix kann eine algebraische Repräsentation der erreichbaren Markierungen formuliert werden. Die oben genannte Gleichung kann dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$m = M_0 + (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma})^T.$$

Dies ist die Zustandsgleichung von Σ. Sei $\vec{l_p} = (\mathbf{N}(p, t_1), \ldots, \mathbf{N}(p, t_{|T|}))$ der Inzidenzvektor eines Platzes p, d. h. die p entsprechende Zeile der Inzidenzmatrix $\mathbf{N}$, dann gilt

$$m(p) = M_0(p) + \vec{l_p} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Wenn das Produkt aus der Inzidenzmatrix und einem Parikh-Vektor 0 ist, dann wird ein möglicher Kreis im Erreichbarkeitsgraphen beschrieben. Solch ein spezieller Parikh-Vektor wird *T-Invariante* genannt. Das Schalten dieser Transitionen ändert nichts an der Markierung. Für die *T-Invariante* existiert ein entsprechendes Dual für Plätze, die *P-Invariante*. Dies ist ein Vektor $\vec{Y} \in \mathbb{Z}^{|P|}$, für den $\vec{Y}^T \cdot \mathbf{N} = 0$ gilt. Eine Verallgemeinerung der P-Invariante ist die *Subinvariante*. Der Vektor $\vec{Y}$ wird als Subinvariante bezeichnet, wenn

$$\vec{Y}^T \cdot \mathbf{N} \leq 0.$$

Der Beweis von Satz 11.6 auf Seite 114 in [Sta90] kann leicht abgewandelt werden, so dass folgendes gilt:

$$\vec{Y}^T \cdot \mathbf{N} \leq 0 \Longrightarrow (\forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \, : \, \vec{Y}^T \cdot m \leq \vec{Y}^T \cdot m_0).$$

Ist $\vec{Y}$ eine Subinvariante von einem Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, dann gilt für jede in Σ erreichbare Markierung $m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0)$ und für jeden Platz $p \in P$, dass $\vec{Y}(p) \cdot m(p) \leq \vec{Y}(p)M_0(p)$. Gilt für eine Komponente $\vec{Y}(p) \geq 1$, dann wird dieser Platz p bei keiner in Σ erreichbaren Markierung mehr Marken enthalten, als bei der Anfangsmarkierung M_0.

2.3 Temporale Logik und Model Checking

Der Formalismus der Petrinetze bietet unter anderem Methoden zur Analyse von Systemen. Eine spezielle Analysemethode ist die Verifikation von Systemeigenschaften. Im vorherigen Kapitel wurden bereits zwei Systemeigenschaften präsentiert: die Lebendigkeit und die Beschränktheit. Neben diesen beiden existieren weitere Eigenschaften, die für die Verifikation von Systemmodellen relevant sind. Eine interressante Systemeigenschaft für verteilte Systeme ist hierbei die *Fairness*. Bei der Verifikation von Lebendigkeitseigenschaften bzw. Fairnesseigenschaften geht es darum zu zeigen, inwiefern bestimmte Aktionen von einem System (immer wieder) ausgeführt werden. Es gilt festzustellen, ob Plätze in einem System immer wieder markiert werden bzw. darum zu zeigen, wenn ein Systemzustand unendlich oft erreicht wird, ein anderer Systemzustand ebenfalls unendlich oft erreicht wird. Zur Spezifikation solcher Aussagen werden im Allgemeinen temporale Logiken genutzt. Es existieren *branching time* und *linear-time* Logiken. Fairnesseigenschaften werden im Allgemeinen mit einer *linear-time logic* (LTL) [Pnu77] spezifiziert. Die nächsten Abschnitte definieren Syntax und Semantik von LTL und eine *zustands-* und *aktionsbasierte* Variante für Petrinetze. Alle Definitionen der Syntax und der Semantik der LTL in Kap. 2.3.1 basieren auf den Definitionen aus [Pnu77]. Die Definition der zustands- und aktionsbasierten Variante für Petrinetze in Kap. 2.3.2 ist [Sch06] entnommen.

2.3.1 Linearzeit-Temporallogik

Fairnesseigenschaften eines Modells können mit LTL spezifiziert werden. Diese Eigenschaften werden durch LTL-Formeln beschrieben. Solche LTL-Formeln sind aus *atomaren Propositionen*, *temporal logischen Operatoren* sowie den aussagenlogischen Operatoren $\neg$ und $\wedge$ zusammengesetzt.

Definition 2.9 (*Syntax von LTL*)

Gegeben sei eine Menge AP von atomaren Propositionen. LTL-Formeln *sind dann wie folgt induktiv definiert:*

- ***wahr** beschreibt eine LTL-Formel,*
- *$\theta \in AP$ beschreibt eine LTL-Formel,*
- *beschreiben φ und ψ LTL-Formeln, dann stellen auch*

$$\neg\varphi,\ \varphi \wedge \psi,\ \mathcal{X}\phi \ \textit{ und } \ \varphi\mathcal{U}\psi$$

LTL-Formeln dar.

⌟

$\mathcal{X}$ und $\mathcal{U}$ sind der *Next*- und *Until*-Operator. Ein $\mathcal{X}$-freies Fragment von LTL wird als LTL-$\mathcal{X}$ bezeichnet. Darüber hinaus werden zwei weitere temporal logische Operatoren zur Vereinfachung definiert:

$$\mathcal{F}\varphi = \textbf{wahr}\,\mathcal{U}\,\varphi \qquad \mathcal{G}\varphi = \neg\mathcal{F}\neg\varphi.$$

Der Operator $\mathcal{F}\varphi$ (*finally*φ) bedeutet, dass irgendwann schlussendlich φ gilt. Der Operator $\mathcal{G}\varphi$ (*globally*φ) hingegen gibt an, dass φ immer gilt. Mit diesen beiden Operatoren können sehr einfach Fairnesseigenschaften formuliert werden. Fairnesseigenschaften eines Systems beschreiben beispielsweise, wann immer eine Resource angefordert wird, gewährt das System auch den Zugriff auf diese Resource. Wenn die Anforderung einer Ressource durch φ und die Gewährung des Zugriffs mit ψ formuliert wird, dann beschreibt die LTL-Formel $\mathcal{GF}\varphi \Longrightarrow \mathcal{GF}\psi$ diese Fairnesseigenschaft. Als nächstes wird die Semantik von LTL formal definiert.

Definition 2.10 (*Semantik von LTL*)

Gegeben sei eine LTL-Formel φ über der Menge von atomaren Propositionen AP. Die Abbildung $AP(\varphi)$ bezeichnet die Menge von atomaren Propositionen, die in φ vorkommen. Die LTL-Formel φ definiert eine Sprache $L(\varphi)$ von ω-Wörtern über der Potenzmenge von $AP(\varphi)$, die φ erfüllen. Die Erfüllbarkeitsrelation $\models$ ist wie folgt über der Struktur von φ definiert (dabei bezeichne $\xi \models \varphi$, dass das ω-Wort ξ über dem Alphabet $2^{AP(\varphi)}$ die Formel φ erfüllt):

$$\begin{array}{lll}
\xi \models \textbf{\textit{wahr}} & & \\
\xi \models \theta \in AP & \Longleftrightarrow & \pi \in \xi(0) \\
\xi \models \neg\varphi & \Longleftrightarrow & \xi \not\models \varphi \\
\xi \models \varphi \wedge \psi & \Longleftrightarrow & \xi \models \varphi \ \textit{ und } \ \xi \models \psi \\
\xi \models \mathcal{X}\varphi & \Longleftrightarrow & \xi^1 \models \varphi \\
\xi \models \varphi\mathcal{U}\psi & \Longleftrightarrow & \exists i : (\xi^i \models \psi) \wedge (\forall j < i : \xi^j \models \varphi).
\end{array}$$

⌟

2.3.2 Zustands- und aktionsbasierte LTL

Für Petrinetze können zustands- sowie aktionsbasierte temporale Logiken definiert werden. Bei diesen operieren die Elemente der Menge der atomaren Propositionen AP entweder auf der Menge der erreichbaren Markierungen oder auf der Menge der Transitionen.

Die aktionsbasierte temporale Logik assoziiert die Menge der atomaren Propositionen mit den Transitionen eines Netzsystems. Für jede Transition $t \in T$ eines Netzsystems $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ existiert eine atomare Proposition $\theta_t \in AP$. Damit entschieden werden kann, ob eine unendliche Schaltfolge $\sigma = t_1 t_2 \ldots$ eine LTL-Formel φ erfüllt, muss diese Schaltfolge in ein ω-Wort über dem Alphabet $2^{AP(\varphi)}$ transformiert werden. Die Abbildung $\nu : T \to 2^{AP(\varphi)}$ setzt diese Transformation folgendermaßen um:

$$\nu(t) = \begin{cases} \{\theta_t\} & \text{falls } \theta_t \in AP(\varphi) \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung ν kann im Allgemeinen auch auf ω-Wörter erweitert werden: $\nu : T^\omega \to (2^{AP(\varphi)})^\omega$ mit $\nu(\sigma) = \nu(t_1)\nu(t_2)\ldots$. Es gilt:

$$\sigma \models^\nu \varphi \iff \nu(\sigma) \in L(\varphi),$$

wobei $\sigma \models^\nu \varphi$ bezeichnet, dass σ die LTL-Formel φ unter der Bedingung ν erfüllt. Für ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ gilt dann:

$$\Sigma \models \varphi \iff (\forall \sigma \in L^\omega_\Sigma(M_0) \,:\, \sigma \models^\nu \varphi).$$

In der zustandsbasierten temporalen Logik operiert AP auf der Menge der Plätze eines Netzsystems bzw. auf der Menge der erreichbaren Markierungen (und somit den Zuständen des Netzsystems). Eine atomare Proposition $\theta_p \in AP$ repräsentiert hierbei einen Platz $p \in P$ und $m(\theta_p)$ gibt an, wieviel Marken p enthält. Die unendliche Schaltfolge $M_0 \xrightarrow{t_1} m_1 \xrightarrow{t_2} \ldots$ wird mit einer Abbildung $\tau : T^\omega \longrightarrow (\mathbb{N}^{|P|})^\omega$ in eine unendliche Markierungsfolge $\xi = M_0 m_1 \ldots$ überführt. Die Abbildung τ wird wie folgt induktiv definiert. Für alle unendlichen Schaltfolgen $\sigma \in L^\omega_\Sigma(M_0)$ und $i \in \mathbb{N}^+$:

$$\begin{aligned} \tau(\sigma(0)\,\sigma^1) &= M_0\,\tau(\sigma^1) \\ \tau(\sigma(i)\,\sigma^{i+1}) &= \tau(\sigma(i-1))\,m_i\,\tau(\sigma^{i+1}) && \text{wobei } m_{i-1} \xrightarrow{\sigma(i-1)} m_i \\ & && \text{mit } m_{i-1}, m_i \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0). \end{aligned}$$

Die unendliche Markierungsfolge eines Netzsystems kann mithilfe einer Abbildung $\nu : \mathbb{N}^{|P|} \to 2^{AP(\varphi)}$, wobei für jede Markierung $m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0)$

$$\nu(m) = \{\theta_p \in AP(\varphi) \,|\, m(p) \geq m(\theta_p)\}$$

gilt, in ein ω-Wort der Sprache $L(\varphi)$ transformiert werden. Auch hier kann die Abbildung ν auf die ω-Wörter erweitert werden: $\nu : (\mathbb{N}^{|P|})^\omega \to (2^{AP(\varphi)})^\omega$ mit $\nu(\xi) = \nu(m_1)\nu(m_2)\ldots$. Analog zu der aktionsbasierten temporalen Logik gilt dann für ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$:

$$\Sigma \models^\nu \varphi \iff (\forall \xi \in \tau(L^\omega_\Sigma(M_0)) \,:\, \xi \models^\nu \varphi),$$

wobei $\xi \models^\nu \varphi \iff \nu(\xi) \in L(\varphi)$ gilt.

Eine LTL-Formel φ *überwacht* einen Knoten x (Platz oder Transition), falls ein atomare Proposition $\theta_x \in AP$ existiert und θ_x in der LTL-Formel φ vorkommt.

2.3.3 Reduzierte LTL-Formeln

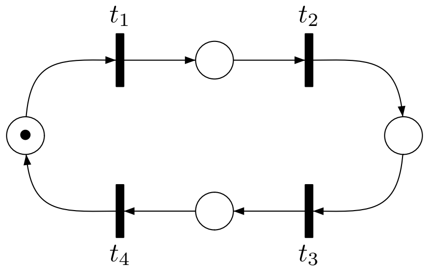
In dieser Arbeit vergleichen wir strukturelle Reduktionstechniken für Petrinetze. Diese reduzieren die Struktur eines Netzsystems. Dies bedeutet, dass Transitionen bzw. Plätze aus dem Netzsystem entfernt werden. Soll überprüft werden, ob LTL-Eigenschaften durch das Anwenden einer Reduktionstechnik erhalten bleiben, dann ist klar, dass die entsprechenden LTL-Formeln keine aus dem Netzsystem entfernten Elemente überwachen dürfen. Dies bedeutet für die aktionsbasierte Variante von LTL, dass die Menge der atomaren Propositionen AP auf keine Transitionen verweisen darf, die aus dem Netzsystem enfernt wurden. Analog hierzu muss bei der zustandsbasierten Variante AP mit einer reduzierten Markierung assoziiert sein. D. h. eine zustandsbasierte LTL-Formel betrachtet keine aus dem Netzsystem entfernten Plätze. Solche *reduzierten* LTL-Formeln werden mit LTL^r bezeichnet.

Im Allgemeinen erhält das Entfernen von Transitionen keine LTL-Eigenschaften sondern nur LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften. Dies demonstrieren wir anhand eines Beispiels. Sei $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ ein Netzsystem. Die unendliche Schaltfolge $\sigma = t_1 t_2 t_3 t_4 t_1 t_2 t_3 t_4 \ldots$ ist die einzige von Σ akzeptierte ω-Schaltfolge: $L^{\omega}_{\Sigma}(M_0) = \{\sigma\}$. Durch das Anwenden einer strukturellen Reduktionstechnik werden die Transitionen t_2 und t_3 aus Σ entfernt und eine neue Transition t_{23} dem Netzsystem Σ hinzugefügt. Sei $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ das reduzierte Netzsystem und es gilt $L^{\omega}_{\Sigma_r}(M_0^r) = \{\sigma'\}$ mit $\sigma' = t_1 t_{23} t_4 t_1 t_{23} t_4 \ldots$. In Abbildung 2.1 sind zwei Netzsysteme dargestellt, die diese Bedingungen erfüllen. Eine aktionsbasierte LTL-Formel darf die Transitionen t_2 und t_3 nicht betrachten. Es gilt $\sigma' \models \mathcal{X}\mathcal{X}t_4$ und $\sigma \not\models \mathcal{X}\mathcal{X}t_4$. Das reduzierte Netzsystem erfüllt die LTL^r-Formel $\mathcal{X}\mathcal{X}t_4$, das ursprüngliche Netzsystem jedoch nicht.

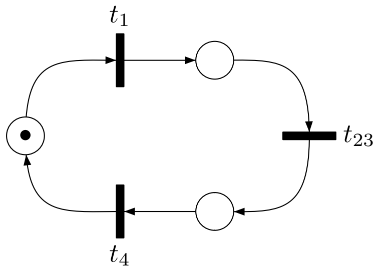
Die Mehrzahl der strukturellen Reduktionstechniken, die in dieser Arbeit betrachtet werden, basieren auf dem Prinzip, dass ein Platz entfernt wird und der Vor- mit dem Nachbereich dieses Platzes in irgendeiner Form fusioniert wird. Für diese Reduktionstechniken reicht es, den Erhalt von LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften zu überprüfen. Weitere in dieser Arbeit betrachtete Reduktionstechniken erhalten die Menge der akzeptierten Schaltfolgen vollständig und entfernen nur Plätze. Das Anwenden dieser Reduktionstechniken erhält natürlich aktionsbasierte LTL-Eigenschaften jedoch nur reduzierte zustandsbasierte LTL^r-Eigenschaften. Daher überprüfen wir nur, ob das Anwenden einer Regel aktionsbasierte (bzw. zustandsbasierte) LTL-Formeln oder LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften erhält.

2.3.4 Model Checking und strukturelle Reduktionstechniken

Beim Model Checking gilt es bestimmte Eigenschaften eines Systems zu verifizieren. Da in dieser Arbeit Petrinetze Gegenstand der Betrachtung sind, interressieren uns Eigenschaften von Petrinetzen. Interressante Eigenschaften wurden in den vorhergehenden Abschnitten benannt und formal definiert. Das Problem hierbei ist, dass die Eigenschaften zum Teil über unendlichen Schaltfolgen verifiziert werden müssen. Dies kann z. B. über den Zustandsraum erfolgen, solange ein Netzsystem unbeschränkt ist. Dies führt jedoch zum Problem der *Explosion*



(a) Netzsystem Σ



(b) reduziertes Netzsystem Σ_r

Abbildung 2.1: Das Netzsystem Σ wird zum einem Netzsystems Σ_r reduziert.

des Zustandraums. Petrinetze verwalten die Komplexität von großen Systemen. Während die Anzahl der Elemente eines Petrinetzes linear abhängig von der Größe des zu modellierenden Systems ist, wächst der Zustandsraum exponentiell mit der Größe des zu modellierenden Systems [DJ01].

Als einer von wenigen Formalismen bieten Petrinetze die Möglichkeit, bereits die Struktur eines Petrinetzes zu reduzieren und dabei bestimmte Eigenschaften zu bewahren. Das reduzierte Netzsystem erfüllt dieselben Eigenschaften wie das ursprüngliche Netzsystem, dessen Zustandsraum reduziert worden ist. In der Literatur existiert eine Vielzahl an wissenschaftlichen Ausarbeitungen, die solche strukturellen Reduktionstechniken beschreiben. Alle von uns betrachteten Reduktionstechniken sind regelbasiert. Es werden Regeln definiert, wie ein Netzsystem in ein reduziertes Netzsystem überführt wird. Zum einen wird nach Mustern gesucht, die durch andere Muster ersetzt werden. Andere Regeln verlangen, dass das gesamte Netzsystem bestimmte Kriterien erfüllt, z. B. muss eine Lösung eines linearen Optimierungproblems existieren, wobei (Sub)Invarianten des Netzsystems zu berücksichtigen sind.

Alle diese Regeln entfernen Plätze bzw. Transitionen und definieren die Flussrelation im reduzierten Netzsystem. In den folgenden drei Kapitel stellen wir solche regelbasierten Reduktionstechniken aus der Literatur vor und analysieren inwiefern weitere Eigenschaften erhalten werden und ob die Anwendbarkeit auf Netzsysteme im Allgemeinen erweitert werden kann. Wir untersuchen dies, da die meisten Regeln für sichere und gewöhnliche Netzsysteme konzipiert wurden. In Kap. 3 werden Reduktionstechniken betrachtet, die nur Plätze aus einem Netzsystem entfernen. Anschließend werden in Kap. 4 Reduktionstechniken betrachtet, die sowohl die Menge der Transitionen als auch die Platzmenge reduzieren. Reduktionstechniken, die nur Transitionen aus einem Netzsystem entfernen, werden im Kap. 5 analysiert. Abschließend werden in Kap. 6 die Reduktionstechniken einander gegenübergestellt und untereinander verglichen.

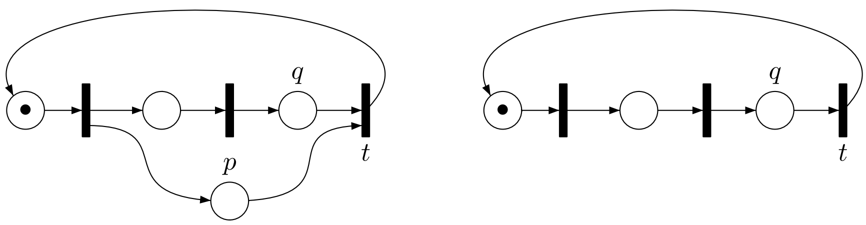
Kapitel 3

Entfernen von Plätzen

In verschiedenen wissenschaftlichen Arbeiten werden Reduktionstechniken vorgestellt, die die Platzmenge eines gegebenen Netzsystems reduzieren und die Menge der Transitionen nicht verändern. Einige dieser Reduktionstechniken aus [ES01, STMD96] werden in diesem Kapitel präsentiert. Esparza und Schröter präsentieren in [ES01] eine Reduktionstechnik, die unter anderem die Inzidenzmatrix und somit die gesamte Struktur eines gegebenen Netzsystems analysiert. Shatz et al. hingegen präsentieren in [STMD96] Reduktionstechniken, die die lokalen Gegebenheiten eines Netzsystems analysieren. Diese Reduktionstechniken basieren auf dem Finden von ganz bestimmten Mustern.

3.1 Implizite Plätze

In [ES01] präsentieren Esparza und Schröter unter anderem eine Regel, die implizite Plätze entfernt. Ein Beispiel aus [ES01] für eine solches Netzssystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, das einen impliziten Platz $p \in P$ enthält, ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Immer wenn der Platz $q \in P$ markiert ist, enthält der Platz p bereits eine Marke. Das Schalten von $t \in T$ hängt also nicht davon ab, wieviele Marken p enthält. Das Entfernen von p ändert nicht die Menge der akzeptierten Schaltfolgen von Σ. Die Regel, die Esparza und



(a) Netzsystem mit implizitem Platz p

(b) reduziertes Netzsystem

Abbildung 3.1: Implizite Plätze Regel

Schröter in [ES01] zum Entfernen impliziter Plätze vorstellen, basiert auf dem Erkennen impliziter Plätze, die Colom und Silva in [CS91] präsentieren. Dieser Ansatz basiert auf dem Lösen einer linearen Optimierungsaufgabe. Esparzas und Schröters Anwendung wird im Folgenden definiert. Alle Definitionen dieses Abschnitts sind [ES01] entlehnt.

Definition 3.1 (*Regel Φ_{ES2} zur Erkennung impliziter Plätze*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Eine Stelle $p \in P$ genügt Φ_{ES2}, wenn das folgende lineare Ungleichungssystem eine Lösung für den Variablenvektor $\vec{Y} \geq \mathbf{0}$ und die Variable μ besitzt:

$$\textit{Minimiere } \vec{Y}^T \cdot M_0 + \mu \textit{, so dass}$$

$$\begin{aligned} \vec{Y}^T \cdot \mathbf{N} &\leq l_p \\ Y(p) &= 0 \\ \forall t_i \in p^\bullet : \sum_{p' \in {}^\bullet t_i} Y(p') \cdot F(p', t_i) + \mu &\geq F(p, t_i) \\ \vec{Y}^T \cdot M_0 + \mu &\leq M_0(p). \end{aligned}$$

Das reduzierte Netz $N_r = (P_r, T_r, F_r)$, das durch Anwendung von Φ_{ES2} gewonnen wird, ist dann wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P_r &= P \setminus \{p\} \\ T_r &= T \\ M_0^r &= M_0|_{P_r} \\ \forall q \in P_r, \forall t \in T_r : & \\ F_r(q,t) &= F(q,t) \\ F_r(t,q) &= F(t,q). \end{aligned}$$

⌟

Schröter und Esparza, beweisen, dass ein ursprüngliches Netzsystem genau dann LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften erfüllt, wenn das reduzierte Netzsystem diese LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften erfüllt. Sie beweisen dies für den Fall, dass das ursprüngliche Netzsystem sicher und gewöhnlich ist. Schröter und Esparza vereinfachen den Ansatz von Colom und Silva aus [CS91], da sie ihre Regeln auf gewöhnliche sichere Netzsysteme anwenden. Die folgende Ungleichung:

$$\forall t_i \in p^\bullet : \sum_{p' \in {}^\bullet t_i} Y(p') \cdot F(p', t_i) + \mu \geq F(p, t_i)$$

vereinfacht sich zu:

$$\forall t_i \in p^\bullet : \sum_{p' \in {}^\bullet t_i} Y(p') + \mu \geq 1,$$

da in gewöhnlichen Netzsystemen immer $F : (P \times T) \cup (T \times P) \longrightarrow \{0, 1\}$ gilt. Colom und Silva beweisen in [CS91], dass durch das Entfernen eines Platzes p, der der Regel Φ_{ES2} genügt, die Menge der akzeptierten Schaltfolgen des ursprünglichen Netzes gleich der Menge des reduzierten Netzes ist, also gilt:

$$L_\Sigma(M_0) = L_{\Sigma_r}(M_0^r). \tag{3.1}$$

Wir folgern hieraus unmittelbar, dass die Erreichbarkeitsgraphen des ursprünglichen und des reduzierten Netzes isomorph sind. Dies bedeutet, es existiert die folgende Abbildung:

$$f_m : \mathcal{R}(\Sigma_r, M_0^r) \longrightarrow \mathcal{R}(\Sigma, M_0) \qquad f \text{ ist bijektiv.} \tag{3.2}$$

Jeder Knoten des Erreichbarkeitsgraphen $\mathcal{R}_{\Sigma_r}(M_0^r)$ repräsentiert einen auf P_r projezierte Markierung $m|_{P_r}$. Mit den Ergebnissen von [CS91] folgern wir:

Proposition 3.2

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{ES2} erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Des Weiteren sei eine aktionsbasierte LTL-Formel (bzw. zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Formel) φ gegeben. Es gelten die folgenden Aussagen:

1. *Σ beschränkt $\Longrightarrow$ Σ_r beschränkt,*
2. *Σ lebendig $\Longleftrightarrow$ Σ_r lebendig,*
3. *$\Sigma \models \varphi \Longleftrightarrow \Sigma_r \models \varphi$.*

┘

Beweis von 3.2:

1. Die Aussage wird über die Kontraposition bewiesen. Es wird gezeigt, dass das ursprüngliche Netzsystem unbeschränkt ist, wenn das reduzierte Netzsystem unbeschränkt ist. Satz 4.3 in [Sta90, S. 40] besagt:

$$\Sigma \,\text{unbeschränkt} \iff \exists \sigma \in T^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) : m \xrightarrow{\sigma} m' \Rightarrow m > m', \tag{3.3}$$

wobei $m > m'$ genau dann gilt, wenn $\forall p \in P : m(p) \geq m'(p)$ und $\exists p \in P : m(p) > m'(p)$ [Sta90]. Weiterhin gilt wegen (3.1) und (3.2):

$$\forall \sigma_r \in L_{\Sigma_r}(M_0^r)\, \exists \sigma \in L_\Sigma(M_0)\, \exists m, m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) : m \xrightarrow{\sigma} m'. \tag{3.4}$$

Es gilt dann die folgende Argumentationskette:

$$\begin{aligned} & \Sigma_r \,\text{unbeschränkt} \\ \overset{(3.3)}{\iff} \quad & \exists \sigma_r \in T_r^*, \exists m_r, m_r' \in \mathcal{R}_{\Sigma_r}(M_0^r) : m_r \xrightarrow{\sigma_r}_r m_r' \Rightarrow m_r > m_r' \\ \overset{(3.4)}{\Longrightarrow} \quad & \exists \sigma \in T^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) : m \xrightarrow{\sigma} m' \Rightarrow m > m' \\ \overset{(3.3)}{\iff} \quad & \Sigma \,\text{unbeschränkt.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt unmittelbar die Behauptung.

2. ($\Longrightarrow$) Der Beweis wird indirekt geführt. Es wird gezeigt, dass, wenn das ursprüngliche Netzsystem lebendig und das reduzierte Netzsystem nicht lebendig ist, die Menge der akzeptierten Schaltfolgen nicht identisch ist. Dies ist ein Widerspruch zu Gleichung (3.1).
Angenommen aus einem lebendigen Netz entsteht durch Anwenden von Φ_{ES2} ein nicht lebendiges Netz. Dann gilt für das ursprüngliche Netz Σ:

$$\forall t \in T\, \forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0)\, \exists m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0)\, \exists \sigma \in L_\Sigma(M_0) : m \xrightarrow{\sigma t} m'.$$

Dies ist äquivalent zur folgenden Aussage:

$$\forall t \in T \, \forall \sigma \in L_{\Sigma}(M_0) \, \exists \sigma' \in L_{\Sigma}(M_0) \, : \, \sigma\sigma' t \in L_{\Sigma}(M_0).$$

Da die Schaltfolge $\sigma\sigma' t$ ein Element der akzeptierten Schaltfolgen ist, ist nach der letzten Gleichung auch $\sigma\sigma' t \sigma'' t$ ein Element der Menge der akzeptierten Schaltfolgen. Wenn dies beliebig fortgesetzt wird und $\sigma_0 = \sigma\sigma'$ gilt, dann erhält man die akzeptierte Schaltfolge $\sigma_0 t \sigma_1 t \ldots \sigma_i t \ldots$, wobei $i \in \mathbb{N}$. Es existiert demnach für jede Transition eine Schaltfolge, in der diese Transition unendlich oft vorkommt. Das reduzierte Netzsystem Σ_r ist nicht lebendig. Dies bedeutet:

$$\exists t \in T \, \exists m \in \mathcal{R}_{\Sigma_r}(M_0^r) \, \forall \sigma_r \in L_{\Sigma_r}(M_0^r) \, \nexists m' \in \mathcal{R}_{\Sigma_r}(M_0^r) \, : \, m \xrightarrow{\sigma_r t} m'.$$

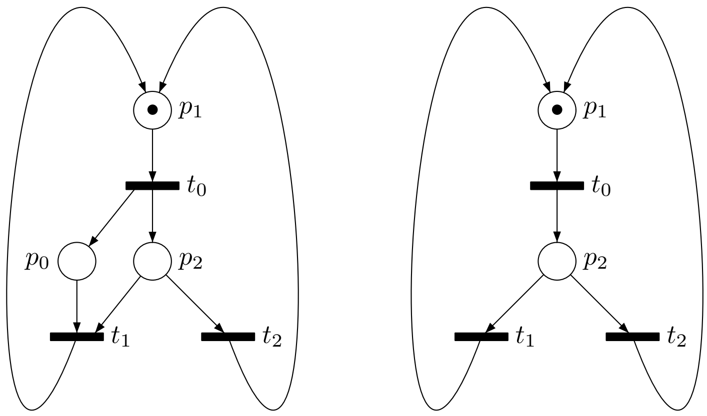
Hieraus folgt, dass für eine Transition keine Schaltfolge existiert, in der diese Transition unendlich oft enthalten ist. Damit wäre die Menge der akzeptierten Schaltfolgen des ursprünglichen Netzes nicht äquivalent zu der des reduzierten Netzes. Dies ist ein Widerspruch zu (3.1).
($\Longleftarrow$) Dies wird analog zu ($\Longrightarrow$) bewiesen.

3. Die Aussage wird für aktionsbasierte LTL-Eigenschaften und zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewiesen.
   (a) aktionsbasierte LTL-Eigenschaften: Wegen (3.1) ist die Menge der akzeptierten Schaltfolgen des ursprünglichen Netzsystems äquivalent zu der Menge der akzeptierten Schaltfolgen des reduzierten Netzsystems. Hiermit folgern wir unmittelbar, dass das ursprüngliche Netzsystem genau dann LTL-Formeln erfüllt, wenn das reduzierte Netzsystem diese LTL-Formeln erfüllt.
   (b) zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften: Mit Satz 1 in [EH00, S. 478] folgt, dass bei Äquivalenz der Mengen der akzeptierten Schaltfolgen des ursprünglichen sowie des reduzierten Netzsystems das ursprüngliche Netzsystem genau dann LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften erfüllt, wenn das reduzierte Netzsystem diese LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften erfüllt. Wegen (3.1) (Äquivalenz der akzeptierten Schaltfolgen.) gilt dann die Behauptung. ■

Wir konnten zeigen, dass eine Reduktion gemäß Regel Φ_{ES2} die Beschränktheit des ursprünglichen Netzes bewahrt. Die Umkehrung dagegen gilt nicht. Ein unbeschränktes Netz kann nach der Reduktion beschränkt sein. In Abbildung 3.2 ist ein Netzsystem aus [CS91] abgebildet, das dies zeigt. Die unendliche Schaltfolge $t_1 t_2 t_1 t_2 \ldots$ führt dazu, dass der Platz p im ursprünglichen Netzsystem Σ unbeschränkt ist. Das reduzierte Netzsystem hingegen ist sicher.

3.2 Vereinigung paralleler redundanter Plätze

In [STMD96] präsentieren Shatz et al. neben weiteren Regeln eine Regel zur Vereinigung paralleler redundanter Plätze. Diese Regel wurde ursprünglich von Murata in [Mur89] eingeführt. Wenn der Vor- und Nachbereich zweier Plätze eines beliebigen Netzsystems jeweils äquivalent sind, dann kann einer der Plätze entfernt werden. In Abbildung 3.3 ist diese Reduktionsregel dargestellt. Alle Definitionen dieses Abschnitts mit Ausnahme von Definition 3.7 basieren auf Definitionen aus [STMD96] oder [Mur89].



(a) Netzsystem Σ mit implizitem Platz p_0

(b) reduziertes Netzsystem Σ_r

Abbildung 3.2: Beispiel für ein unbeschränktes Netzsystem, dass durch Anwenden von Φ_{ES2} zu einem beschränkten Netzsystem reduziert wird.

Definition 3.3 (*Φ_{S2}: Vereinigung paralleler redundanter Plätze*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Zwei Plätze $p, q \in P$ genügen der Regel Φ_{S2} genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

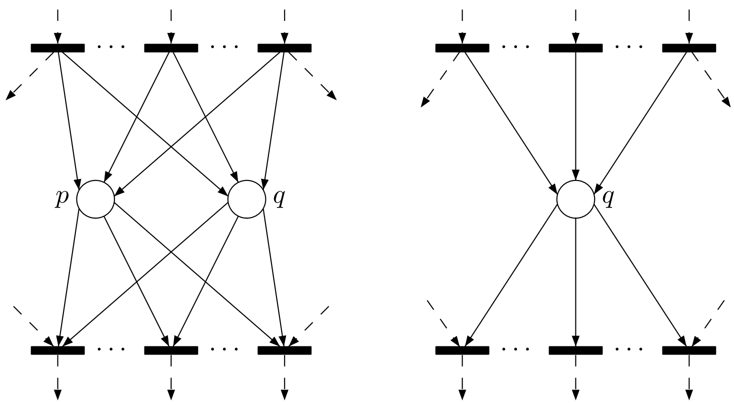
- $q^\bullet = p^\bullet$,
- $^\bullet q = {}^\bullet p$,
- $\forall t \in p^\bullet : F(t, q) = F(t, p) = 1$,
- $\forall t \in {}^\bullet p : F(t, q) = F(t, p) = 1$ *und*
- $M_0(p) = M_0(q) = 0$.

Das durch Anwenden von Φ_{S2} erhaltene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P_r &= P \setminus \{p\} \\ T_r &= T \\ M_0^r &= M_0|_{P_r} \\ \forall q \in P_r, \forall t \in T_r : & \\ F_r(q, t) &= F(q, t) \\ F_r(t, q) &= F(t, q). \end{aligned}$$

⌟

Das ursprüngliche Netzsystem ist genau dann beschränkt bzw. lebendig, wenn das reduzierte Netzsystem beschränkt bzw. lebendig ist [Mur89]. Im Folgenden



(a) Netzsystemstruktur, die der Regel Φ_{S2} genügt

(b) reduziertes Netz

Abbildung 3.3: Vereinigung paralleler impliziter Plätze

beweisen wir, dass das Anwenden dieser Regel die Sprache der akzeptierten Schaltfolgen erhält.

Proposition 3.4

Gegeben sei Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{S2} erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Es gilt

$$L_\Sigma(M_0) = L_{\Sigma_r}(M_0^r).$$

⌟

Beweis von 3.4 : Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Das Schalten irgendeiner Transition aus dem Vor- bzw. Nachbereich von p produziert bzw. konsumiert genau eine Marke $(\forall t \in ({}^\bullet\{p,q\}) \cup (\{p,q\}^\bullet)\, \forall p' \in \{p,q\} : F(p',t) \leq 1 \wedge F(t,p') \leq 1)$. Wir zeigen, dass das Anwenden von Φ_{S2} ein Spezialfall von Φ_{ES2} ist. Es ist also zu zeigen, dass die Lösungsmenge des linearen Optimierungsproblem aus Definition 3.1 nicht leer ist. Die Inzidenzdmatrix ist wie folgt aufgebaut. Der Inzidenzvektor $\vec{l_p}$ enthält für jede Transition aus dem Vorbereich von p eine 1 und für jede Transition des Nachbereichs eine -1. Ansonsten enthält $\vec{l_p}$ Nullen. Für den Inzidenzvektor von q gilt $\vec{l_q} = \vec{l_p}$, da der Vorbereich und der Nachbereich von p und q äquivalent sind. Sei $|p^\bullet| = n$ und $|{}^\bullet p| = m$. Die Inzidenzmatrix lautet dann wie folgt:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} & & & t_1 & \ldots & t_n & t_{n+1} & \ldots & t_{n+m} & & & \end{array} \\
\mathbf{N} = & \left(\begin{array}{cccccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ p \\ q \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Aus der Gleichung $\vec{Y} \cdot \mathbf{N} \leq l_p$ ergibt sich das folgende Ungleichungssystem:

$$\begin{array}{lccccccccr}
(I_1) & \dots & + & y_p & + & y_q & + & \dots & \leq & 1 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \\
(I_n) & \dots & + & y_p & + & y_q & + & \dots & \leq & 1 \\
(I_{n+1}) & \dots & - & y_p & - & y_q & + & \dots & \leq & -1 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \\
(I_{n+m}) & \dots & - & y_p & - & y_q & + & \dots & \leq & -1 \\
(I_{n+m+1}) & \dots & + & 0 \cdot y_p & + & 0 \cdot y_q & + & \dots & \leq & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & \\
(I_{|T|}) & \dots & + & 0 \cdot y_p & + & 0 \cdot y_q & + & \dots & \leq & 0
\end{array}$$

Da $\forall t \in p^\bullet : F(q,t) = 1$ und $Y(p) = 0$ gilt, folgen aus der Bedingung $\forall t \in p^\bullet$: $\sum_{p' \in {}^\bullet t} Y(p') \cdot F(p',t) + \mu \geq F(p,t)$ weitere m Ungleichungen:

$$\begin{array}{llcl}
(I_{|T|+1}) & y_p + y_q + \mu & \geq & 1 \\
\vdots & & \vdots & \\
(I_{|T|+m}) & y_p + y_q + \mu & \geq & 1.
\end{array}$$

Da $M_0(p) = 0$ gilt, ist die letzte Ungleichung des zu lösenden linearen Optimierungproblems:

$$\vec{Y}^T \cdot M_0 + \mu \leq 0.$$

Zusätzlich gelten die folgenden Restriktionen:

$$Y(p) = 0,\ M_0(p) = M_0(q) = 0.$$

Für dieses Ungleichungssystem existiert eine Lösung:

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{|P|} \end{pmatrix} \qquad y_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = q \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \mu = 0.$$

Somit genügt der Platz p der Regel Φ_{ES2}. Da der Platz aus dem Netzsystem entfernt und die entsprechenden angrenzenden Kanten entfernt werden, folgt die Behauptung. ■

Da die Menge der akzeptierten Schaltfolgen des ursprünglichen Netzes zu der des reduzierten Netzes äquivalent ist, können wir analog zum Beweis von 3.4.3 folgendes schlussfolgern:

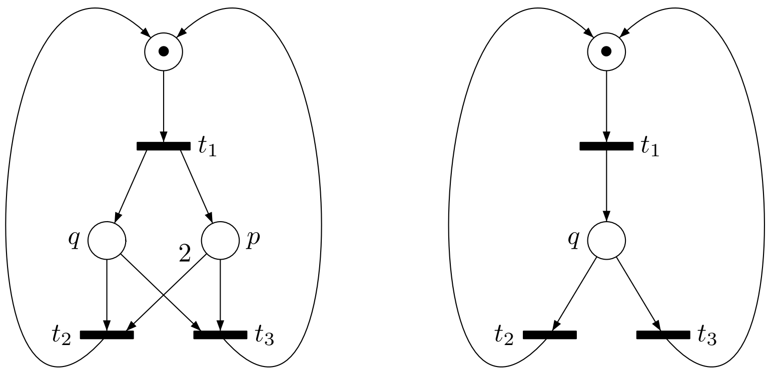
Korollar 3.5

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{S2} erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$. Des Weiteren sei eine aktionsbasierte LTL-Formel (bzw. LTL^r-$\mathcal{X}$-Formel) φ gegeben. Es gilt:

$$\Sigma \models \varphi \iff \Sigma_r \models \varphi.$$

⌟

Wir zeigen mit einem Beispiel, dass Proposition 3.4 im Allgemeinen nicht für Netzsysteme gilt, in denen eine Transition aus dem Vor- bzw. Nachbereich von p oder q mehr als eine Marke konsumiert bzw. produziert. Unser Beispiel ist in Abbildung 3.4 abgebildet. Das ursprüngliche Netzsystem Σ ist nicht lebendig



(a) Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ (b) reduziertes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$

Abbildung 3.4: Beispiel für ein Netzsystem, dass durch Anwenden von Φ_{S2} zu einem beschränkten Netzsystem reduziert wird, indem der Platz p entfernt wird. Es gilt $L_\Sigma(M_0) \neq L_{\Sigma_r}(M_0^r)$.

und sicher. Wegen der 1-Beschränktheit hat die Transition t_2 nie Konzession. Das reduzierte Netzsystem hingegen akzeptiert Schaltfolge $t_1 t_2$. Wir erweitern die Regel Φ_{S2}, so dass das Anwenden dieser erweiterten Regel die Menge der akzeptierten Schaltfolgen nicht nur für Netzsystem erhält, für die alle Kanten vom Vor- und Nachbereich zu den Plätzen p und q das Gewicht eins haben. Wir zeigen folgendes:

Proposition 3.6

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und zwei Plätze $p, q \in P$, die der Regel Φ_{S2} genügen. Wenn die Plätze p und q die folgenden Bedingungen erfüllen:

- $\forall t \in p^\bullet : F(t, q) \geq F(t, p)$,
- $\forall t \in {}^\bullet p : F(t, q) \leq F(t, p)$ *und*
- *der Platz p gemäß Φ_{S2} aus Σ entfernt wird*

sowie das reduzierte Netz mit $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ bezeichnet wird, dann gilt:

$$L_\Sigma(M_0) = L_{\Sigma_r}(M_0^r).$$

⌟

Beweis von 3.6: Es wird gezeigt, dass das lineare Optimierungsproblem aus Definition 3.1 eine Lösung besitzt. Es gilt $|{}^\bullet p| = |{}^\bullet q| = n$ sowie $|p^\bullet| = |q^\bullet| = m$. Die Inzidenzdenzmatrix ist wie folgt aufgebaut. Der Inzidenzvektor $\vec{l_p}$ enthält für jede Transition $t \in {}^\bullet p$ den Wert $a_i = F(t, p)$ mit $i = 1, \ldots, n$ und für jede Transition $t' \in p^\bullet$ den Wert $-b_j = -F(p, t')$ mit $j = 1, \ldots, m$. Ansonsten enthält $\vec{l_p}$ Nullen. Der Inzidenzvektor $\vec{l_q}$ enthält für jede Transition $t \in {}^\bullet q$

den Wert $c_i = F(t,p)$ mit $i = 1,\ldots,n$ und für jede Transition $t' \in q^\bullet$ den Wert $-d_j = -F(p,t')$ mit $j = 1,\ldots,m$. Ansonsten enthält $\vec{l}_q$ Nullen. Die Inzidenzmatrix lautet dann wie folgt:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & t_1 & \ldots & t_n & t_{n+1} & \ldots & t_{n+m} & & &
\end{array} \\
\mathbf{N} = \left(\begin{array}{cccccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & a_1 & \ldots & a_n & -b_1 & \ldots & -b_m & 0 & \ldots & 0 \\
0 & \ldots & 0 & c_1 & \ldots & c_n & -d_1 & \ldots & -d_m & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ p \\ q \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Zunächst ergibt sich aus der Gleichung $\vec{Y} \cdot \mathbf{N} \leq l_p$ das folgende Ungleichungs-system:

$$
\begin{array}{lcccccccl}
(I_1) & \ldots & + & a_1 \cdot y_p & + & c_1 \cdot y_q & + & \ldots & \leq \quad a_1 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
(I_n) & \ldots & + & a_n \cdot y_p & + & c_n \cdot y_q & + & \ldots & \leq \quad a_n \\
(I_{n+1}) & \ldots & - & b_1 \cdot y_p & - & d_1 \cdot y_q & + & \ldots & \leq \quad -b_1 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
(I_{n+m}) & \ldots & - & b_n \cdot y_p & - & d_n \cdot y_q & + & \ldots & \leq \quad -b_m \\
(I_{n+m+1}) & \ldots & + & 0 \cdot y_p & + & 0 \cdot y_q & + & \ldots & \leq \quad 0 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots \\
(I_{|T|}) & \ldots & + & 0 \cdot y_p & + & 0 \cdot y_q & + & \ldots & \leq \quad 0
\end{array}
$$

Aus der Bedingung $\forall t \in p^\bullet : \sum_{p' \in {}^\bullet t} Y(p') \cdot F(p',t) + \mu \geq F(p,t)$ ergeben sich weitere m Ungleichungen:

$$
\begin{array}{lccl}
(I_{|T|+1}) & b_1 \cdot y_p + d_1 \cdot y_q + \mu & \geq & b_1 \\
\vdots & & \vdots & \\
(I_{|T|+m}) & b_n \cdot y_p + d_n \cdot y_q + \mu & \geq & b_n.
\end{array}
$$

Da $M_0(p) = 0$ gilt, ist die letzte Ungleichung des zu lösenden linearen Optimierungproblems:

$$\vec{Y}^T \cdot M_0 + \mu \leq 0.$$

Zusätzlich gelten die folgenden Restriktionen:

$$Y(p) = 0,\ M_0(p) = M_0(q) = 0.$$

Wegen $\forall t \in {}^\bullet p : F(t,q) \leq F(t,p)$, gilt

$$c_i \leq a_i \qquad i = 1,\ldots,n \text{ mit } n \in \mathbb{N}^+.$$

Und wegen $\forall t \in p^\bullet : F(t,q) \geq F(t,p)$ gilt:

$$d_i \geq b_i \qquad i = 1,\ldots,n \text{ mit } n \in \mathbb{N}^+.$$

Mit diesen beiden Bedingungen existiert für dieses Ungleichungssystem die Lösung:

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{|P|} \end{pmatrix} \qquad y_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i = q \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \qquad \mu = 0.$$

■

Hieraus leiten wir die folgende neue Reduktionsregel ab, die ebenfalls parallele redundante Plätze vereinigt, aber im Gegensatz zu Φ_{S2} den Anwendungsbereich für die Regel erweitert.

Definition 3.7 (Φ_{P1})

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Zwei Plätze $p, q \in P$ genügen der Regel Φ_{P1}, genau dann wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $q^\bullet = p^\bullet$,
- $^\bullet q = {}^\bullet p$,
- $\forall t \in p^\bullet : F(t, q) \geq F(t, p)$,
- $\forall t \in {}^\bullet p : F(t, q) \leq F(t, p)$ *und*
- $M_0(p) = M_0(q) = 0$.

Das durch Anwenden von Φ_{P1} erhaltene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist wie folgt definiert:

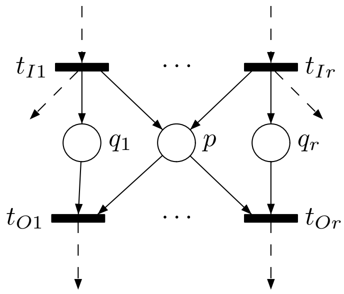
$$\begin{aligned} P_r &= P \setminus \{p\} \\ T_r &= T \\ F_r &= F \cap ((P_r \times T_r) \cup (T_r \times P_r)) \\ M_0^r &= M_0|_{P_r}. \end{aligned}$$

⌟

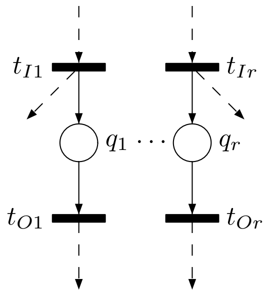
Da $\forall t \in {}^\bullet p : F(t, q) = F(t, p) = 1$ ein Spezialfall von $\forall t \in {}^\bullet p : F(t, q) \leq F(t, p)$ darstellt und das Gleiche analog für den Nachbereich von p gilt, stellen wir fest, dass Φ_{S2} ein Spezialfall der Regel Φ_{P1} ist. Weiterhin ist Φ_{P1} eine Spezialisierung von Φ_{ES2} (siehe Beweis von 3.6). Für das Anwenden von Φ_{P1} gelten dann die folgenden Aussagen: Das ursprüngliche Netzsystem ist genau dann lebendig bzw. erfüllt aktionsbasierte LTL-Formeln (und zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Formeln), wenn das reduzierte Netzsystem lebendig ist bzw. aktionsbasierte LTL-Formeln (und zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Formeln) erfüllt. Weiterhin impliziert die Beschränktheit des ursprünglichen Netzsystems die Beschränktheit des reduzierten Netzsystems.

3.3 Entfernen eines gemeinsamen Platzes

Shatz präsentiert in [STMD96] eine weitere Reduktionsregel zum Entfernen eines gemeinsamen Platzes. Sei $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ ein beliebiges Netzsystem. Der Vorbereich eines Platzes $p \in P$ enthält genau soviele Elemente wie der Nachbereich von p. Jede Transition des Vorbereichs von p ist mit einem Platz $q_i \in P$ mit $i \in \{1, \ldots, |{}^\bullet p|\}$ verbunden. Für den Nachbereich von q_i gilt $q_i{}^\bullet = t_i$ mit $^\bullet t_i = \{p, q_i\}$. Ein Beispiel hierfür aus [STMD96] ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Alle folgenden Definitionen sind [STMD96] entlehnt.



(a) Netzsystemstruktur, die der Regel Φ_{S3} genügt



(b) reduziertes Netz

Abbildung 3.5: Reduktionsregel Φ_{S3}

Definition 3.8 (*Φ_{S3}: Entfernen eines gemeinsamen Platzes*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein Platz $p \in P$. Der Platz p genügt der Regel Φ_{S3}, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $|p^\bullet| = |{}^\bullet p| = r$, *mit* $r \in \mathbb{N}$,
- $\forall t_{Ik} \in {}^\bullet p,\ k = 1, \ldots, r,\ \exists q_k \in P\ :\ q_k \in t_{Ik}^\bullet \setminus p \wedge {}^\bullet q_k = \{t_{Ik}\}$,
- $\forall t_{Ok} \in p^\bullet,\ k = 1, \ldots, r\ :\ {}^\bullet t_{Ok} = \{p, q_k\} \wedge q_k^\bullet = \{t_{Ok}\}$,
- $\forall q_k,\ k = 1, \ldots, r\ :\ F(q_k, t_{Ok}) = F(t_{Ik}, q_k) = 1$,
- $\forall k \in \{1, \ldots, r\}\ :\ F(t_{Ik}, p) = F(p, t_{Ok}) = 1$,
- $M_0(p) = 0$ *und* $\forall q_k,\ k = 1, \ldots, r\ :\ M_0(q_k) = 0$.

Das durch das Anwenden von Φ_{S3} erhaltene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r(P_r, T_r, F_r)$ ist wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
P_r &= P \setminus \{p\} \\
T_r &= T \\
M_0^r &= M_0|_{P_r} \\
\forall q \in P_r, \forall t \in T_r : & \\
F_r(q,t) &= F(q,t) \\
F_r(t,q) &= F(t,q).
\end{aligned}
$$

┘

Im Folgenden zeigen wir, dass diese Regel wiederum ein Spezialfall von Esparzas und Schröters Impliziter-Plätze-Regel ist. Dies zeigen wir, indem die entsprechende lineare Optimierungsaufgabe gelöst wird.

Proposition 3.9

Regel Φ_{ES2} verallgemeinert die Regel Φ_{S3}.

┘

Beweis von 3.9 : Es ist zu zeigen, dass das lineare Optimierungsproblem aus Definition 3.1 eine Lösung besitzt. Zunächst soll hier die Inzidenzmatrix für ein Netzsystem angegeben werden, dass einen Platz enthält, der der Regel Φ_{S3} genügt. Gemäß Definition 3.1, und wie in Abbildung 3.5 leicht zu sehen ist, genügt ein Platz p der Regel Φ_{S3}, wenn der Vorbereich und der Nachbereich von p die gleiche Anzahl an Transitionen enthält. Jede Transition aus dem Vorbereich von p produziert eine Marke auf p und einem weiteren Platz q_i mit $i \in \{1, \dots, |^\bullet p|\}$. Jede Transition aus dem Nachbereich von p konsumiert eine Marke von p und von q_i. Wenn $|p^\bullet| = r$, $r \in \mathbb{N}$, gibt es $2r$ Spalten (r Ein- bzw. Ausgangstransitionen) und $r+1$ Zeilen (r Plätze und den Platz p), die jeweils mit 1 und -1 zu füllen sind. Hierbei bilden die ersten r Spalten o. B. d. A. die Transitionen des Vorbereichs von p (mit einer 1) und die Spalten $r+1$ bis $2r$ die Transitionen des Nachbereichs von p.

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} & & & t_{I1} & t_{I2} & \dots & t_{Ir} & t_{O1} & t_{O2} & \dots & t_{Or} & & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccccccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ p \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \\ \\ \\ \end{array}$$

Zunächst ergibt sich aus der Gleichung $\vec{Y} \cdot \mathbf{N} \leq l_p$ das folgende Ungleichungssystem:

$$\begin{array}{lcccccccccccc} (I_1) & \dots & + & y_p & + & y_{q_1} & + & \dots & + & 0 \cdot y_{q_r} & + & \dots \leq & 1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \\ (I_r) & \dots & + & y_p & + & 0 \cdot y_{q_1} & + & \dots & + & y_{q_r} & + & \dots \leq & 1 \\ (I_{r+1}) & \dots & - & y_p & - & y_{q_1} & - & \dots & - & 0 \cdot y_{q_r} & + & \dots \leq & -1 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \\ (I_{2r}) & \dots & - & y_p & - & 0 \cdot y_{q_1} & - & \dots & - & y_{q_r} & + & \dots \leq & -1 \\ (I_{2r+1}) & \dots & + & 0 \cdot y_p & + & 0 \cdot y_{q_1} & + & \dots & + & 0 \cdot y_{q_r} & + & \dots \leq & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & \\ (I_{|T|}) & \dots & + & 0 \cdot y_p & + & 0 \cdot y_{q_1} & + & \dots & + & 0 \cdot y_{q_r} & + & \dots \leq & 0 \end{array}$$

Da $\forall q_k,\ k = 1, \dots, r\ :\ F(q_k, t_{Ok}) = 1$ gilt, folgen aus der Bedingung $\forall t_i \in p^\bullet\ :$ $\sum_{p' \in {}^\bullet t_i} Y(p') \cdot F(p', t_i) + \mu \geq F(p, t_i)$ die folgenden weiteren r Ungleichungen:

$$\begin{array}{lccc} (I_{|T|+1}) & y_p + y_{q_1} + \mu & \geq & 1 \\ \vdots & & \vdots & \\ (I_{|T|+r}) & y_p + y_{q_r} + \mu & \geq & 1. \end{array}$$

Da $M_0(p) = 0$ gilt, ist die letzte Ungleichung des zu lösenden linearen Optimierungproblemes:

$$\vec{Y}^T \cdot M_0 + \mu \leq 0.$$

Zusätzlich gelten die folgenden Restriktionen:

$$Y(p) = 0,\ M_0(p) = M_0(q_1) = \ldots = M_0(q_r) = 0.$$

Für dieses Ungleichungssystem existiert eine Lösung:

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{|P|} \end{pmatrix} \quad y_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls } i \in \{q_1, q_2, \ldots, q_r\} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} \quad \mu = 0.$$

Der Platz p genügt der Regel Φ_{S3} und ebenfalls der Regel Φ_{ES2}. Da beide Regeln diesen Platz auf dieselbe Art aus dem Netz entfernen, folgt die Behauptung. ■

Wegen Proposition 3.9 folgt, dass das Anwenden von Φ_{S3} die Eigenschaften aus Korollar 3.2 bewahrt. Als Spezialfall von Φ_{ES2} erhält die Regel Φ_{S3} nicht nur die Beschränktheit sondern ebenfalls die Unbeschränktheit eines Netzsystems. Dies beweisen wir in der folgenden Proposition.

Proposition 3.10

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{S3} erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Es gilt:

$$\Sigma \textit{ beschränkt} \iff \Sigma_r \textit{ beschränkt.}$$

⌟

Beweis von 3.10:

($\Longrightarrow$) Folgt unmittelbar aus Proposition 3.9 und Korollar 3.2.

($\Longleftarrow$) Der Beweis erfolgt über Kontraposition. Es wird gezeigt, wenn Σ unbeschränkt ist, dass Σ_r auch unbeschränkt ist. Es sind zwei Fälle zu betrachten.

(i) Ein Platz $q \in P$ mit $q \neq p$ ist unbeschränkt. Dann ist q auch im reduzierten Netz unbeschränkt, da die folgende Argumentationskette gilt:

$$\begin{aligned} & \Sigma_r \text{ unbeschränkt} \\ \iff \quad & \exists \sigma_r \in {T_r}^*, \exists m_r, m_r' \in \mathcal{R}_{\Sigma_r}(M_0^r) \,:\, m_r \xrightarrow{\sigma_r} m_r' \Rightarrow m_r > m_r', \\ & \text{wobei } \forall p \in P_r \,:\, m_r(p_r) \geq m_r'(p_r) \wedge m_r(q) > m_r'(q) \\ \iff \quad & \exists \sigma \in T^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}_{\Sigma}(M_0) \,:\, m \xrightarrow{\sigma} m' \Rightarrow m > m', \\ & \text{wobei } \forall p \in P \,:\, m(p) \geq m'(p) \wedge m(q) > m'(q) \\ \iff \quad & \Sigma \text{ unbeschränkt.} \end{aligned}$$

(ii) Der entfernte Platz $p \in P$ ist unbeschränkt. Nach Definition 3.8 existiert ein Platz $q \in P$, so dass im Vorbereich von q und von p eine gemeinsame Transition existiert, die das einzige Element vom Vorbereich von q und p ist. Dies bedeutet, dass diese Transition immer eine Marke auf q und auf p produziert. Daraus folgt, dass q immer genauso viele Marken enthält wie p. Weiterhin haben wir nur $r-1$

weitere Elemente im Vorbereich von p. Demnach ist q genau dann unbeschränkt, wenn p unbeschränkt ist. Der Platz q ist nach (i) auch im reduzierten Netsystem unbeschränkt. Daher ist auch Σ_r unbeschränkt. ■

Kapitel 4

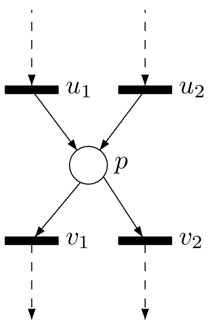
Entfernen von Plätzen und Transitionen

In diesem Kapitel untersuchen wir Reduktionstechniken, die sowohl die Menge der Plätze als auch die Menge der Transitionen verändern. Zum einen existiert in der Literatur eine Menge von Regeln, die eine Anhäufung von Transitionen um einen Platz fusioniert [HPP04, ES01, Ber86]. Diese Reduktionstechniken, die Gegenstand von Kap. 4.1 sind, suchen zum einen nach Mustern in einem Netzsystem. Sie untersuchen demnach lokale Gegebenheiten. Zum anderen betrachten diese Reduktionstechniken globale Gegebenheiten eines Netzsystems, indem die Inzidenzmatrix analysiert wird. Drei weitere Reduktionstechniken basieren nur auf der Bestimmung von Mustern [ES01, STMD96]. Diese Reduktionstechniken betrachten wir in den Kapiteln 4.2, 4.3 und 4.4. Abschließend analysieren wir in Kap. 4.5 Reduktionstechniken, die ganze Teilnetze eines Netzsystems (Blöcke) zu einer Transition zusammenfassen [SM83, Val79].

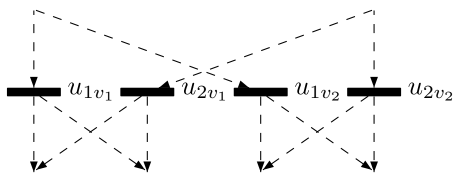
4.1 Pre- und Post-Agglomerationsregeln

In der Literatur existieren mehrere Varianten desselben Typs von Reduktionstechniken: die *Agglomeration*. Agglomeration ist im Allgemeinen folgendes: Gegeben sei ein beliebiges Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Ein Platz $p \in P$ hat einen nicht leeren Vor- und Nachbereich. Der Vorbereich wird im Weiteren dieses Kapitel als $U = {}^\bullet p$ referenziert. Den Nachbereich werden wir fortan als $V = p^\bullet$ referenzieren. Diese Anhäufung (Agglomeration) von Transitionen wird fusioniert (das Kreuzprodukt $U \times V$), falls bestimmte Bedingungen erfüllt sind. Der Platz p wird aus dem Netzsystem entfernt. Wir zeigen die Agglomeration exemplarisch in Abbildung 4.1. Es gilt $U = \{u_1, u_2\}$ und $V = \{v_1, v_2\}$.

Die verschiedenen Bedingungen, die p und seine Umgebung oder das gesamte Netzsystem erfüllen, charakterisieren die einzelnen Varianten der Agglomeration, die wir in den folgenden Abschnitten betrachten. Ein beliebiges Netzsystem erfüllt Bedingungen, so dass folgendes gilt: Das Schalten einer beliebigen Transition $u \in U$ kann verzögert werden, bis eine Transition $v \in V$ schaltet, wobei bestimmte Eigenschaften (Lebendigkeit usw.) durch eine Agglomeration bewahrt werden. D. h. jede Schaltfolge des ursprünglichen Netzsystems, in der u vor v vorkommt, kann in eine Schaltfolge überführt werden, so dass u unmittel-



(a) Netzstruktur mit Platz p und einer Anhäufung von Transitionen



(b) reduzierte Netzstruktur

Abbildung 4.1: Grundidee der Agglomeration

bar vor v vorkommt. Diese Bedingungen charkterisieren eine *Pre-Agglomeration* [HPP04, Sch06].

Führen Bedingungen eines Netzsystems dazu, dass jede Schaltfolge des Netzsystems, in der u und v vorkommen, in eine Schaltfolge überführt werden kann, so dass unmittelbar nach der Transition u die Transition v schaltet. Werden zusätzlich wiederum bestimmte Eigenschaften des Netzsystems bewahrt, dann kennzeichnen diese Bedingungen eine *Post-Agglomeration* [Sch06].

4.1.1 Nach Haddad und Pradat-Peyre

In [HPP04] präsentieren Haddad und Pradat-Peyre ihre Variante der Agglomeration. Haddad und Pradat-Peyre geben Bedingungen an, bei deren Gültigkeit für ein Netzsystem das Anwenden der Agglomeration bestimmte Eigenschaften des Netzsystems bewahrt. Die Eigenschaften, die hierbei betrachtet werden, sind die Lebendigkeit und LTL-Eigenschaften, die keine aus dem Netzsystem zu entfernenden Transitionen betrachten (LTL^r-Eigenschaften). Für die Bewahrung der LTL^r-Eigenschaften beweisen Haddad und Pradat-Peyre, dass Projektionen auf den Mengen der akzeptierten Schaltfolgen äquivalent sind. Sie unterscheiden hierbei die Menge der maximalen Schaltfolgen (die zu *deadlocks* führen) und der unendlichen Schaltfolgen (bzgl. der Verifikation von *Fairness* von Interesse).

Zunächst wird definiert, wann ein Netzsystem *potenziell agglomerierbar* ist. Hierfür wird das Netz in *Partitionen* unterteilt. Partition bedeutet in diesem Kontext folgendes: Die Menge der Plätze eines Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, die einen nichtleeren Vor- bzw. Nachbereich haben (vgl. hierzu Abbildung 4.1), wird indiziert $p_i \in P$ mit $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}^+$ gilt. Dementsprechend existieren dann Mengen $U_i = {}^\bullet p_i$ und $V_i = p_i{}^\bullet$. Diese Mengen müssen paarweise disjunkt sein: $\forall i, j \in I \,:\, i \neq j \Leftrightarrow (U_i \cap U_j \cap V_i \cap V_j) = \emptyset$. Alle Transitionen die nicht Element einer Menge U_i oder V_i sind, seien in einer

Menge T_0 enthalten. Die Menge der Transitionen ist dann wie folgt partitioniert:

$$T = T_0 \cup \bigcup_{i \in I} U_i \cup \bigcup_{i \in I} V_i \qquad \text{,wobei } I \neq \emptyset.$$

Die Anzahl der Partitionen ($|I|$) ist frei wählbar. Wir bemerken jedoch, dass Fälle existieren, bei denen eine einelementige Wahl der Partitionsmenge, $|I| = 1$, keine weitere Reduktion zulässt, eine Partitionierung mit $|I| > 1$ hingegen eine weitere Reduktion ermöglicht. Dies erläutern wir später in diesem Kapitel. Das Netzsystem Σ ist potenziell agglomerierbar, wenn für jeden Platz p_i die Anzahl der Transitionen aus der Menge U_i größer oder gleich der Anzahl der Transitionen aus der Menge V_i ist. Hierfür wird eine Funktion definiert.

Definition 4.1 (*Zählfunktion*)

Sei $\sigma \in T^*$ eine endliche Schaltfolge. $\Gamma_i(\sigma) = |\Pi_{U_i}(\sigma)| - |\Pi_{V_i}(\sigma)|$ bezeichnet die Zählfunktion *der Partition i.*

Ein Netzsystem Σ ist genau dann potenziell agglomerierbar, falls $\forall \sigma \in L_\Sigma(M_0)$ $\forall i \in I \; : \; \Gamma_i(\sigma) \geq 0$. Die Netzstruktur in Abbildung 4.1 ist potenziell agglomerierbar, falls der Platz bei der Anfangsmarkierung unmarkiert ist, $M_0(p) = 0$. Haddad und Pradat-Peyre definieren strukturelle Bedingungen für die potenzielle Agglomerierbarkeit eines Netzsystems.

Definition 4.2 (*strukturelle potenzielle Agglomerierbarkeit*)

Ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ wird genau dann strukturell potenziell agglomerierbar *(kurz sp-agglomerierbar) genannt, wenn $\forall i \in I \, \exists p_i$, so dass*

(i) $m_0(p_i) = 0$,

(ii) $\forall u \in U_i \, \forall v \in V_i \; : \; F(u, p_i) = F(p_i, v) = 1$.

Die Regel für die Transformation ein agglomerierbares Netzsystem in ein reduziertes Netzsystem wird im Folgenden formal definiert.

Definition 4.3 (*Agglomeration*)

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Angenommen, die Menge der Transitionen ist wie folgt partitioniert: $T = T_0 \cup \bigcup_{i \in I} U_i \cup \bigcup_{i \in I} V_i$, wobei $I \neq \emptyset$ eine Menge von Partitionen bezeichnet. Das reduzierte Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist definiert durch:

- $T_r = T_0 \cup \left(\bigcup_{i \in I} (U_i \times V_i)\right)$,
- $\forall t \in T_r \; : \; F_r(p_i, t) = F_r(t, p_i) = 0$,
- $\forall t \in T_r \setminus (U_i \times V_i) \, \forall q \in P_r \; : \; F_r(q, t) = F(q, t)$ *und* $F_r(t, q) = F(t, q)$,
- $\forall u_v \in (U_i \times V_i) \, \forall q \in P_r \; :$
  - $F_r(q, u_v) = \max[F(q, u), F(q, v) - \mathbf{N}(q, u)]$ *und*
  - $F_r(u_v, q) = \mathbf{N}(q, u) + \mathbf{N}(q, v) + F_r(q, u_v)$,

- $P_r = P \setminus \{q' \in P \mid \forall t \in T_r : F_r(t, q') = F_r(q', t) = 0\}$.

┘

Haddad und Pradat-Peyre definieren fünf Bedingungen, die in verschiedenen Kombinationen einen Satz an Pre-Agglomerationsregeln charakterisieren. Diese Definitionen beschreiben Bedingungen für die erreichbaren Markierungen oder die akzeptierten Schaltfolgen eines Netzsystems. Es sind daher *verhaltensbasierte* Bedingungen.

Definition 4.4

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Das Netzsystem Σ ist

(1) U-unabhängig *genau dann, wenn* $\forall i \in I \, \forall u \in U \, \forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \exists m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \, \forall \sigma \in T^*$ *so dass* $(\forall \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma) : \Gamma_i(\sigma') \geq 0) : m \xrightarrow{u\sigma} m' \Longrightarrow m \xrightarrow{\sigma u} m'$,

(2) UV-austauschbar, *genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: Sei* $i \in I$

(a) $\forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \, \forall u, u' \in U_i \, \forall v \in V_i : m \xrightarrow{uv} \iff m \xrightarrow{u'v}$,

(b) $\forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \, \forall u \in U_i \, \forall v, v' \in V_i : m \xrightarrow{uv} \iff m \xrightarrow{uv'}$,

(3) Divergenz-frei *genau dann, wenn* $\forall \sigma \in L^\infty_\Sigma(M_0) : |\Pi_{T_0 \cup V}(\sigma)| = \infty$,

(4) Quasi-persistent *genau dann, wenn* $\forall i \in I \, \forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \, \forall u \in U_i \, \forall \sigma \in (T_0 \cup V)^*$ *so dass* $(m \xrightarrow{u}$ *und* $m \xrightarrow{\sigma}) \exists \sigma' \in (T_0 \cup V)^* : m \xrightarrow{u\sigma'} \wedge (\Pi_V(\sigma') = \Pi_V(\sigma)) \wedge (\mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\sigma'})$. *Wenn zusätzlich* $\sigma \neq \lambda \Longrightarrow \sigma' \neq \lambda$ *gilt, wird das Netzsystem als* stark quasi-persistent *bezeichnet.*

(5) U-ähnlich *genau dann, wenn* $\forall i, j \in I \, \forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \, \forall \sigma \in T_0^* \, \forall u \in U_i \, \forall u' \in U_j \, \forall v' \in V_j : (m \xrightarrow{u} \wedge m \xrightarrow{\sigma u' v'}) \Longrightarrow (\exists \sigma' \in T_0^* \, \exists v \in V_i : m \xrightarrow{\sigma' uv} \wedge (\sigma = \lambda \Rightarrow \sigma' = \lambda))$.

┘

Die U-Unabhängigkeit bedeutet, dass das Schalten einer Transition $u \in U_i$ solange verzögert werden kann, bis es notwendig ist, damit eine Transition $v \in V_i$ schalten kann. Die UV-Austauschbarkeit verbietet, dass zwei Transitionen u und v lebendig sind, die Schaltfolge uv jedoch nicht lebendig ist. Ein Netzsystem ist Divergenz-frei, wenn es keine unendlichen Schaltfolge σ akzeptiert, die einen Suffix σ^a mit $a \in \mathbb{N}$ enthält, so dass $\Pi_{T_0 \cup \bigcup_{i \in I} V_i}(\sigma^a) \neq 0$ gilt, also der Suffix σ^a nicht nur Transitionen aus $\bigcup_{i \in I} U_i$ enthält. Die Quasi-Persistenz garantiert, dass ein zu frühes Schalten von u nicht zu einem Deadlock führt, den ein späteres Schalten von u verhindert hätte. Die U-Ähnlichkeit gewährleistet für $|I| > 1$, dass nicht eine Transition aus $\bigcup_{i \in I} V_i$ durch die falsche Wahl einer Menge U_i keine Konzession erhält [HPP04].

Um zu überprüfen, ob die verhaltensbasierten Bedingungen erfüllt werden, müssen unter Anderem unendliche Schaltfolgen überprüft werden. Das ist nicht effizient möglich. Daher präsentieren Haddad und Pradat-Peyre strukturelle Bedingungen eines gegebenen Netzsystems, die die verhaltensbasierten Bedingun-

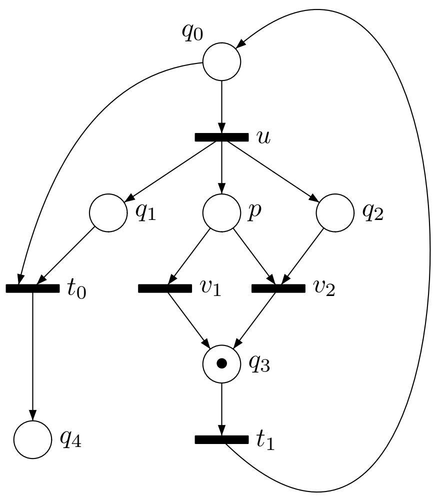


Abbildung 4.2: Beispiel für ein gemäß Definition 4.6 strukturell U-unabhängiges Netzsystem.

gen erfüllen. Ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ ist genau dann U-unabhängig, falls folgendes gilt: Ist ein Platz $p \in P$ markiert, kann keine Transition $t \in (U^\bullet \setminus \{p\})^\bullet$ schalten. Ist solch eine Transition t ein Element von V, darf keine Transition aus U Konzession haben, falls p markiert ist (vgl. hierzu [HPP04, S. 44]). Wir präsentieren ein Netzsystem, dass diese Bedingungen erfüllt. Unser Bespiel ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Es gilt $U = \{u\}$ und $V = \{v_1, v_2\}$. Wir rechnen nach, dass das Netzsystem aus unserem Beispiel die folgende Gleichung erfüllt: $m(p) + m(q_0) + m(q_3) = 1$. Hieraus ergibt sich unmittelbar: $m(p) + m(q_0) \leq 1$. Das bedeutet, wann immer der Platz p markiert ist, enthält der Platz q keine Marken. Damit, hat die Transition $t_0 \in (U^\bullet \setminus \{p\})^\bullet$ keine Konzession, wenn p markiert ist. Zusätzlich hat $u \in U$ keine Konzession, falls p markiert ist. Man kann für unser Beispielnetzsystem auch sagen, falls der Platz p markiert ist, blockiert p die Transitionen der Menge U und der Menge $(U^\bullet \setminus \{p\})^\bullet$. Die *Transitionenblockade* wird im Folgenden formal definiert.

Definition 4.5 (*Transitionenblockade*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein Platz $p \in P$ sowie eine Transition $t \in T$. Der Platz p blockiert *t, wenn die folgende lineare Optimierungsaufgabe keine Lösung besitzt:*

- *die Variablen sind $\{x_q\}_{q \in P}$, wobei x_q die Anzahl der Marken auf dem Platz q bezeichnet,*
- *die Restriktionsmenge wird durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:*
  - *jeder Platz kann nur eine positive Anzahl Marken enthalten (M :*

$P \to \mathbb{N}$),

- *die P-Invarianten des Netzes,*
- *die Ungleichung $x_p \geq 1$ sowie $\forall q \in {}^\bullet t$, $x_q \geq F(q,t)$.*

Wenn p eine Transition t blockiert, bedeutet dies, falls p markiert ist, hat die Transition t keine Konzession. Weiterhin blockiert p eine Menge von Transitionen $T' \subseteq T$, falls $\forall t \in T' : p$ blockiert t.

⌟

Mithilfe der Transitionsblockade können dann die strukturellen Bedingungen für die U-Unabhängigkeit mathematisch definiert werden.

Definition 4.6 (*strukturelle U-Unabhängigkeit*)

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P,T,F)$ und $\forall i \in I$ bezeichnet $UP_i = (U_i^\bullet \setminus \{p_i\})$. Σ ist strukturell U-unabhängig, *wenn*

- *p_i blockiert ${UP_i}^\bullet \setminus V_i$,*
- *falls ${UP_i}^\bullet \cap V_i \neq \emptyset$, dann muss gelten p_i blockiert U_i.*

⌟

Ein gegebenes Netzsystem ist unter mehreren Bedingungen UV-austauschbar. Zum einen gilt die UV-Austauschbarkeit, falls die Mengen U oder V einelementige Mengen sind. Zum Anderen sind die beiden von uns präsentierten Netzsysteme in Abbildung 4.3 UV-austauschbar. In den Abbildungen sind $U = \{u, u'\}$ und $V = \{v, v'\}$. Im Netzsystem aus (a) ist folgendes illustriert: Falls eine Transition aus $v \in V$ eine Marke von einem beliebigen Platz $q \neq p$ konsumiert, dann konsumieren alle Transitionen aus V genauso viele Marken vom Platz p wie die Transition v. Im Netzsystem in (b) ist hingegen folgendes abgebildet: Konsumiert eine Transition $u \in U$ Marken von einem beliebigen Platz $q \in P$, dann muss jede Transition aus U genauso viele Marken von q konsumieren wie die Transition u. Zusätzlich gilt in diesem Netzsystem für den Platz $q_0 \in U^\bullet \cap {}^\bullet V$, dass jede Transition aus V soviel Marken konsumieren muss, wie eine Transition aus U auf q_0 produziert. Diese vier Bedingungen werden im Folgenden formal definiert.

Definition 4.7 (*strukturelle UV-Austauschbarkeit*)

Ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P,T,F)$ ist strukturell UV-austauschbar, *wenn für $\forall i \in I$ eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) $\mid U_i \mid = 1$,

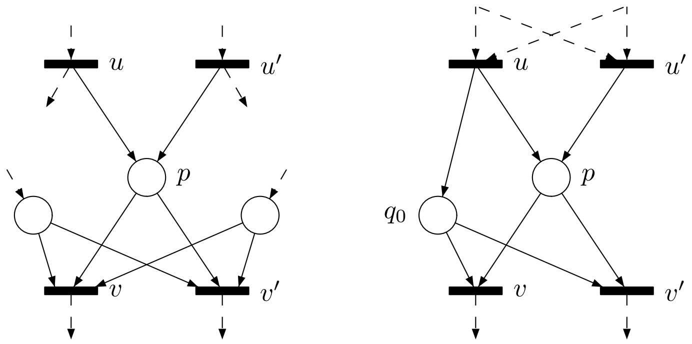
(2) $\mid V_i \mid = 1$,

(3) $\forall v, v' \in V_i \forall q \in P : F(q,v) = F(q,v')$,

(4) $\forall u, u' \in U_i$

- $\forall q \in P : F(q,u) = F(q,u')$ *und*
- $\forall v \in V_i \forall q \in u^\bullet \cap {}^\bullet v : F(u,q) = F(v',q)$.

⌟



(a) Bedingung (3) (b) Bedingung (4)

Abbildung 4.3: Beispiele für Netzstrukturen, die gemäß den Bedingungen (3) und (4) in Definition 4.7 strutkurell UV-austauschbar sind.

Ein Netzsystem ist zum einen Divergenz-frei, wenn der Platz p strukturell beschränkt ist. Zum Anderen ist die Divergenz-Abwesenheit erfüllt, falls für jede Transition aus $u \in U$ ein Platz $q \in {}^{\bullet}u$ existiert, so dass der Vorbereich von q eine echte Teilmenge von $T_0 \cup \bigcup_{i \in I} V_i$ ist [HPP04, S. 45]. Eine solche Netzstruktur präsentieren wir in Abbildung 4.4.a. Es gilt: $U = \{u_1, u_2, u_3\}$, $V = \{v\}$ sowie $T_0' = \{t_0, t_1\} \subseteq T$. Im Vorbereich der Transition u_1 existiert der Platz q_1, dessen Vorbereich ${}^{\bullet}q_1 = \{v, t_0\} \subset T_0' \cup V$ ist. Für die Transition u_2 existiert der Platz $q_2 \in u_2{}^{\bullet}$, dessen Vorbereich ${}^{\bullet}q_2 = \{t_0\} \subset T_0' \cup V$ ist. Es ist zu sehen, dass ein solcher Platz ebenfalls für die Transition u_3 existiert. In Abbildung 4.4.b zeigen wir eine Netzstruktur, die nicht Divergenz-frei ist. Im Vorbereich der Transition u existiert nur ein Platz q_0. Dessen Vorbereich ist ${}^{\bullet}q_0 = \{u, ...\} \not\subset T_0' \cup V$. In diesem Netzsystem existiert die folgende ω-Schaltfolge $\sigma = \sigma_0 uuu \ldots$. Hierbei ist σ_0 eine endliche Schaltfolge, die von der Anfangsmarkierung zu einer Markierung führt, bei der q_0 markiert ist. Von dieser Markierung ausgehend kann die Transition u unendlich oft schalten. Damit kann keine Transition t aus T_0 oder aus allen Mengen V_i existieren, so dass t unendlich oft in σ vorkommt. Mathematisch wird die Divergenz-Abwesenheit wie folgt definiert.

Definition 4.8 (*strukturelle Divergenz Abwesenheit [HPP04]*)

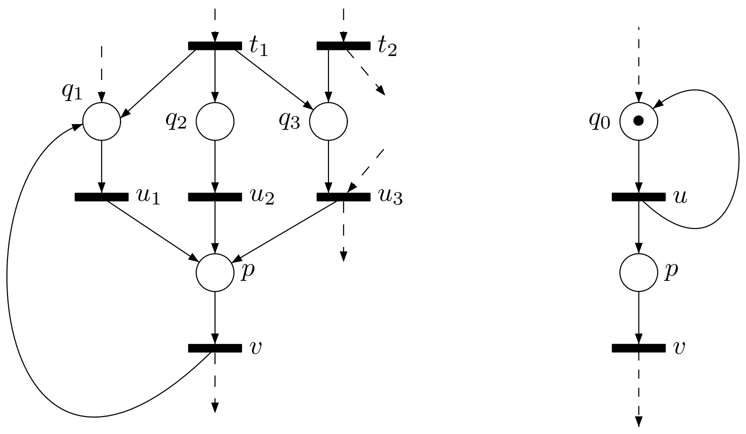
Ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ ist strukturell divergenz-frei*, wenn $\forall i \in I$:*

(1) Entweder existiert ein Variablenvektor $\vec{Y}$ mit $\vec{Y} \cdot \mathbf{N} = 0$, wobei $Y(p_i) > 0$ und $\vec{Y} \geq 0$ gilt oder

(2) $\forall u \in U_i \, \exists q \in {}^{\bullet}u$, so dass ${}^{\bullet}q \subset T_0 \cup \bigcup_{i \in I} V_i$ gilt.

⌟

Ein Netzsystem ist quasi-persistent, wenn für alle $i \in I$ und jede Transition $u \in U_i$ folgendes gilt: Für jede Transition $t \in ({}^{\bullet}u)^{\bullet} \setminus \bigcup_{i \in I} U_i)$ gilt eine der zwei



(a) Divergenz-freie Netzstruktur (b) divergierende Netzstruktur

Abbildung 4.4: Beispiele für eine gemäß Definition 4.8 Divergenz-freie Netzstruktur (a) und eine divergierende Netzsystruktur (b).

folgenden Bedingungen: Die Transition t hat keine Konzession, wenn die Transition u schalten kann, oder t ist neutral [HPP04, S. 45]. Eine Transition ist neutral, wenn das Schalten dieser Transition die Markierung des Netzsystems nicht ändert (siehe Abbildung 4.5). Wir geben zwei Beispiele für quasi-persistente Netzstrukturen in Abbildung 4.5. In der Netzstruktur in Abbildung 4.5.b gilt die Gleichung $m(q_0) + m(q_1) = 1$. Daher hat t_0 keine Konzession, falls u_1 schalten kann (q_1 ist markiert und demnach ist q_0 unmarkiert). Es folgt die formale Definition für die Quasi-Persistenz.

Definition 4.9 (*strukturelle Quasi-Persistenz*)

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Das Netzsystem Σ ist strukturell quasi-persistent, *wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*
$\forall i \in I \, \forall u \in U_i \, \forall t \in ({}^\bullet u)^\bullet \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$ *gilt*

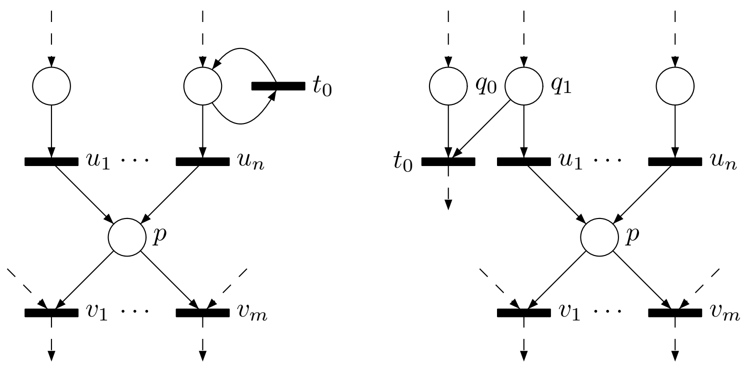
(1) Entweder $t \in T_0$ ist eine neutrale Transition ($\forall q \in P : \mathbf{N}(q,t) = 0$)

(2) oder die Lösungsmenge der folgenden linearen Optimierungsaufgabe ist leer:

- *Die Variable sind durch die Menge $\{x_q\}_{x \in P}$ gegeben und*
- *die Restriktionsmenge enthält die folgenden Bedingungen:*
  - *jeder Platz enthält eine positive Anzahl (≥ 0) an Marken,*
  - *die P-Invarianten des Netzes,*
  - *die Ungleichungen $\forall q \in {}^\bullet u$, $x_q \geq F(p,u)$ und*
  - *$\forall q \in {}^\bullet t$, $x_q \geq F(q,t)$.*

Wenn alle Transitionen aus $({}^\bullet u)^\bullet \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$ *die Bedingung (2) erfüllen, dann ist* Σ stark quasi-persistent.

┘



(a) t_0 ist neutral

(b) unter Vorr., dass die Invariante $m(q_0) + m(q_1) = 1$ gilt

Abbildung 4.5: Beispiele für Netzstrukturen, die quasi-persistent sind.

Am Anfang dieses Kapitels haben wir festgestellt, dass die Partitionsmenge I frei wählbar ist, solange sie nicht die leere Menge ist. Es existieren jedoch Netzsysteme, die für eine einelementige Wahl von I nicht quasi-persistent sind. Jedoch können die gleichen Netzsysteme für eine Partitionierung mit $|I| > 2$ quasi-persistent sein. Ein abgewandeltes Beispiel aus [HPP04] belegt dies. Das Beispiel ist in Abbildung 4.6 illustriert. Sei dieses Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Wir wählen $I = \{1\}$ mit $U_1 = \{u\} = {}^\bullet p_1$, $V_1 = \{v\} = p_1{}^\bullet$ sowie $T_0 = \{u', v'\}$. Dann gilt $T = T_0 \cup U_1 \cup V_1$. Die Transition $u' \in ({}^\bullet u)^\bullet \setminus U_1$ ist nicht neutral und hat Konzession, falls u' schalten kann. Bei dieser Wahl ist Σ demnach nicht quasi-persistent. Wählen wir dagegen $I = \{1, 2\}$ mit $U_1 = \{u\} = {}^\bullet p_1$, $V_1 = \{v\} = p_1{}^\bullet$, $U_2 = \{u'\} = {}^\bullet p_2$ und $V_2 = \{v'\} = p_2{}^\bullet$, dann gilt $T = U_1 \cup U_2 \cup V_1 \cup V_2$. Die Mengen $({}^\bullet u)^\bullet \setminus (U_1 \cup U_2) = \emptyset$ und $({}^\bullet u')^\bullet \setminus (U_1 \cup U_2) = \emptyset$ sind leer und somit ist Σ quasi-persistent.

Für den Fall, dass die Partitionsmenge I keine einelementige Menge ist, gilt im Allgemeinen nicht, dass z. B. Deadlocks bewahrt werden. Wir geben in Abbildung 4.7 ein Beispiel an, dass dies illustriert. Sei $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Es gilt $U_1 = \{u\} = {}^\bullet p_1$, $V_1 = \{v\} = p_1{}^\bullet$, $U_2 = \{u'\} = {}^\bullet p_2$, $V_2 = \{v_1', v_2'\} = p_2{}^\bullet$ und $T = U_1 \cup U_2 \cup V_1 \cup V_2$. Die Mengen $({}^\bullet u)^\bullet \setminus (U_1 \cup U_2) = \emptyset$ und $({}^\bullet u')^\bullet \setminus (U_1 \cup U_2) = \emptyset$ sind leer und somit ist Σ quasi-persistent. Das Netzsystem Σ ist U-unabhängig, da die Menge $U_1{}^\bullet \setminus \{p_1\} = \emptyset$ leer ist und zusätzlich folgendes gilt: Die Transitionen $v \in (U_2{}^\bullet \setminus \{p_2\})^\bullet$ und u', also gesamt U_2 haben keine Konzession, wenn der Platz p_2 markiert ist. Das Netzsystem Σ ist nicht lebendig, da die Schaltfolge uuu zu einem Deadlock führt. Das reduzierte Netzsystem hingegen ist lebendig, enthält demnach keinen Deadlock. Damit Deadlocks ebenfalls bewahrt werden, müssen die folgenden strukturellen Bedingungen erfüllt sein, falls für die Partitionsmenge $|I| > 1$ gilt.

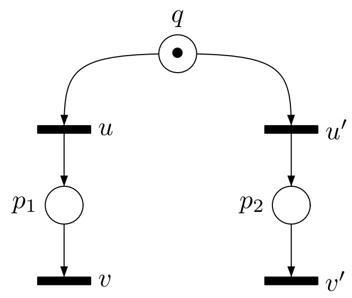


Abbildung 4.6: Beispiel für eine Netzstruktur, die quasi-persistent ist, falls $|I| > 1$ gewählt wird, und die nicht quasi-persistent ist, falls die die Indexmenge I eine einelementige Menge ist.

Definition 4.10 (*strukturelle U-Ähnlichkeit*)

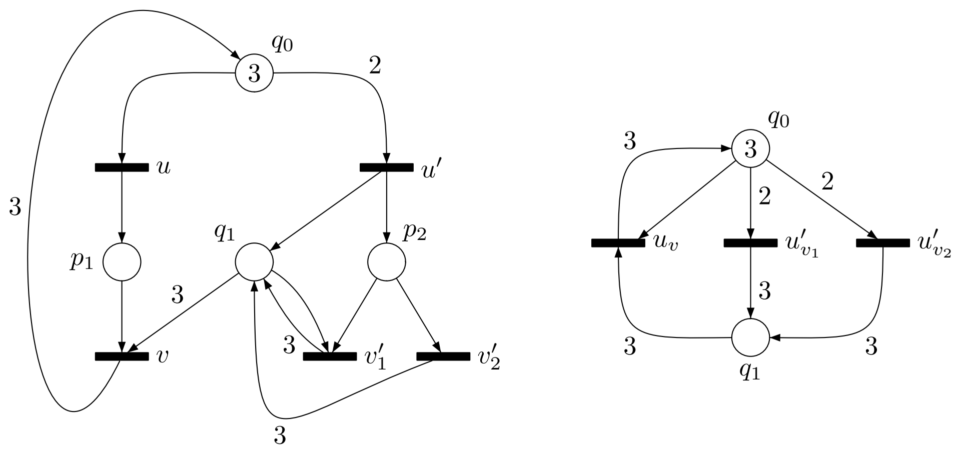
Gegeben sei ein sp-agglomerierbares, U-unabhängiges und quasi-persistentes Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Das Netzsystem Σ ist U-ähnlich, *wenn folgendes gilt:*

$$\begin{aligned}&\forall i, j \in I\, \forall u' \in U_j\, \forall v' \in V_j\, \forall u \in U_i \\ &\exists v \in V_i \text{ , so dass } \forall q \in {}^\bullet v \setminus \{p_i\} : \\ &\max[F(q,u'), F(q,v') - \mathbf{N}(q,u')] \geq \max[F(q,u), F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)].\end{aligned}$$

⌟

Es ist zu bemerken, dass jede einelementige Wahl von $I = \{1\}$ bewirkt, dass ein gegebenes Netzsystem U-ähnlich ist. Haddad und Pradat-Peyre beweisen, falls das ursprüngliche Netz ganz bestimmte der eben aufgeführten strukturellen Bedingungen erfüllt, eine oder mehrere Eigenschaften im reduzierten Netz erhalten bleibt oder bleiben. Im Weiteren dieses Kapitels verwenden wir die Abbildung $\phi : {T_r}^* \longrightarrow T^*$, die eine Schaltfolge des reduzierten Netzsystems in eine Schaltfolge des ursprünglichen Netzsystems überführt. Nähere Informationen gibt [HPP04, S. 9]. Die Tabelle 4.1 besagt, welche der fünf strukturellen Bedingungen mindestens erfüllt sein müssen, damit eine Eigenschaft bewahrt wird.

Im Folgenden werden die Bedingungen präsentiert, die die Post-Agglomeration nach Haddad und Pradat-Peyre charakterisieren. Eine der Bedingungen ist die UV-Austauschbarkeit, die bereits definiert ist (vgl. Def. 4.4.2 und Def. 4.7). Es folgen die verhaltensbasierten Bedingungen, deren Definitionen auf der Menge der erreichbaren Markierungen bzw. auf der Menge der akzeptierten Schaltfolgen eines Netzsystems beruht. Da diese Bedingungen nur Anforderungen spezifizieren, deren Gültigkeit unabhängig von der Wahl der Partitionsmenge I ist (im Gegensatz zur Quasi-Persistenz), wird zur Vereinfachung im Folgenden $|I| = 1$



(a) Netzsystem Σ, dass quasi-persistent und U-unabhängig ist

(b) reduziertes Netzsystem Σ_r

Abbildung 4.7: Beispiel für ein Netzsystem, dass nicht U-ähnlich ist. Das ursprüngliche Netzsystem ist nicht lebendig, das reduzierte Netzsystem Σ_r hingegen ist lebendig.

Regel	Σ		Σ_r	UV-austauschbar	U-unabhängig	divergenz-frei	quasi-persistent	U-ähnlich
Φ_{HPP1}	lebendig	$\Longrightarrow$	lebendig	•	•			
Φ_{HPP2}	lebendig	$\Longleftarrow$	lebendig		•		•	•
Φ_{HPP3}	$\Pi_{T_0\cup V}(L_\Sigma^{\max})$	$\supseteq$	$\Pi_{T_0\cup V}(\phi(L_{\Sigma_r}^{\max}))$		•	•		
Φ_{HPP4}	$\Pi_{T_0\cup V}(L_\Sigma^{\max})$	$\subseteq$	$\Pi_{T_0\cup V}(\phi(L_{\Sigma_r}^{\max}))$		•		stark	•
Φ_{HPP5}	$\Pi_{T_0\cup V}(L^{\omega_\Sigma})$	$=$	$\Pi_{T_0\cup V}(\phi(L_{\Sigma_r}^{\omega}))$		•	•		
Φ_{HPP6}	bewahrt Lebendigkeit und Sprache			•	•	•	stark	•

Tabelle 4.1: Strukturelle Eigenschaften eines sp-agglomerierbaren Netzes (für die Pre-Agglomerationsregeln) und das bewahrte Verhalten des reduzierten Systems.

gewählt. Die entsprechenden Indizes werden weggelassen.

Definition 4.11

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Das Netzsystem Σ ist

(1) V-unabhängig *genau dann, wenn* $\forall u \in U$, $\forall v \in V$, $\forall \sigma \in (T_0 \cup U)^*$, $\forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \,:\, m \xrightarrow{u\sigma v} \Longrightarrow m \xrightarrow{uv\sigma}$*. Das Netzsystem Σ wird* stark V-unabhängig *genannt, wenn* $\forall u \in U$, $\forall v \in V$, $\forall \sigma \in T^*$*, so dass* $(\forall \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma) \,:\, \Gamma(\sigma') \geq 0)$, $\forall m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \,:\, m \xrightarrow{u\sigma v} \Longrightarrow m \xrightarrow{uv\sigma}$*,*

(2) V-fortsetzbar *genau dann, wenn* $\forall u \in U, \forall \sigma \in T^*$*, so dass* $(\forall \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma) \,:\, \Gamma(\sigma') \geq 0) \,:\, m \xrightarrow{u\sigma} \Longrightarrow (\exists v \in V \,:\, m \xrightarrow{u\sigma v})$.

⌟

Die V-Fortseztbarkeit gewährleistet, falls p markiert ist, existiert immer eine Transition $v \in V$, die Konzession hat.

Ist ein Netzsystem V-fortsetzbar, kann jedes Schalten einer Transition $v \in V$ vorgezogen werden, so dass v unmittelbar nach einer Transition $u \in U$ schaltet, wobei das Schalten von u die Konzession für v ermöglicht hat. Die Transition v kann mit einer Schaltfolge $(T_0 \cup U)^*$ kommutieren. Dies bedeutet, ermöglicht das Schalten einer Transition $u \in U$ und das Schalten einer Schaltfolge $\sigma \in (T_0 \cup U)^*$ ($\sigma \in T^*$ mit $\forall \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma) \,:\, \Gamma(\sigma') \geq 0$ für die starke V-Unabhängigkeit) die Konzession für eine Transition $v \in V$, dann kann v auch vor der Schaltfolge σ schalten.

Sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ gegeben. Es sei $VP = ({}^\bullet V \setminus \{p\})^\bullet$. Das Netzsystem Σ ist V-unabhängig, wenn folgendes gilt: Falls der Platz $p \in P$ markiert ist, hat keine Transition aus VP Konzession. D. h. es werden keine Marken konsumiert, die zum Schalten einer Transition $v \in V$ benötigt werden. Die formale Definition der strukturellen V-Unabhängigkeit wird im Folgenden gegeben. Des weiteren ist ein Netzsystem V-unabhängig, falls das Schalten einer Transition aus V Marken auf die Plätze des Vorbereichs von V produziert.

Definition 4.12 (*strukturelle V-Unabhängigkeit [HPP04]*)

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und zwei Plätze $p, q \in P$ und zwei Transitionen $v, t \in T$. Σ ist strukturell V-unabhängig*, falls* $\forall v \in V \, \forall q \in ({}^\bullet v \setminus \{p\}) \, \forall t \in ({}^\bullet q \setminus V)$ *eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) p blockiert t oder

(2) t und v erfüllen die folgenden Bedingungen:

(a) $F(q, t) \geq \min(F(t, q), F(q, v))$ *und*

(b) $F(v, q) \geq \min(F(q, v), F(t, q))$.

Ein V-unabhängiges Netz ist stark V-unabhängig*, falls gilt p blockiert U.*

⌟

Ein Netzsystem ist V-fortsetzbar, falls immer eine Transition aus V schalten kann, sobald der Platz p markiert ist. Das ist möglich, wenn eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist: Erstens, das einzige Element des Vorbereichs von v ist der Platz p. Zweitens, es existiert eine Teilmenge von $V' \subseteq V$, so dass jede Transition aus $v' \in V'$ nur einen zweielementigen Vorbereich hat und jeder Platz $q \neq p$ aus diesen zweielementigen Vorbereichen genügend Marken zum Schalten von v' enthält, sobald der Platz p markiert ist. Drittens, es existiert eine Teilmenge $V' \subseteq V$, so dass jedes Element des Vorbereichs von V' ein strukturell sicherer Platz (für jede Anfangsmarkierung sicher ist). Für jede Transition $v \in V'$ und für jeden Platz q aus dem Vorbereich von V' gilt, dass v eine Marke von q konsumiert ($F(q, v) = 1$). Für jede Transition $v \in V$ gilt: Ist der Platz p markiert, ist die Summe der Marken aller Plätze $q \in {}^\bullet v \setminus \{p\}$ größer als die Anzahl der Plätze in ${}^\bullet v \setminus \{p\}$. Die formale Definition lautet:

Definition 4.13 (*strukturelle V-Fortsetzbarkeit*)

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein Platz $p \in P$. Σ wird als strukturell V-fortsetzbar *bezeichnet, falls eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) $\exists v \in V$, *so dass* ${}^\bullet v = \{p\}$

(2) oder $\exists V' \subset V$, *so dass:*

- *(a) der Vorbereich jeder Transition $v \in V'$ enthält nur einen weiteren Platz $p_v \in {}^\bullet p$, der von p verschieden ist*
- *(b) und die lineare Optimierungsaufgabe mit den Variablen $\{x_q\}_{q \in P}$, den Restriktionen, gegeben durch die Tatsache, dass alle Variablen positiv sind, die P-Invarianten des Netzes sowie den Ungleichungen $\forall p_v \in {}^\bullet V' \setminus \{p\}$, $x_{p_v} \leq F(p_v, v) - 1$ und $x_p \geq 1$ hat keine Lösung,*

(3) oder $\exists V' \subset V$, *so dass:*

- *(a)* $\forall q \in {}^\bullet V' \, \exists \vec{Y} \in \mathbb{N}^{|P|} : \vec{Y} \cdot \mathbf{N} = 0 \wedge \vec{Y}(q) = 1$,
- *(b)* $\forall v \in V'$, $\forall q \in {}^\bullet v$, $F(q, v) = 1$,
- *(c) die lineare Optimierungsaufgabe mit den Variablen $\{x_q\}_{q \in P}$ und den Restriktionen, gegeben durch die Tatsache, dass alle Variablen positiv sind, den P-Invarianten des Netzes sowie den Ungleichungen $\forall v \in V' : \sum_{q \in {}^\bullet v \setminus \{p\}} x_q \leq \mid {}^\bullet v \mid -2$ und $x_p \geq 1$ hat keine Lösung.*

⌟

Mithilfe dieser Bedingungen sind ebenfalls Aussagen über das bewahrte Verhalten für eine Reduktion möglich. In Tabelle 4.2 ist die Abhängigkeit der bewahrten Eigenschaften von den strukturellen Bedingungen dargestellt.

Neben der Lebendigkeit und der Gleichheit der Sprache zeigen wir, dass unter bestimmten Bedingungen die Beschränktheit durch das Anwenden einer Agglomeration bewahrt wird. Wir beweisen zunächst, dass das Anwenden einer der Agglomerationsregeln die Beschränktheit bewahrt, d. h. wenn das ursprüngliche Netzsystem beschränkt ist, enthält das reduzierte Netzsystem keinen unbeschränkten Platz.

Regel	Σ		Σ_r	UV-austauschbar	V-unabhängig	V-fortsetzbar
Φ_{HPP7}	lebendig	$\Longrightarrow$	lebendig	•	•	
Φ_{HPP8}	lebendig	$\Longleftarrow$	lebendig		•	•
Φ_{HPP9}	$\Pi_{T_0 \cup U}(L^{\max})$	$=$	$\Pi_{T_0 \cup U}(\phi(L^{\max}))$			•
Φ_{HPP10}	$\Pi_{T_0 \cup U}(L^{\omega})$	$=$	$\Pi_{T_0 \cup U}(\phi(L^{\omega}))$		stark	•
Φ_{HPP11}	bewahrt Lebendigkeit und Sprache			•	stark	•

Tabelle 4.2: Strukturelle Eigenschaften eines sp-agglomerierbaren Netzes (für das Post-Agglomerations Schema) und das bewahrte Verhalten des reduzierten Netzes .

Proposition 4.14

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch die Agglomeration gemäß Definition 4.3 erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Es gilt:

$$\Sigma \textit{ beschränkt} \Longrightarrow \Sigma_r \textit{ beschränkt.}$$

┘

Beweis von 4.14 : Wir beweisen die Kontraposition: Σ_r unbeschränkt $\Longrightarrow \Sigma$ unbeschränkt. Satz 4.3 in [Sta90, S. 40] besagt:

$$\Sigma \text{ unbeschränkt} \iff \exists \omega \in T^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}(M_0) : m \xrightarrow{\omega} m' \Rightarrow m' > m, \tag{4.1}$$

wobei $m > m'$ genau dann gilt, wenn $\forall p \in P : m'(p) \geq m(p)$ und $\exists p \in P : m'(p) > m(p)$ [?]. In [HPP04, S. 10] bzw. [PPP00, S. 394] wird die folgende Behauptung aufgestellt und bewiesen:

$$\forall \omega_r \in T_r^* : m|_{P_r} \xrightarrow{\omega_r} m|'_{P_r} \iff m|_{P_r} \xrightarrow{\phi(\omega_r)} m'|_{P_r}. \tag{4.2}$$

Es gilt dann die folgende Argumentationskette:

$$\begin{aligned} \Sigma_r \text{ unbeschränkt} \quad &\overset{(4.1)}{\iff} \quad \exists \omega_r \in T_r^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}(M_0) : m \xrightarrow{\omega_r} m' \Rightarrow m' > m \\ &\overset{(4.2)}{\Longrightarrow} \quad \exists \omega \in T^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}(M_0) : m \xrightarrow{\omega} m' \Rightarrow m' > m \\ &\overset{(4.1)}{\iff} \quad \Sigma \text{ unbeschränkt.} \end{aligned}$$

■

Im Folgenden beweisen wir, dass alle Pre-Agglomerationsregeln zusätzlich die Umkehrung von Proposition 4.14 erfüllen. Wir zeigen, die Unbeschränktheit des ursprünglichen Netzsystems wird dann erhalten, wenn das Netzsystem U-unabhängig ist. Es wird bewiesen, dass jede unendliche Schaltfolge, die einen

Platz unbeschränkt werden lässt, umgeordnet werden kann, so dass unendliche Schaltfolgen entstehen, die ebenfalls vom reduzierten Netzsystem akzeptiert werden. Diese permutierten Schaltfolgen führen ebenfalls dazu, dass ein Platz im reduzierten Netzsystem unbeschränkt ist. Hierfür sind drei Hilfssätze notwendig. Zum einen wird in den folgenden zwei Lemmata bewiesen, dass unter bestimmten Vorraussetzungen Plätze des ursprünglichen Netzsystems im reduzierten Netzsystem ebenfalls enthalten sind. Zum anderen wird vor dem eigentlichen Satz bewiesen, dass jede Schaltfolge, die zur Unbeschränktheit eines Platzes führt, bestimmte Bedingungen erfüllt.

Zunächst zeigen wir für ein Netzsystem, dass ein Platz $q \in P$, der ein Element des Nachbereichs von $(T_0 \cup V)$ ist, auch ein Element des Nachbereichs irgendeiner Transition der Transitionsmenge des reduzierten Netzsystems ist und somit $q \in P_r$ gilt.

Lemma 4.15

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch die Agglomeration gemäß Definition 4.3 erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Weiterhin sei ein Platz $p \in P$ gegeben, der Σ gemäß Definition 4.2 sp-agglomerierbar macht, und ein Platz $q \in P \setminus \{p\}$, wobei q unbeschränkt ist. Sei $U = {}^\bullet p$ und $V = p^\bullet$. Es gilt:

$$\forall q \in (T_0 \cup V)^\bullet \, \exists t' \in T_r \, : \, q \in t'^\bullet.$$

┘

Beweis von 4.15: Wir unterscheiden zwei Fälle: Zum einen ist der Platz q im Nachbereich einer Transition aus T_0 enthalten. Zum anderen ist q im Nachbereich einer Transition aus V enthalten.

$q \in T_0{}^\bullet$: Dies bedeutet, dass eine Transition $t_0 \in T_0$ existiert, wobei $F(t_0, q) \geq 1$ gilt. Nach Definition 4.3 gilt $F_r(t_0, q) = F(t_0, q)$.

$q \in V^\bullet$: Dies bedeutet, es existiert immer ein $v \in V$, wobei $F(v, q) \geq 1$. Wir zeigen, dass ein $u_v \in (U \times V) \subseteq T_r$ existiert, so dass q im Nachbereich der Transition u_v enthalten ist. Nach Definition 4.3 für die Agglomeration gilt für die Flussrelation zu und von Transitionen u_v:

$$\begin{aligned} F_r(q, u_v) &= \max[F(q, u), F(q, v) - \mathbf{N}(q, u)] \qquad (4.3) \\ F_r(u_v, q) &= \mathbf{N}(q, u) + \mathbf{N}(q, v) + F_r(q, u_v). \end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Erstens, das Maximum von $F(q, u)$ und $F(q, v) - \mathbf{N}(q, u)$ ist $F(q, u)$, was gleichbedeutend mit $F(q, u) \geq F(q, v) - \mathbf{N}(q, u)$ ist. Zweitens ist $F(q, v) - \mathbf{N}(q, u)$: $F(q, u)$ das Maximum von $F(q, u)$ und $F(q, v) - \mathbf{N}(q, u)$. Dies ist äquivalent zu der Aussage $F(q, u) < F(q, v) - \mathbf{N}(q, u)$.

(i) $F(q, u) \geq F(q, v) - \mathbf{N}(q, u)$. Zum einen folgt mit $-\mathbf{N}(q, u) = -F(u, q) + F(q, u)$ unmittelbar:

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad F(q, u) \geq F(q, v) - F(u, q) + F(q, u) \\ &\Longrightarrow \quad 0 \leq F(u, q) - F(q, v). \qquad (4.4) \end{aligned}$$

Zum anderen folgt mit (4.3), dass $F_r(q, u_v) = F(q, u)$ gilt. Damit gilt

$$\begin{array}{rcll} F_r(u_v,q) & = & \mathbf{N}(q,u)+\mathbf{N}(q,v) & + \quad F(q,u) \\ & = & F(u,q)-F(q,u) & + \quad F(v,q)-F(q,v) \quad + \quad F(q,u) \\ \text{dann:} & = & \underbrace{F(u,q)-F(q,v)}_{\geq 0,\ \text{wegen (4.4)}} & + \quad \underbrace{F(v,q)}_{>0.} \\ & > & 0 & \end{array}$$

(ii) $F(q,u) < F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)$. Mit (4.3) folgt unmittelbar: $F_r(q,u_v) = F(q,v) - F(u,q) + F(q,u)$. Hiermit ergibt sich dann:

$$\begin{array}{rcl} F_r(u_v,q) & = & F(u,q)-F(q,u)+F(v,q)-F(q,v)+ \\ & & F(q,v)-F(u,q)+F(q,u) \\ & = & F(v,q) \\ & > & 0. \end{array}$$

■

Sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein reduziertes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ gegeben. Unter der Vorraussetzung, dass der Platz $p \in P$ beschränkt ist, zeigen wir, dass ein unbeschränkter Platz $q \in P$ aus dem Nachbereich von $U \subseteq T$ ebenfalls im Nachbereich irgendeiner Transition aus T_r enthalten ist und somit $q \in P_r$ gilt.

Lemma 4.16

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch die Agglomeration gemäß Definition 4.3 erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Weiterhin sei ein Platz $p \in P$ gegeben, der Σ gemäß Definition 4.2 sp-agglomerierbar macht, und ein Platz $q \in P \setminus \{p\}$, wobei q unbeschränkt ist. Sei $U = {}^\bullet p$ und $V = p^\bullet$. Wenn p beschränkt ist, dann folgt:

$$\forall q \in U^\bullet\ \exists t' \in T_r\ :\ q \in t'^\bullet.$$

⌟

Beweis von 4.16: Wir zeigen zunächst, wenn eine Transition $u \in U$ und eine Transition $v \in V$ existieren, so dass $F(u,q) > F(v,q)$ gilt, die Behauptung folgt. Es muss dann nur noch gezeigt werden, dass solche Transition u und v existieren. Dies beweisen wir, indem wir zeigen, falls für jede Transition $u \in U$ und $v \in V$ die Aussage $F(u,q) \geq F(q,v)$ gilt, der Platz q nicht unbeschränkt ist. Zunächst zeigen wir, falls $\exists u \in U, \exists v \in V\ :\ F(u,q) \not< F(q,v)$, muss der Platz q im Nachbereich einer Transition aus T_r enthalten sein. Es gilt die folgende Argumentationskette:

$$\begin{array}{rll} & F(u,q) > F(q,v) & \\ \Longrightarrow & 0 > F(q,v) - F(u,q) & (4.5) \\ \Longrightarrow & F(q,u) > F(q,v) - F(u,q) + F(q,u) & \\ \Longrightarrow & F(q,u) > F(q,v) - (F(u,q) - F(q,u)) & \\ \Longrightarrow & F(q,u) > F(q,v) - \mathbf{N}(q,u) & \\ \Longrightarrow & \max[F(q,u), F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)] = F(q,u). & (4.6) \end{array}$$

Da wir im vorhergehenden Lemma 4.15 gezeigt haben, falls $q \in V^\bullet$ ist, dass der Platz q im Nachbereich einer Transition $u_v \in T_r$ enthalten ist, können wir annehmen, dass $q \notin V^\bullet$ gilt. Für diesen Fall gilt:

$$\forall v \in V\ :\ F(v,q) = 0. \tag{4.7}$$

Wir zeigen, dass eine Transition $u_v \in (U \times V) \subseteq T_r$ existiert, in deren Nachbereich q enthalten ist. Es gelten die folgenden äquivalenten Umformungen:

$$\begin{aligned}
F_r(u_v, q) &= \mathbf{N}(q,u) + \mathbf{N}(q,v) + \max[F(q,u), F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)] \\
&\overset{(4.6)}{=} \mathbf{N}(q,u) + \mathbf{N}(q,v) + F(q,u) \\
&= F(u,q) - F(q,u) + F(v,q) - F(q,v) + F(q,u) \\
&= F(u,q) + F(v,q) - F(q,v) \\
&\overset{(4.7)}{=} F(u,q) - F(q,v) \\
&\overset{(4.5)}{>} 0.
\end{aligned}$$

Es muss noch gezeigt werden, dass immer zwei Transitionen $u \in U$ und $v \in V$ existieren, so dass $F(u,q) > F(q,v)$ gilt. Es wird gezeigt, wenn $\forall u \in U \, v \in V \, : F(u,q) \leq F(q,v)$ gilt, kann q nicht unbeschränkt und zugleich p beschränkt sein. Sei $\forall u \in U \, v \in V \, : \, F(u,q) \leq F(q,v)$. Da generell $\forall r \in T \, : \, \mathbf{N}(q,r) \leq F(r,q)$ gilt und nur der Fall betrachtet wird, dass $\forall v \in V \, : \, F(v,q) = 0$, gilt die folgende Aussage:

$$\forall u \in U \, \forall v \in V \, : \, \mathbf{N}(q,v) = F(q,v) \geq F(u,q) \geq \mathbf{N}(u,q).$$

Gegeben seien Koeffizienten $d_i \leq 0$, wobei $i \in \{1, \ldots, k\}$ mit $k = |T| - |U| - |V|$ gilt, und es sei $a_i = \mathbf{N}(q, u_i)$ sowie $b_i = \mathbf{N}(q, v_i)$. Sei $|U| = n$ und $|V| = m$. Hiermit ist die Form der Inzidenzmatrix des Netzsystems wie folgt definiert:

$$\mathbf{N} = \begin{array}{l}
\begin{array}{cccccccccccc} & & & t_1 & \dots & t_n & t_{n+1} & \dots & t_{n+m} & & & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 \\
d_1 & \dots & d_i & a_1 & \dots & a_{|U|} & b_1 & \dots & b_{|V|} & d_j & \dots & d_k \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right)
\begin{array}{c} \\ \\ p \\ q \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Sei nun

$$b_{\max} = \max[b_1, \ldots, b_{|V|}]$$

das Maximum des Inzidenzvektors $\vec{l_q}$ (es ist tatsächlich das Maximum vom gesamten Vektor, da $\forall i \in \{1, \ldots, |U|\}, \forall j \in \{1, \ldots, |V|\} \, : \, a_i \geq b_j$). Das folgende Ungleichungssystem:

$$\vec{Y} \cdot \mathbf{N} \leq 0 \tag{4.8}$$

besitzt die Lösung:

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{|P|} \end{pmatrix} \qquad y_i = \begin{cases} -b_{\max} & \text{, falls } \; i = p \\ 1 & \text{, falls } \; i = q \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

Mit dem Ungleichungssystem (4.8) erhält man die Ungleichung:

$$-b_{\max} \cdot m(p) + m(q) \leq m_0(q).$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$m(q) \leq b_{\max} \cdot m(p) + m_0(q).$$

Da p beschränkt ist, würde dies bedeuten, dass auch q beschränkt ist. Dies ist ein Widerspruch zur Vorraussetzung. ■

Mit dem nächsten Lemma zeigen wir folgendes: Falls eine Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ unbeschränkt ist, dann existiert eine endliche Schaltfolge $\sigma \in L_\Sigma(M_0)$, die immer wieder schalten kann. Diese Schaltfolge σ und jeder Präfix $\sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma)$ erfüllt bestimmte Bedingungen, wie wir im nächsten Lemma zeigen.

Lemma 4.17

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Es gilt dann die folgende Aussage:

$$\begin{aligned} \Sigma \textit{ unbeschränkt} \quad \Longrightarrow \quad & \exists q' \in P \, \exists m, m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \, \exists \sigma \in T^* : \\ & m \xrightarrow{\sigma} m' \wedge m'(q') > m(q') \\ & \wedge (\forall q \in P : m'(q) \geq m(q)) \\ & \wedge (\forall \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma) : \Gamma(\sigma') \geq 0). \end{aligned}$$

⌟

Beweis von 4.17 : Satz 4.3 in [Sta90, S. 40] besagt:

$$\begin{aligned} & \Sigma \text{ unbeschränkt} \\ \Longleftrightarrow \quad & \exists q' \in P, \exists m, m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0), \exists \sigma \in T^* : \\ & m \xrightarrow{\sigma} m' \wedge m'(q') > m(q') \wedge (\forall q \in P : m'(q) \geq m(q)). \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu der folgenden Darstellung:

$$M_0 \xrightarrow{\sigma_0} m_1 \xrightarrow{\sigma} m_2 \xrightarrow{\sigma} \dots \xrightarrow{\sigma} m_i \xrightarrow{\sigma} \dots \tag{4.9}$$

Hierbei ist $i \in \mathbb{N}$ und es gilt $m_i(q') < m_{i+1}(q')$. Sei σ der Gestalt, dass ein Präfix $\sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma)$ existiert, so dass $\Gamma(\sigma') < 0$ gilt. Es ist klar, dass eine Schaltfolge existiert, für die $\Gamma(\sigma')$ minimal ist (da σ eine endliche Schaltfolge ist). Sei σ' diese Schaltfolge. Dann gilt für σ':

$$\exists \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma) \, \nexists \sigma'' \in \mathit{Pref}(\sigma) : \Gamma(\sigma'') < \Gamma(\sigma'). \tag{4.10}$$

Für jeden Platz $q \in P$ gilt nach Vorraussetzung, q enthält bei der Markierung m' mindestens genauso viele Marken wie bei der Markierung m. Anders formuliert gilt:

$$\forall q \in P : m_i(q) \leq m_{i+1}(q) \qquad i \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Nach [HPP04] gibt es in einem sp-agglomerierbaren Netzsystem einen Platz $p \in P$, der die folgende Gleichung erfüllt:

$$m'(p) = |\Pi_U(\sigma)| + |\Pi_V(\sigma)| + m(p), \text{ wobei } U = {}^\bullet p, V = p^\bullet.$$

Da $m'(p) \geq m(p)$ gilt, muss

$$\Gamma(\sigma) = |\Pi_U(\sigma)| + |\Pi_V(\sigma)| \geq 0 \tag{4.12}$$

gelten. Hieraus leiten sich zwei Aussagen ab. Erstens, da $\Gamma(\sigma') < 0$ gilt, sind σ und σ' nicht identisch. Es existiert demnach ein nichtleerer Suffix $\sigma^{|\sigma'|} \neq \lambda$. Weiterhin gilt für eine aus zwei Schaltfolgen zusammengesetzte Schaltfolge $\sigma_m = \sigma_k \sigma_l$:

$$\Gamma(\sigma_m) = \Gamma(\sigma_k) + \Gamma(\sigma_l). \tag{4.13}$$

Zweitens, sei $\sigma = \sigma' \sigma^{|\sigma'|}$. Dann folgt:

$$\Gamma(\sigma) \overset{(4.13)}{=} \Gamma(\sigma') + \Gamma(\sigma^{|\sigma'|}) \overset{(4.12)}{\geq} 0. \tag{4.14}$$

Würde ein Präfix $\sigma'' \in \mathit{Pref}(\sigma^{|\sigma'|})$ existieren, so dass $\Gamma(\sigma'') < 0$ gilt, so wäre σ nicht die Schaltfolge aus der Menge der Präfixe von σ, bei der Γ minimal ist. Es gilt demnach:

$$\forall \sigma'' \in \mathit{Pref}\left(\sigma^{|\sigma'|}\right) \,:\, \Gamma(\sigma'') \geq 0. \tag{4.15}$$

Wir betrachten nun die Schaltfolge $\sigma^{|\sigma'|}\sigma'$. Da $\Gamma(\sigma')$ der minimalste Wert aller Γ-Werte ist, gilt für alle Präfixe von σ (vgl. (4.10)), dass der Γ-Wert jedes Präfix von σ' größer gleich $\Gamma(\sigma')$ ist, also:

$$\forall \sigma^* \in \mathit{Pref}(\sigma') \,:\, \Gamma(\sigma^*) \geq \Gamma(\sigma'). \tag{4.16}$$

Wegen (4.15) und (4.16) und da $\Gamma(\sigma^{|\sigma'|}\sigma') \geq 0$, folgt dann unmittelbar:

$$\forall \sigma''' \in \mathit{Pref}(\sigma^{|\sigma'|}\sigma') \,:\, \Gamma(\sigma''') \geq 0. \tag{4.17}$$

Da $\sigma = \sigma'\sigma^{|\sigma'|}$ gilt, ist (4.9) auch in der folgenden Form darstellbar:

$$\begin{array}{ll}
 & M_0 \xrightarrow{\sigma_0} m_1 \xrightarrow{\sigma'\sigma^{|\sigma'|}} m_2 \xrightarrow{\sigma'\sigma^{|\sigma'|}} \ldots \xrightarrow{\sigma'\sigma^{|\sigma'|}} m_i \xrightarrow{\sigma'\sigma^{|\sigma'|}} \ldots \\
\Longrightarrow & \forall m_i \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0)\, \exists m_i' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \,:\, i \in \mathbb{N}^+ \wedge \\
 & M_0 \xrightarrow{\sigma_0} m_1 \xrightarrow{\sigma'} m_1' \xrightarrow{\sigma^{|\sigma'|}} m_2 \xrightarrow{\sigma'} m_2' \xrightarrow{\sigma^{|\sigma'|}} \ldots \xrightarrow{\sigma^{|\sigma'|}} m_i \xrightarrow{\sigma'} m_i' \xrightarrow{\sigma^{|\sigma'|}} \ldots \\
\Longrightarrow & M_0 \xrightarrow{\sigma_0\sigma'} m_1' \xrightarrow{\sigma^{|\sigma'|}\sigma'} m_2' \xrightarrow{\sigma^{|\sigma'|}\sigma'} \ldots \xrightarrow{\sigma^{|\sigma'|}\sigma'} m_i' \xrightarrow{\sigma^{|\sigma'|}\sigma'} \ldots .
\end{array} \tag{4.18}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\forall q \in P \,:\, m_{i+1}(q) &= \vec{l}_q \cdot \boldsymbol{\sigma} + m_i(q) \\
&= \vec{l}_q \cdot (\boldsymbol{\sigma'} + \boldsymbol{\sigma}^{|\boldsymbol{\sigma'}|}) + m_i(q) \\
&= \vec{l}_q \cdot \boldsymbol{\sigma'} + \vec{l}_q \cdot \boldsymbol{\sigma}^{|\boldsymbol{\sigma'}|} + m_i(q).
\end{aligned}$$

Demnach muss $\vec{l}_q \cdot \boldsymbol{\sigma'} + \vec{l}_q \cdot \boldsymbol{\sigma}^{|\boldsymbol{\sigma'}|} \overset{(4.11)}{\geq} 0$ gelten. Es folgt unmittelbar:

$$\forall q \in P \,:\, m_{i+1}'(q) = \vec{l}_q \cdot \boldsymbol{\sigma}^{|\boldsymbol{\sigma'}|} + \vec{l}_q \cdot \boldsymbol{\sigma'} + m_i'(q) \geq m_i'(q). \tag{4.19}$$

Wegen Gleichung 4.19 existieren zwei Markierungen m und m' mit $m \xrightarrow{\sigma^{|\sigma'|}\sigma'} m'$, so dass für jeden Platz $q \in P$ gilt $m'(q) \geq m(q)$ und ein $q' \in P$ existiert mit $m'(q') > m(q')$. Wegen Gleichung 4.18 sind $m, m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0)$. Mit Gleichung 4.17 folgt dann die Behauptung aus Lemma 4.17. ∎

Abschließend beweisen wir: Ist ein Netzsystem unbeschränkt, ist das durch die Agglomeration erhaltene reduzierte Netzsystem ebenfalls unbeschränkt, falls das ursprüngliche Netzsystem U-unabhängig ist.

Satz 4.18

Gegeben sei sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch die Agglomeration gemäß Definition 4.3 erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Erfüllt das Netzsystem Σ die U-Unabhängigkeit, dann gilt die folgende Aussage:

$$\Sigma \;\; \textit{unbeschränkt} \Longrightarrow \Sigma_r \;\; \textit{unbeschränkt}.$$

⌟

Beweis von 4.18 : Da Σ nach Voraussetzung sp-agglomerierbar ist und wegen des Lemmas 4.17, gilt:

$$\begin{aligned}\Sigma \text{ unbeschränkt} \quad \Longrightarrow \quad & \exists q' \in P\, \exists m, m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0)\, \exists \sigma \in T^* : \\ & m \xrightarrow{\sigma} m' \wedge m'(q') > m(q') \\ & \wedge(\forall q \in P : m'(q) \geq m(q)) \\ & \wedge(\forall \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma) : \Gamma(\sigma') \geq 0).\end{aligned}$$

Proposition 12 in [HPP04, S. 33] besagt, wenn Σ sp-agglomerierbar und U-unabhängig ist, für jede Schaltfolge $\sigma \in T^*$, wobei $\forall \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma) : \Gamma(\sigma') \geq 0$ gilt, eine Permutation von σ, $\widehat{\sigma} = \sigma_{\bowtie}\sigma_{\triangleleft}$, existiert und das Folgende gilt:

$$m \xrightarrow{\widehat{\sigma}} m' \tag{4.20}$$

$$\sigma_{\triangleleft} \in U^* \tag{4.21}$$

$$\sigma_{\bowtie} \text{ ist simulierbar.} \tag{4.22}$$

Der Beweis hierfür befindet sich ebenfalls in Anhang B.1 in [HPP04, S. 33 ff.]. Des Weiteren gelten die folgenden Aussagen (vgl. hierzu Bemerkung 1 in [HPP04, S.9] und Satz 1 in [HPP04, S.10]):

$$\sigma \in T^* \text{ ist simulierbar} \iff \exists \sigma_r \in T_r^* : \sigma = \phi(\sigma_r) \tag{4.23}$$

$$\forall \sigma_r \in T_r^* : m|_{P_r} \xrightarrow{\sigma_r} m|'_{P_r} \iff m \xrightarrow{\phi(\sigma_r)} m'. \tag{4.24}$$

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

(1) $\sigma_{\triangleleft} = \lambda$

$$\begin{aligned} & \overset{(4.20)}{\Longrightarrow} \quad m \xrightarrow{\sigma_{\bowtie}} m' \\ & \overset{(4.23)}{\Longrightarrow} \quad \exists \sigma_{\bowtie r} \in T_r^* : \sigma_{\bowtie} = \phi(\sigma_{\bowtie r}) \\ & \overset{(4.24)}{\Longrightarrow} \quad \exists \sigma_{\bowtie r} \in T_r^* : m|_{P_r} \xrightarrow{\sigma_{\bowtie r}} m|'_{P_r}\end{aligned}$$

Weiterhin gilt $\Gamma(\sigma_{\bowtie}) = 0$, woraus die Beschränktheit von p folgt. Deshalb existiert ein Platz $q' \in P \setminus \{p\}$, wobei q' unbeschränkt ist. Wenn $q' \in (T_0 \cup V)^\bullet$ ist, folgt mit Lemma 4.15, dass der Platz q' ein Element von P_r ist und demzufolge ein unbeschränkter Platz in Σ_r existiert und somit Σ_r selbst unbeschränkt ist. Ist $q' \in U^\bullet$ und es gilt $q \notin (T_0 \cup V)^\bullet$ (andernfalls wäre q' wie eben gezeigt auf jeden Fall in Σ_r), dann folgt mit Lemma 4.16, dass q' ebenfalls im reduzierten Netzsystem Σ_r enthalten ist und Σ_r somit unbeschränkt ist.

(2) $\sigma_{\triangleleft} \neq \lambda$. Es soll zunächst gezeigt werden, dass für jede Transition aus der Schaltfolge $u\sigma_{\triangleleft}$ ein Vorplatz q existiert, so dass $\mathbf{N}(q,u) < 0$ gilt. Dies beweisen wir indirekt. Angenommen $\forall u \in U : \mathbf{N}(q,u) \geq 0$, dann hat die Transition u, nachdem sie geschaltet hat, wieder Konzession und p ist markiert. Da $F(q,u) > 0$ ist, muss ebenfalls $F(u,q) > 0$ gelten, da $\mathbf{N}(q,u) = F(u,q) - F(q,u) \geq 0$ gilt. Dies wiederum bedeutet, dass $u \in ({}^\bullet({}^\bullet p))^\bullet$ ist. Dies steht im Widerspruch zur U-Unabhängigkeit, die verlangt, dass jede Transition des Nachbereichs eines Platzes $q \neq p$ aus dem Nachbereich von u keine Konzession haben darf, wenn p markiert ist. Es gilt demnach:

$$\exists u' \in \sigma_{\triangleleft}, \exists q \in {}^\bullet u' : \mathbf{N}(q,u') < 0. \tag{4.25}$$

Es gilt die folgende Argumentationskette:

$$\begin{array}{ll}(4.25) \quad \Longrightarrow & \exists m_{\bowtie} \in \mathcal{R}_{\Sigma}(M_0) \,:\, m \xrightarrow{\sigma_{\bowtie}} m_{\bowtie} \xrightarrow{\sigma_{\lhd}} m' \wedge m_{\bowtie}(q) > m'(q) \\ \quad \text{wegen } m'(q) \geq m(q) \text{ folgt } m_{\bowtie}(q) > m'(q) & \\ \quad \stackrel{(4.23)}{\Longrightarrow} & \exists \sigma_{\bowtie r} \in T_r^* \,:\, \sigma_{\bowtie} = \phi(\sigma_{\bowtie r}) \\ \quad \stackrel{(4.24)}{\Longrightarrow} & \exists \sigma_{\bowtie r} \in T_r^* \,:\, m \xrightarrow{\sigma_{\bowtie r}}_r m_{\bowtie}, \text{ wobei } m_{\bowtie}(q) > m(q)\end{array}$$

Es bleibt für die beiden eben betrachteten Fälle zu zeigen, dass p und jeder Platz $q' \in U^{\bullet}$ bei der Markierung $m_{\bowtie}$ genauso viele Marken besitzt wie bei der Markierung m. Es gilt $m(p) = m_{\bowtie}(p)$, da $\Gamma(\sigma_{\bowtie}) = 0$ und $m_{\bowtie}(p) = m(p) + \Gamma(\sigma_{\bowtie})$ gilt. Letzteres gilt, da $\Gamma(\sigma_{\bowtie})$ die Anzahl der Transitionen aus dem Vor- und Nachbereich von p ist und diese Transitionen genau eine Marke produzieren bzw. konsumieren. Da $\sigma_{\lhd} \neq \lambda$ gilt, ist $m'(p) > m(p)$. Daher ist der Platz p unbeschränkt. Es sei nun eine Markierung m_{∞} erreicht, für die $m_{\infty}(p) = \infty$ gilt. Sei m_{∞} der Art, dass $m_{\infty} > m$ gilt, dann enthält der Platz p nach dem Schalten der endlichen Schaltfolge σ immer noch Marken. Dementsprechend darf σ keine Transitionen aus dem Nachbereich eines Platzes $q' \in U^{\bullet}$ enthalten, da sonst die U-Unabhängigkeit verletzt würde. Dies bedeutet, dass niemals Marken von einem Platz aus dem Nachbereich von U konsumiert werden. Deshalb ist für jeden Platz aus dem Nachbereich von U die Anzahl der Marken einer Folgemarkierung nie kleiner als die der aktuellen Markierung.

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Schaltfolge σ ausgehend von der Anfangsmarkierung M_0 unendlich oft schalten kann im reduzierten Netzsystem. Sei σ_{ω} eine unendliche Schaltfolge, die aus der unendlich oft wiederholten Schaltfolge σ besteht. Dann ließe sich die Schaltfolge, die zur Unbeschränktheit eines Platzes führt, folgendermassen notieren:

$$M_0 \xrightarrow{\sigma_0} m \xrightarrow{\sigma_{\omega}} .$$

Für σ_0 und σ_{ω} gilt offensichtlich, dass für jeden Präfix einer der beiden Schaltfolgen die Zählfunktion Γ größer gleich 0 sein muss. Hieraus folgt, dass eine Permutation $\widehat{\sigma_0} = \sigma_{\bowtie 0}\sigma_{\lhd 0}$ existiert. Mit der Definition 4.4 der U-Unabhängigkeit folgt dann:

$$\forall m_{\bowtie 0} \in \mathcal{R}_{\Sigma}(M_0) \,:\, m_{\bowtie 0} \xrightarrow{\sigma_{\lhd 0}\sigma_{\omega}}\Longrightarrow m_{\bowtie 0} \xrightarrow{\sigma_{\omega}\sigma_{\lhd 0}} . \tag{4.26}$$

Es gilt dann folgende Argumentation:

$$\begin{array}{rcl} M_0 \xrightarrow{\sigma_0} m \xrightarrow{\sigma_{\omega}} & \Longrightarrow & M_0 \xrightarrow{\sigma_{\bowtie 0}\sigma_{\lhd 0}} m \xrightarrow{\sigma_{\omega}} \\ & \stackrel{(4.26)}{\Longrightarrow} & M_0 \xrightarrow{\sigma_{\bowtie 0}} m_{\bowtie 0} \xrightarrow{\sigma_{\omega}\sigma_{\lhd 0}} \\ & \stackrel{(4.23)}{\Longrightarrow} & \exists \sigma_{0r} \in T_r^* \,:\, \sigma_{\bowtie 0} = \phi(\sigma_{0r}) \\ & \stackrel{(4.24)}{\Longrightarrow} & \exists \sigma_{0r} \in T_r^* \,:\, m|_{P_r} \xrightarrow{\sigma_{0r}} m_{\bowtie 0}|_{P_r} \xrightarrow{\sigma_{\omega}} . \end{array}$$

■

Welche strukturellen Post-Agglomerationsbedingungen notwendig sind, damit das Anwenden einer Post-Agglomerationsregel die Unbeschränktheit des ursprünglichen Netzsystems bewahrt, zeigen wir im Folgenden.

Proposition 4.19

Gegeben sei sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$

und ein durch die Agglomeration gemäß Definition 4.3 erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Wenn das Netzsystem Σ stark V-unabhängig und V-fortsetzbar ist, dann gilt die folgende Aussage:

$$\Sigma \text{ unbeschränkt} \Longrightarrow \Sigma_r \text{ unbeschränkt.}$$

⌟

Beweis von 4.19 : Wir zeigen zunächst, dass der Platz p nicht unbeschränkt ist. Das folgt aus Vorraussetzung, dass das Netzsystem stark V-fortsetzbar ist. In diesem Fall blockiert der Platz p die Menge $U = {}^\bullet p$. D. h. falls p markiert ist, darf keine Transition aus U schalten. Der Platz p ist demnach sicher. Da Σ unbeschränkt ist, muss demnach ein weiterer Platz $q \neq p$ existieren, wobei q unbeschränkt ist. Mit Lemma 4.16 folgt dann, dass der Platz q im reduzierten Netzsystem enthalten ist. Haddad und Pradat-Peyre beweisen in [HPP04], dass LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewahrt werden. Da sich die Unbeschränkheit als LTL-Formel ohne das $\mathcal{X}$-Fragment formulieren lässt, folgt die Behauptung. ■

Mit den Ergebnissen von [HPP04] und unseren Ergebnissen können wir folgendes Korollar schlussfolgern.

Korollar 4.20

Gegeben sei ein sp-agglomerierbares Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch die Agglomeration gemäß Definition 4.3 erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Des Weiteren sei eine aktionsbasierte (bzw. zustandsbasierte) LTL^r-$\mathcal{X}$-Formel φ gegeben. Es gelten die folgenden Aussagen:

1. *Falls die Agglomeration einer der Regeln Φ_{HPP1}, Φ_{HPP2}, Φ_{HPP3}, Φ_{HPP4}, Φ_{HPP5}, Φ_{HPP6}, Φ_{HPP10} oder Φ_{HPP11} entspricht, dann gilt:*

$$\Sigma \text{ beschränkt} \iff \Sigma_r \text{ beschränkt.}$$

2. *Falls die Agglomeration einer der Regeln Φ_{HPP7}, Φ_{HPP8}, oder Φ_{HPP9} entspricht, dann gilt:*

$$\Sigma \text{ beschränkt} \Longrightarrow \Sigma_r \text{ beschränkt.}$$

3. *Falls die Agglomeration einer der Regeln Φ_{HPP7}, Φ_{HPP8}, oder Φ_{HPP10} entspricht und Σ sicher ist, dann gilt:*

$$\Sigma \text{ beschränkt} \Longleftarrow \Sigma_r \text{ beschränkt.}$$

4. *Falls die Agglomeration einer der Regeln Φ_{HPP5}, Φ_{HPP6}, Φ_{HPP9} oder Φ_{HPP10} entspricht, dann gilt:*

$$\Sigma \models \varphi \iff \Sigma_r \models \varphi.$$

⌟

Beweis von 4.20 :

1. Mit Proposition 4.14 folgt, dass jede Pre- und Post-Agglomeration die Beschränktheit erhält. Dies bedeutet, dass die Beschränkheit des ursprüng-

lichen Netzsystems die Beschränktheit des reduzierten Netzsystems impliziert. Mit Satz 4.18 folgt, dass ein unbeschränktes Netzsystem, das die U-Unabhängigkeit erfüllt, durch die Agglomeration zu einem unbeschränkten Netzsystem reduziert wird. Da jede Pre-Agglomerationsregel die U-Unabhängigkeit des ursprünglichen Netzsystems vorraussetzt (siehe Tabelle 4.1), folgt die Behauptung für die Regeln Φ_{HPP1}, Φ_{HPP2}, Φ_{HPP3}, Φ_{HPP4}, Φ_{HPP5} und Φ_{HPP6}.

2. Folgt unmittelbar mit Proposition 4.14, die besagt, dass alle Pre- und Post-Agglomerationsregeln die Beschränktheit bewahren.
3. Folgt aus der Tatsache, dass das ursprüngliche Netzsystem sicher und somit beschränkt ist.
4. In [PPP00] beweisen Poitrenaud und Pradat-Peyre, dass unter bestimmten Bedingungen für die Agglomeration gemäß Definition 4.3 gilt:

$$\Pi_{T_0 \cup U}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T_0 \cup U}(\Phi(L_{\Sigma_r}(M_0^r))) \text{ bzw.}$$

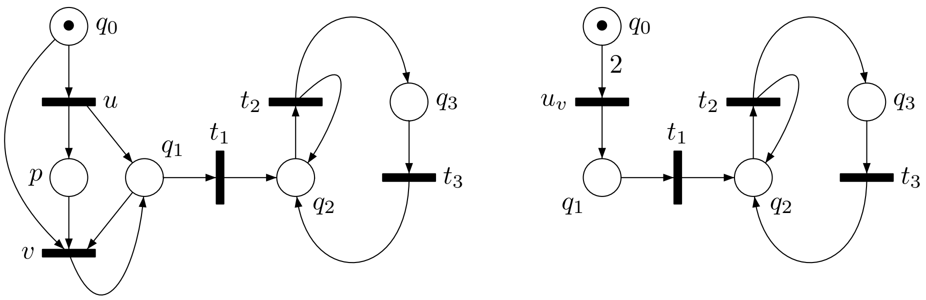
$$\Pi_{T_0 \cup V}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T_0 \cup V}(\Phi(L_{\Sigma_r}(M_0^r))),$$

falls das ursprüngliche Netzsystem sicher ist. Gilt die Sprachenäquivalenz, dann gilt nach Poitrenaud und Pradat-Peyre die Behauptung, dass LTL-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewahrt werden, die keine aus dem Netzsystem entfernten Transitionen bzw. Plätze betrachten. Da die Sprachenäquivalenz von Haddad und Pradat-Peyre in [HPP04] allgemein für P/T-Netzsysteme bewiesen wird, folgt unsere Aussage zusätzlich für nicht sichere Netzsysteme. ■

Aussage 3 hat nur für sichere Netzsysteme Gültigkeit. Es existieren unbeschränkte Netzsysteme, die gewöhnlich sind und durch das Anwenden der entsprechenden Regel zu sicheren Netzsystemen reduziert werden. Wir präsentieren in Abbildung 4.8 Beispiele, die das belegen. Wir betrachten zunächst die Teilabbildungen (a) und (b). In (a) ist ein Netzsystem Σ abgebildet, das UV-austauschbar und V-unabhängig ist. Dieses wird zum Netzsystem Σ_r reduziert. Das entspricht dem Anwenden von Regel Φ_{HPP7}. Im Netzsystem Σ produziert das Schalten der Schaltfolge ut_1 eine Marke auf den Platz q_2. Dadurch kann die Transition t_2 unendlich oft schalten, weshalb der Platz q_3 und somit Σ unbeschränkt ist. Im reduzierten Netzsystem Σ_r hingegen kann die Transition u_v nicht schalten. In Σ_r kann keine Transition schalten, was Σ_r zu einem beschränkten Netzsystem macht.

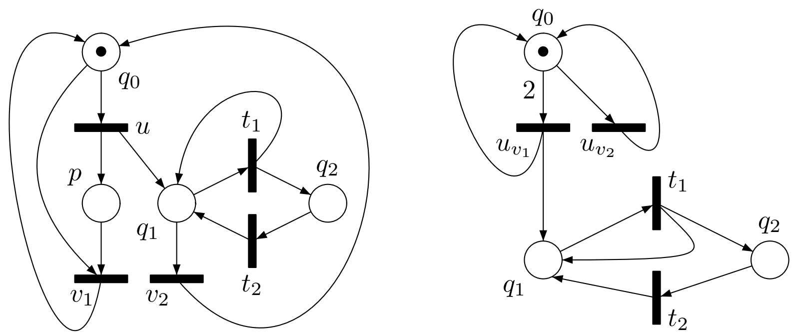
Wir betrachten nun die Teilabbildungen (c) und (d). Das Netzsystem Σ' in (c) ist V-fortsetzbar. Es wird zum Netzsystem Σ'_r (d) reduziert. Dies entspricht dem Anwenden von Regel Φ_{HPP8}. Im Netzsystem Σ' produziert die Schaltfolge u eine Marke auf dem Platz q_1, wodurch die Transition t_1 unendlich oft schalten kann. Hiermit folgt, dass der Platz q_2 und somit Σ' unbeschränkt ist. Im Netzsystem Σ'_r ist die Transition u_{v_1} bei der Anfangsmarkierung tot. Es hat nur die Transition u_{v_2} Konzession, die jedoch neutral ist und somit deren Schalten die aktuelle Markierung nicht verändert. Daraus folgt, dass Σ'_r im Gegensatz zum ursprünglichen Netzsystem Σ' beschränkt ist.

Abschließend betrachten wir die Teilabbildungen (e) und (f). Das Netzsystem Σ'' in (e) erfüllt die Kriterien der V-Unabhängigkeit und der V-Fortsetzbarkeit. Diese Netzsystem wird zu dem Netzsystem Σ''_r in (f) reduziert. Diese



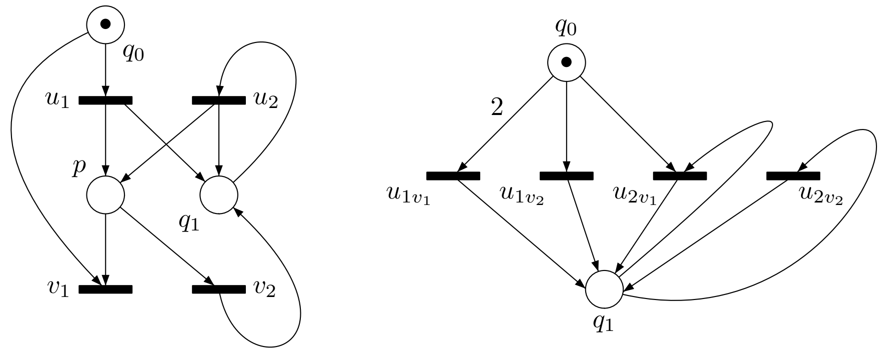
(a) UV-austauschbares, V-unabhängiges Netzsystem Σ

(b) reduziertes Netzsystem Σ_r



(c) V-fortsetzbares Netzsystem Σ'

(d) reduziertes Netzsystem Σ'_r



(e) V-unabhängiges und V-fortsetzbares Netzsystem Σ''

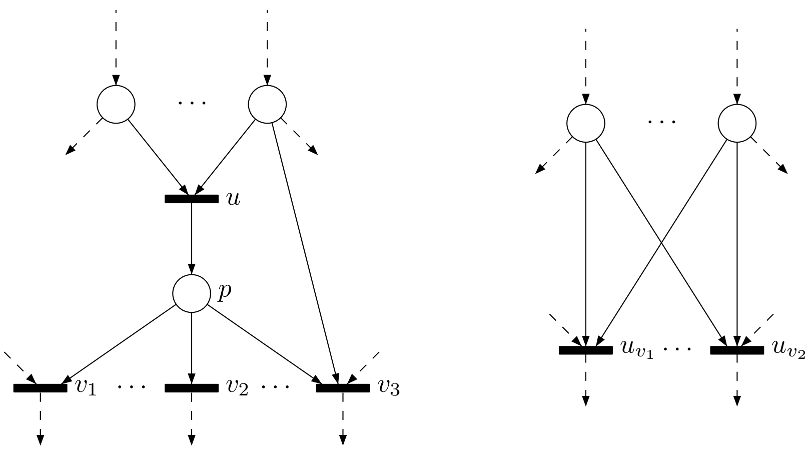
(f) reduziertes Netzsystem Σ''_r

Abbildung 4.8: Netzsysteme, die beweisen, dass die Regel Φ_{HPP7} (siehe (a),(b)), die Regel Φ_{HPP9} (siehe (c),(d)) und die Regel Φ_{HPP8} (siehe (e),(f)) die Unbeschränktheit nicht bewahren.

Reduktion entspricht der Regel Φ_{HPP9}. Das Schalten der Transition u_1 produziert unter Anderem eine Marke auf dem Platz q_1. Hierdurch erhält die Transition u_2 unendlich oft Konzession. Das impliziert die Unbeschränktheit von p und somit des Netzsystems Σ''. Die Transition u_{1v_1} im reduzierten Netzsystem Σ''_r ist tot. Das Schalten der Transitionen u_{1v_2}, u_{2v_1} oder u_{2v_2} produziert eine Marke auf dem Platz q_1. Bei der erreichten Markierung $m(q_0) = 0$ und $m(q_1) = 1$ hat keine Transition in Σ''_r Konzession. Das bedeutet, es wird immer ein Deadlock im Netzsystem Σ''_r erreicht und somit ist Σ''_r beschränkt.

4.1.2 Nach Esparza und Schröter

Esparza und Schröter präsentieren in [ES01] neben anderen Regeln ihre Variante der Pre-Agglomeration. Es wird wiederum eine Anhäufung von Transitionen um einen Platz $p \in P$ eines Netzes $N = (P, T, F)$ fusioniert. Wir bezeichnen mit U wieder den Vorbereich und mit V den Nachbereich von p. Im Gegensatz zu den Pre-Agglomerationsregeln von Haddad und Pradat-Peyre wird generell verlangt, dass die Menge U einelementig ist. Des Weiteren wird unter bestimmten Bedingungen die Transitionsmenge des reduzierten Netzsystems nicht wie bei Haddad und Pradat-Peyre gebildet: $T_r = (T \setminus (U \cup V)) \cup (U \times V)$. Sondern bei Esparzas und Schröters Variante der Pre-Agglomeration gilt: $T_r = (T \setminus (U \cup V)) \cup (U \times V')$ mit $V' \subseteq V$. Die Menge V' ist eine echte Teilmenge von V, falls der Vorbereich von U und V ein gemeinsames Element besitzt ($U \cap V \neq \emptyset$). Wir präsentieren hierfür ein Beispiel in Abbildung 4.9. Es gilt $U = \{u\}$ und $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Die Transition v_3 und der Platz p werden aus dem Netzsystem entfernt. Es wird das Kreuzprodukt $T' = \{u\} \times \{v_1, v_2\}$ gebildet. Jeder Platz des Vorbereichs von U wird mit den Transitionen der Menge T' verbunden. Es folgt die formale Definition für Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration.



(a) Netzsystem mit Transition u und Platz p, die der Pre-Agglomeration genügen

(b) reduziertes Netzsystem

Abbildung 4.9: Pre-Agglomerationsregel nach Esparza und Schröter

Definition 4.21 (*Regel Φ_{ES4}: Pre-Agglomeration*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Ein Platz $p \in P$ und eine Transition $u \in {}^\bullet p \setminus p^\bullet$ genügen der Pre-Agglomeration, falls gilt:

$$\begin{aligned} {}^\bullet p &= \{u\} \\ p^\bullet &\neq \emptyset \\ u^\bullet &= \{p\} \\ M_0(s) &= 0. \end{aligned}$$

Sei $V = p^\bullet$ und $V' = V \setminus \{v' \in p^\bullet \mid {}^\bullet v' \cap {}^\bullet u \neq \emptyset.\}$ und $v \in V'$. Das durch Anwendung von Φ_{ES4} erhaltene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist definiert als: $\forall u \in U\, \forall v \in V$:

$$\begin{aligned} P_r &= P \setminus \{p\} \\ T_r &= (T \setminus (U \cup V')) \cup (U \times V') \\ M_0^r &= M_0|_{P_r} \\ \forall q \in P_r\, \forall t \in T_r \setminus (U \times V') : & \\ F_r(t, q) &= F(t, q) \\ F_r(q, t) &= F(q, t) \\ \forall q \in P_r\, \forall u_v \in (U \times V') : & \\ F_r(u_v, q) &= F(u, q) \\ F_r(q, u_v) &= \max[F(q, u), F(q, v)]. \end{aligned}$$

⌟

Esparza und Schröter beweisen in [ES01], dass das Anwenden von Φ_{ES4} zustandsbasierte LTL-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewahrt, die nur Plätze des reduzierten Netzsystems überwachen, falls das ursprüngliche Netzsystem sicher ist. Genauer gesagt, erfüllt ein sicheres Netzsystem Σ eine zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Formel φ genau dann, wenn das durch Anwenden von Φ_{ES4} erhaltene reduzierte Netzsystem Σ_r die Formel φ erfüllt.

Wir beweisen, dass die Lebendigkeit des ursprünglichen Netzsystems die Lebendigkeit des reduzierten Netzsystems impliziert, falls das ursprüngliche Netzsystem sicher ist. Das beweisen wir, indem wir zeigen, wenn das ursprüngliche Netzsystem sicher und lebendig ist, ist das Anwenden von Φ_{ES4} ein Spezialfall von Φ_{HPP1}. Um zu zeigen, dass Φ_{ES4} ein Spezialfall von Φ_{HPP1} ist, beweisen wir noch zwei Lemmata. Diese besagen, dass Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration der Agglomeration gemäß Definition 4.3 enspricht. Hierfür zeigen wir zunächst im ersten Hilfssatz, dass der Vorbereich von $V = p^\bullet$, wobei p der Regel Φ_{ES4} genügt, kein Element des Vorbereichs von $U = {}^\bullet p$ enthält. Dies müssen wir zeigen, da solche Elemente durch Φ_{ES4} auf eine andere Weise reduziert werden als durch Φ_{HPP1}. Existiert ein solches Element jedoch nicht, zeigen wir mit dem zweiten Hilfssatz, dass das Anwenden von Esparzas Pre-Agglomeration der Agglomeration gemäß Definition 4.3 enspricht. Im Anschluss beweisen wir, dass das ursprüngliche Netzsystem die strukturellen Bedingungen erfüllt, die gemäß Tabelle 4.1 Bedingung für Φ_{HPP1} sind. Zunächst zeigen wir, falls ein Netzsystem sicher und lebendig ist, existiert kein Platz, der Element von ${}^\bullet U$ und ${}^\bullet V$ ist.

Lemma 4.22

Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein Platz $p \in P$, der der Regel Φ_{ES4} genügt. Es gilt:

$$\Sigma \textit{ lebendig} \Longrightarrow {}^\bullet({}^\bullet p) \cap {}^\bullet(p^\bullet) = \emptyset.$$

⌟

Beweis von 4.22: Sei Σ sicher und lebendig. Wir beweisen:

$$\nexists q \in P \,:\, q \in {}^\bullet({}^\bullet p) \wedge q \in {}^\bullet(p^\bullet).$$

Es gilt $U = {}^\bullet p$ und $V = p^\bullet$. Wir beweisen die Aussage indirekt. Wir nehmen an, dass eine Transition $u \in U$ existiert, so dass ${}^\bullet u \cap {}^\bullet V \neq \emptyset$ gilt. Wir zeigen dann, dass das Netzsystem nicht lebendig und sicher sein kann. Wir unterscheiden die folgenden zwei Fälle: Erstens, die Menge ${}^\bullet u$ enthält nur einen Platz. Zweitens, die Menge ${}^\bullet u$ enthält mehr als einen Platz.

(1) $|{}^\bullet u| = 1$: Wir führen die Negation der Aussage zum Widerspruch. Genauer gesagt, zeigen wir, falls ein Platz $q \in {}^\bullet u \cap {}^\bullet V$ existiert, dann kann das Netzsystem nicht sicher und lebendig sein. Wir zeigen, dass aus der Sicherheit des Netzsystems Σ folgt, dass Σ nicht lebendig ist. Das wäre ein Widerspruch zur Vorraussetzung. Sei ${}^\bullet u = \{q\}$. Dies bedeutet, dass q der einzige Platz im Vorbereich der Transition u ist. Da Σ sicher ist, gilt die folgende Ungleichung: $m(p) + m(q) \leq 1$. Wann immer p ein Marke enthält, ist der Platz q unmarkiert und umgekehrt. Da q und p im Vorbereich einer Transition $t' \in {}^\bullet V$ sind, hätte diese Transition t' nie Konzession im Widerspruch zur Lebendigkeit des Netzsystems.

(2) $|{}^\bullet u| > 1$: Wir beweisen die Aussage wiederum indirekt. Wir zeigen, falls eine Transition $v \in V$ und Platz $q' \in P$ existieren, so dass $q' \in {}^\bullet u \cap {}^\bullet v$ gilt, und hieraus folgen würde, dass Σ lebendig und sicher ist, dann existiert ein Widerspruch. Hierfür schauen wir uns zunächst an, wie die Inzidenzmatrix einer Netzstruktur aussieht, für die $\exists q' \in {}^\bullet u \cap {}^\bullet v$ gilt. Dann bilden wir Gleichungen, die die Lebendigkeit und die Sicherheit des Netzsystems abbilden. Wir fassen diese Gleichungen zu einer zusammen. Wir zeigen mit Hilfe der Inzidenzmatrix, dass diese Gleichung jedoch keine Gültigkeit hat, was zum Widerspruch führt. Zunächst schauen wir uns an, wie die Beschaffenheit der Inzidenzmatrix aussieht. Hierfür zeigen wir erst einmal, dass aus der Lebendigkeit und der 1-Beschränktheit von Σ die Gewöhnlichkeit von Σ folgt. Dies schlussfolgern wir aus den folgenden zwei Aussagen. Erstens, da jede Transition irgendwann schalten kann und nie mehr als eine Marke auf jedem Platz des Vorbereichs enthalten ist, gilt $\forall t \in T \forall q'' \in P \,:\, F(q'', t) \leq 1$. Zweitens, da jede Transition irgendwann schalten kann und jeder Platz des Nachbereichs dieser Transition nur eine Marke enthalten darf, muss $\forall t \in T \forall q'' \in P \,:\, F(t, q'') \leq 1$ gelten. D. h. die Inzidenzmatrix von Σ enthält nur die Zahlen -1, 1 und 0. Sei nun $q' \in P$ und $q \in P$ im Vorbereich der Transition u enthalten. Und sei q' zusätzlich im Vorbereich von v enthalten. Die Inzidenzmatrix

hat die folgende Form:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & u & v & \end{array} & \\ \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -1 & 0 & \dots \\ \dots & 1 & -1 & \dots \\ \dots & -1 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ q \\ p \\ q' \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Da Σ lebendig ist, muss jede Transition irgenwann einmal Konzession haben. Daraus folgt:

$$\exists \sigma \in T^* \, \exists m, m' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \, : \, m \xrightarrow{\sigma} m' \xrightarrow{u} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{l}_p \cdot \boldsymbol{\sigma} + m_0(p) && (4.27) \\ 1 &= \vec{l}_q \cdot \boldsymbol{\sigma} + m_0(q) && (4.28) \\ 1 &= \vec{l}_{q'} \cdot \boldsymbol{\sigma} + m_0(q'). && (4.29) \end{aligned}$$

Gleichung (4.28) und Gleichung (4.29) beschreiben, dass die Transition u Konzession hat. Gleichung (4.27) ist notwendig, da p nicht markiert sein darf, wenn u Konzession hat, da andernfalls die 1-Beschränkheit von Σ verletzt würde. Addiert man Gleichung (4.27), Gleichung (4.28) und Gleichung (4.29) erhält man die folgende Gleichung:

$$2 = (\vec{l}_p + \vec{l}_q + \vec{l}_{q'}) \cdot \boldsymbol{\sigma} + m_0(q) + m_0(q'). \qquad (4.30)$$

Damit, wegen der Lebendigkeit von Σ, die Transition v irgendwann einmal Konzession hat, muss weiterhin folgendes gelten:

$$\exists \sigma' \in T^* \, \exists m'', m''' \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0) \, : \, m'' \xrightarrow{\sigma} m''' \xrightarrow{v} \text{ und}$$

$$\begin{aligned} 1 &= \vec{l}_p \cdot \boldsymbol{\sigma'} + m_0(p) && (4.31) \\ 1 &= \vec{l}_q \cdot \boldsymbol{\sigma'} + m_0(q) && (4.32) \\ 0 &= \vec{l}_{q'} \cdot \boldsymbol{\sigma'} + m_0(q'). && (4.33) \end{aligned}$$

Gleichung (4.31) und Gleichung (4.32) sind notwendig, da p und q nach Vorraussetzung im Vorbereich von v enthalten sind. Gleichung (4.33) ist notwendig, da , wegen der 1-Beschränktheit, die Transition u nicht Konzession haben darf, wenn p markiert ist. Die Addition von Gleichung (4.31), Gleichung (4.32) und Gleichung (4.33) ergibt:

$$2 = (\vec{l}_p + \vec{l}_q + \vec{l}_{q'}) \cdot \boldsymbol{\sigma'} + m_0(q) + m_0(q'). \qquad (4.34)$$

Es ist zu bemerken, dass

$$\boldsymbol{\sigma'} \neq \boldsymbol{\sigma} \qquad (4.35)$$

gelten muss, andernfalls wären z. B. Gleichung (4.27) und Gleichung (4.31) nicht zu erfüllen. Werden nun Gleichung (4.30) und Gleichung (4.34) addiert, erhält man die folgende Gleichung.

$$(\vec{l}_p + \vec{l}_q + \vec{l}_{q'}) \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\vec{l}_p + \vec{l}_q + \vec{l}_{q'}) \cdot \boldsymbol{\sigma'}.$$

Dies ist wegen Gleichung (4.35) nur gültig, wenn das folgende Gleichungssystem

$$\vec{l}_p + \vec{l}_q + \vec{l}_{q'} = \mathbf{0}$$

gilt. Eine Gleichung, die erfüllt werden muss, ist:

$$\vec{l}_p(u) + \vec{l}_q(u) + \vec{l}_{q'}(u) = 0.$$

Diese Gleichung, kann nicht erfüllt werden, da für jeden Platz $q \in {}^\bullet u$ gilt, dass $\mathbf{N}(q,t) < 0$ ist. Die Inzidenzmatrix besagt, dass $\vec{l}_p(u) = -1$, $\vec{l}_q(u) = 1$ und $\vec{l}_{q'}(u) = -1$ gilt. Die Gleichung ist nicht lösbar und somit kann das Netzsystem nicht lebendig und sicher sein. Dies ist ein Widerspruch zur Vorraussetzung. ■

Als nächstes zeigen wir, für ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein reduziertes Netzysystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ gilt folgendes: Falls Σ lebendig und sicher ist, werden T_r, P_r und F_r für die Regel Φ_{ES4} auf die selbe Art und Weise definiert wie für die Agglomeration gemäß Definition 4.3.

Lemma 4.23

Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{ES4} erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ sowie ein Platz $p \in P$. Wenn Σ lebendig ist und für jede Transition $u \in U = {}^\bullet p : u^\bullet = \{p\}$ ist, dann gelten für alle $q \in P$, für alle $v \in V = p^\bullet$ sowie für alle $u_v \in (U \times V)$ die folgenden Aussagen:

1. $T_r = (T \setminus (U \cup V)) \cup (U \times V)$,

2. *für die Flussrelation gilt*

$$\begin{aligned} F_r(q, u_v) = \max[F(q,u), F(q,v)] &= \max[F(q,u), F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)] \\ F_r(u_v, q) = F(v,q) &= \mathbf{N}(q,u) + \mathbf{N}(q,v) + F_r(q,u_v), \end{aligned}$$

3. $P_r = P \setminus \{p\} = P \setminus \{q' \in P \mid \forall t \in T_r : F_r(t, q') = F_r(q', t) = 0\}$.

┘

Beweis von 4.23: Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein Platz $p \in P$, der der Regel Φ_{ES4} genügt. Das Netzsystem Σ ist nach Vorraussetzung sicher und lebendig. Sei $U = {}^\bullet p$ und $V = p^\bullet$. Für jede Transition $u \in U : u^\bullet = \{p\}$. Weiterhin sei ein Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ gegeben, das durch Anwenden von Φ_{ES4} auf das Netzsystem Σ gewonnen wurde.

1. Lemma 4.22 besagt ${}^\bullet({}^\bullet p) \cap {}^\bullet(p^\bullet) = \emptyset$. Deshalb gilt $\{v' \in p^\bullet \mid {}^\bullet({}^\bullet p) \cap {}^\bullet(p^\bullet) \neq \emptyset\} = \emptyset$ und somit für $V' = V \setminus \{v' \in p^\bullet \mid {}^\bullet({}^\bullet p) \cap {}^\bullet(p^\bullet) \neq \emptyset\} = V$. Deshalb gilt gemäß Def. 4.21 $T_r = (T \setminus (U \cup V)) \cup (U \times V)$.

2. Zunächst betrachten wir einen beliebigen Platz $q \neq p \in P$. In diesem Fall gilt wegen $\forall u \in U : u^\bullet = \{p\}$:

$$\forall u \in {}^\bullet q : F(u, q) = 0. \tag{4.36}$$

Die Lebendigkeit und die Sicherheit von Σ impliziert, dass das Netzsystem Σ gewöhnlich ist. In diesem Fall müssten wir alle Kombinationen von $F(q,u) \in \{1,0\}$, $F(u,q) \in \{1,0\}$, $F(q,v) \in \{1,0\}$ sowie $F(v,q) \in \{1,0\}$ betrachten. Wegen (4.36) tritt der Fall $F(u,q) = 1$ nicht auf. Für den Fall $F(q,u) = 1$ zeigen wir, dass immer $F(q,v) = 0$ gilt. Wir müssen für $F(q,u) = 1$ demnach nur noch die Fälle $F(v,q) = 1$ und $F(v,q) = 0$ unterscheiden. Für den Fall $F(q,u) = 0$ können wir die Fälle $F(v,q) \in \{1,0\}$

zusammenfassen und benötigen die Fallunterscheidung $F(v,q) = 0$ und $F(v,q) = 1$ nicht. Wir unterscheiden daher die beiden Fälle $F(q,u) = 1$ und $F(q,u) = 0$:

(a) $F(q,u) = 1$: Lemma 4.22 besagt, dass kein Platz im Vorbereich von U und V ist. Deshalb folgt aus $F(q,u) = 1$ ($q \in {}^\bullet u$), dass q nicht im Vorbereich von v enthalten ist und somit $F(q,v) = 0$ gilt. Des Weiteren gilt wegen (4.36):

$$\forall u \in U \,:\, \mathbf{N}(q,u) = F(u,q) - F(q,u) = -1. \tag{4.37}$$

Für alle Transitionen $u \in U$, $v \in V$ und alle $u_v \in (U \times V)$ gelten die folgenden äquivalenten Umformungen:

$$\begin{aligned} F_r(q,u_v) &= \max[F(q,u), F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)] \\ &\overset{(4.37)}{=} F(q,u) \\ &= \max[F(q,u), F(q,v)]. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Mit den gewonnenen Erkenntnissen begründen wir die folgenden Umformungen. Es gilt $\forall u \in U \,\forall v \in V \,\forall u_v \in (U \times V)$:

$$F_r(u_v,q) = \mathbf{N}(q,u) + \mathbf{N}(q,v) + F_r(q,u_v) \tag{4.39}$$
$$\overset{(4.38)}{=} \mathbf{N}(q,u) + \mathbf{N}(q,v) + F(q,u) \tag{4.40}$$
$$\overset{(4.37)}{=} 1 + F(v,q) - F(q,v) + F(q,u). \tag{4.41}$$

Wir betrachten die folgenden zwei Fälle:

(i) $F(v,q) = 1$: Wir zeigen, dass für alle $u \in U$, $v \in V$ sowie alle Transitionen $u_v \in (U \times V)$ gilt:

$$\begin{aligned} F_r(u_v,q) &\overset{(4.41)}{=} 1 + F(v,q) - F(q,v) + F(q,u) \\ &= -1 + 1 - 0 + 1 = 1 \\ &= F(v,q). \end{aligned}$$

(ii) $F(v,q) = 0$: Die folgenden Umformungen gelten für alle $u \in U$, $v \in V$ und für alle $u_v \in (U \times V)$:

$$\begin{aligned} F_r(u_v,q) &\overset{(4.41)}{=} 1 + F(v,q) - F(q,v) + F(q,u) \\ &\overset{(4.37)}{=} -1 + 0 - 0 + 1 = 0 \\ &= F(v,q). \end{aligned}$$

(b) $F(q,u) = 0$: Hieraus folgt mit (4.36):

$$\forall u \in U \,:\, \mathbf{N}(q,u) = F(u,q) - F(q,u) = 0. \tag{4.42}$$

Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} F_r(q,u_v) &= \max[F(q,u), F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)] \\ &\overset{(4.42)}{=} \max[F(q,u), F(q,v)]. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für jede Transition $v \in V$ und für jedes $u \in U$: $F(q,v) \geq 0 = F(q,u)$. Hiermit folgt unmittelbar: $\forall u \in U \,\forall v \in V \,\forall u_v \in (U \times V)$ gilt:

$$F_r(q,u_v) = \max[F(q,u), F(q,v)] = F(q,v). \tag{4.43}$$

Abschließend schlussfolgern wir für jedes $u \in U$, $v \in V$ sowie jede Transition $u_v \in (U \times V)$:

$$\begin{aligned}
F_r(u_v, q) &= \mathbf{N}(q,u) + \mathbf{N}(q,v) + F_r(q, u_v) \\
&\overset{(4.43)}{=} \mathbf{N}(q,u) + \mathbf{N}(q,v) + F(q,v) \\
&\overset{(4.42)}{=} \mathbf{N}(q,v) + F(q,v) \\
&= F(v,q) - F(q,v) + F(q,v) \\
&= F(v,q).
\end{aligned}$$

3. Wir werden zeigen, dass der einzige Platz, der aus dem Netzsystem Σ entfernt wird, der Platz p ist. Wir zeigen hierfür zunächst, dass der Platz p gemäß Def. 4.3 aus dem Netzsystem entfernt wird. Anschließend zeigen wir, dass jeder weitere Platz $q \neq p \in P$ im reduzierten Netzsystem enthalten ist. Wir zeigen zunächst, dass der Platz p aus dem Netzsystem entfernt wird. Da aus der Sicherheit und Lebendigkeit von Σ die Gewöhnlichkeit von Σ folgt $(\forall f \in F : f \leq 1)$ und ${}^\bullet p \cup p^\bullet = \emptyset$ gilt, können wir die folgenden Annahmen treffen:

$$\begin{aligned}
\forall u \in U &: F(p,u) = 0 \wedge F(u,p) = 1 \\
\forall v \in V &: F(p,v) = 1 \wedge F(v,p) = 0.
\end{aligned}$$

Wir zeigen hiermit, dass $\forall u \in U\, \forall v \in V\, \forall u_v \in (U \times V)$ folgendes gilt:

$$\begin{aligned}
F_r(p, u_v) &= \max[F(p,u), F(p,v) - \mathbf{N}(p,u)] \\
&= \max[F(p,u), F(p,v) - F(u,p) + F(p,u)] \\
&= \max[0, 1 - 1 + 0] = 0, \\
F_r(u_v, p) &= \mathbf{N}(p,u) + \mathbf{N}(p,v) + F_r(p, u_v) \\
&= F(u,p) - F(p,u) + F(v,p) - F(p,v) + 0 \\
&= 0 - 1 + 1 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass für einen beliebigen Platz $q \neq p \in P$ ein Element aus F_r und eine Transition $t' \in T_r$ existiert, so dass $F(t', q) \geq 1$ oder $F(q, t') \geq 1$ gilt. Wegen (4.36) gilt für jede Transition $u \in U$: $F(u,q) = 0$. Wir unterscheiden drei Fälle: $\exists u \in U : F(q,u) > 0$, $\exists v \in V : F(q,v) > 0$ sowie $\exists v \in V : F(v,q) > 0$.

(a) $\exists u \in U : F(q,u) > 0$. Wir folgern unmittelbar, dass eine Transition $v \in V$ und ein $u_v \in (U \times V)$ existiert, so dass gilt:

$$F_r(q, u_v) = \max[F(q,u), F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)] \geq 1.$$

(b) $\exists v \in V : F(q,v) > 0$. Da $\forall u \in U : F(u,q) = 0$ und im Allgemeinen $F(q,u) \geq 0$ gilt, folgern wir:

$$\exists u \in U : \mathbf{N}(q,u) = F(q,u) - F(u,q) \leq 0.$$

Mit der letzten Gleichung folgern wir dann unmittelbar, dass eine Transition $u \in U$ und ein $u_v \in (U \times V)$ existiert, so dass die folgende Aussage gilt:

$$\exists v \in V : F(q,v) - \mathbf{N}(q,u) > 0.$$

Mit dieser Gleichung begründen wir, es existieren Transitionen $u \in U$, $v \in V$ und $u_v \in (U \times V)$, so dass:

$$F_r(q, u_v) = \max[F(q,u), F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)] \geq 1.$$

(c) $\exists v \in V \; : \; F(v,q) > 0$. Die Fälle $F(q,v) > 0$ und $F(q,u) > 0$ haben wir bereits betrachtet. Wir können deshalb annehmen, dass $\forall u \in U \, \forall v \in V \; : \; F(q,u) = 0 \wedge F(q,v) = 0$. Wegen (4.36) und der Aussage $\forall u \in U \; : \; F(q,u) = 0$, folgern wir:

$$\forall u \in U \; : \; \mathbf{N}(q,u) = 0. \tag{4.44}$$

Da $\forall v \in V \; : \; F(q,v) = 0$ gilt, ist die folgende Aussage gültig:

$$\forall v \in V \; : \; \mathbf{N}(q,v) = F(v,q) - F(q,v) = F(v,q). \tag{4.45}$$

Mit (4.44) und (4.45) schlussfolgern wir abschließend, dass Transitionen $u \in U$, $v \in V$ und $u_v \in (U \times V)$ existieren, so dass:

$$\begin{aligned}
F_r(u_v,q) &= \mathbf{N}(q,u) + \mathbf{N}(q,v) + F_r(q,u_v) \\
&= \mathbf{N}(q,u) + \mathbf{N}(q,v) + \max[F(q,u), F(q,v) - \mathbf{N}(q,u)] \\
&\overset{(4.44)}{=} 0 + \mathbf{N}(q,v) + \max[F(q,u), F(q,v) - 0] \\
&\overset{(4.45)}{=} 0 + F(v,q) + \max[F(q,u), F(q,v)] \\
&\geq 1.
\end{aligned}$$

■

Abschließend zeigen wir, dass das Anwenden der Regel Φ_{ES4} ein Spezialfall von Φ_{HPP1} ist. Hierfür zeigen wir noch, dass ein Netzsystem, das reduziert wird, die strukturellen Bedingungen für Φ_{HPP1} erfüllt.

Proposition 4.24

Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Es gilt:

$$\Sigma \text{ lebendig} \Longrightarrow \Phi_{ES4} \text{ ist ein Spezialfall von } \Phi_{HPP1}.$$

⌟

Beweis von 4.24: Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (n, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, ein Platz $p \in P$ und eine Transition $u \in T$, die der Regel Φ_{ES4} genügt, sowie ein durch das Anwenden von Φ_{ES4} gewonnenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Sei $U = {}^\bullet p = \{u\}$ und $V = p^\bullet$. Des Weiteren sei das Netzsystem Σ lebendig. Die Regel Φ_{ES4} betrachtet immer nur einen Platz. Die Partitionsmenge für Φ_{HPP1} ist demnach einelementig. Wir lassen die Indizies weg. Wir zeigen zunächst, dass Φ_{ES4} der Agglomeration gemäß Definition 4.3 entspricht. Hierfür beweisen wir, dass $U \cap V = \emptyset$ gilt und dass T_r, P_r sowie F_r der Definition 4.3 entsprechen. Gemäß Definition 4.21 gilt:

$$u \in p^\bullet \setminus {}^\bullet p.$$

Hieraus folgt, dass $u \notin V$ und somit $U \cap V = \emptyset$ gilt. Mit Lemma 4.22 und Lemma 4.23 folgt, dass die Definitionen von T_r, P_r und F_r gemäß Φ_{ES4} Spezialfälle der entsprechenden Definitionen der Agglomeration gemäß Def. 4.3 sind, falls das ursprüngliche Netzsystem sicher und lebendig ist. Es bleibt noch zu zeigen:

- Σ ist sp-agglomerierbar: Gemäß Definition 4.21 gilt für den Platz p: $M_0(p) = 0$. Da Weiterhin $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$ gilt, ist Bedingung (i) gemäß Def. 4.2 erfüllt. Die Lebendigkeit und Sicherheit von Σ implizieren, dass $\forall f \in F \; : \; f \leq 1$. Hiermit ist Bedingung (ii) aus der Definition zur sp-Agglomierbarkeit erfüllt.

- Σ ist U-unabhängig: Nach Definition 4.4 ist zu zeigen, dass $\forall u \in U \, \forall M \in \mathcal{R}(M_0) \, \forall \sigma$, so dass $\forall \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma)$ mit $\Gamma(\sigma') \geq 0 : M \xrightarrow{u\sigma}\Rightarrow M \xrightarrow{\sigma u}$. Es gilt $(U^\bullet \setminus \{p\})^\bullet = \emptyset$, da $\forall u \in U \, \forall q \neq p \in P : F(u,q) = 0$. Haddad und Pradat-Peyre beweisen in [HPP04, S. 44], dass falls ein Netzsystem Σ sp-agglomerierbar ist und zusätzlich $(U^\bullet \setminus \{p\})^\bullet = \emptyset$ gilt, erfüllt Σ die Kriterien der U-Unabhängigkeit.
- Σ ist UV-austauschbar: Da $U = \{u\}$ eine einelementige Menge ist, wird die Bedingung (1) gemäß Definition 4.7 erfüllt. ■

Wir zeigen weiterhin, dass die Projektion aller vom ursprünglichen Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ akzeptierten Schaltfolgen auf die Menge $T \setminus U$ durch das Anwenden der Regel Φ_{ES4} erhalten wird, falls das ursprüngliche Netzsystem lebendig und sicher ist.

Proposition 4.25

Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{ES4} gewonnenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ sowie ein Platz $p \in P$, der der Regel Φ_{ES4} genügt. Es gilt:

$$\Sigma \text{ lebendig} \Longrightarrow \Pi_{T\setminus{}^\bullet p}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T\setminus{}^\bullet p}(\phi(L_{\Sigma_r}(M_0^r))).$$

⌟

Beweis von 4.25: Gegeben sei sicheres Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{ES4} erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Sei Σ lebendig. Wir zeigen zunächst, dass $L_\Sigma(M_0) = L^\omega_\Sigma(M_0) \cup \{\sigma \in T^* \mid \exists \sigma' \in L^\omega_\Sigma(M_0) \text{ und } \sigma \in \mathit{Pref}(\sigma')\}$. Damit genügt es zu beweisen, dass $\Pi_{T\setminus{}^\bullet p}(L^\omega_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T\setminus{}^\bullet p}(\phi(L^\omega_{\Sigma_r}(M_0^r)))$ gilt. Wir zeigen hierfür, dass unter den gegebenen Vorraussetzungen das Anwenden von Φ_{ES4} ein Spezialfall von Φ_{HPP5} ist. Daraus folgt, dass die Menge der unendlichen vom ursprünglichen Netzsystem akzeptierten Schaltfolgen erhalten wird.

Da das ursprüngliche Netzsystem lebendig ist, muss $L^{\max}_\Sigma = \emptyset$ gelten. Die Menge der akzeptierten Schaltfolgen von Σ enthält demnach nur ω-Schaltfolgen und alle endlichen Präfixe der akzpetierten ω-Schaltfolgen.

Im Folgenden zeigen wir, dass Φ_{ES4} ein Spezialfall von Φ_{HPP5}. Wir müssen hierfür zeigen, dass Σ sp-agglomerierbar, U-unabhängig und divergenz-frei ist. Mit Proposition 4.24 folgt, dass Φ_{ES4} sp-agglomerierbar und U-unahängig ist. Wir zeigen, dass das ursprüngliche Netzsystem Σ divergenz-frei ist. Gemäß Punkt (3) in Definition 4.4 ist Σ genau dann divergenz-frei, wenn die Transitionen aus der Menge $T \setminus {}^\bullet p$ in jeder von Σ akzeptierten Schaltfolge unendlich oft vorkommen. Da jede von Σ akzeptierte Schaltfolge Teil einer ω-Schaltfolge ist, folgt die Behauptung unmittelbar für eine beliebige Schaltfolge σ, falls keine Transition oder endlich viele Transitionen aus ${}^\bullet p$ in σ enthalten sind. Falls Transitionen aus ${}^\bullet p$ unendlich oft in σ vorkommen, dann müssen auch unendlich viele Transitionen aus der Menge $p^\bullet$ in σ enthalten sein. Andernfalls, da Σ sicher ist, wäre die Anzahl der Marken auf dem Platz p irgenwann einmal größer als eins. Dies wäre ein Widerspruch zur Sicherheit von Σ. ■

Zum Abschluss diese Kapitels fassen wir unsere Ergebnisse in dem folgenden Korollar zusammen.

Korollar 4.26

Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{ES4} gewonnenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$

mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ sowie ein Platz $p \in P$, der der Regel Φ_{ES4} genügt. Des Weiteren sei eine aktionsbasierte (zustandsbasierte) LTL^r-$\mathcal{X}$-Formel φ (ψ) gegeben. Es gelten die folgenden Aussagen:

1. *Wenn Σ lebendig ist folgt*
   (a) *Σ_r lebendig,*
   (b) *$\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \models \varphi$ und*
   (c) *$\Pi_{T\setminus {}^\bullet p}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T\setminus {}^\bullet p}(\phi(L_{\Sigma_r}(M_0^r)))$.*
2. *Wenn Σ gewöhnlich ist, folgt:*
$$\Sigma \models \psi \iff \Sigma \models \psi,$$
3. *Σ sicher $\iff$ Σ_r sicher.*

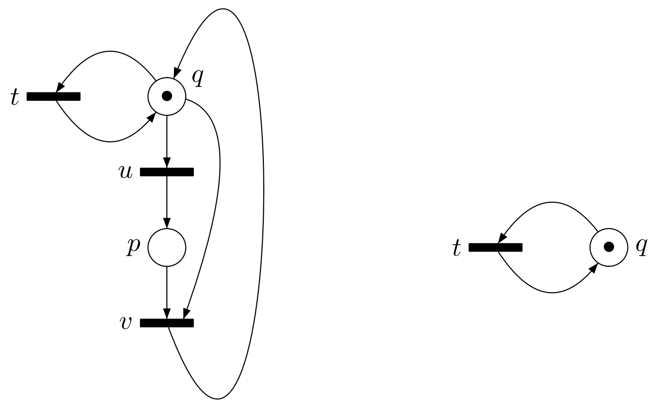
⌟

Beweis von 4.26 :

1. (a) Mit Proposition 4.24 folgt, dass Φ_{ES4} unter den gegebenen Vorraussetzungen die selben Eigenschaften bewahrt wie Φ_{HPP1}. Dann folgt die Behauptung mit Zeile 1 in Tabelle 4.1.
   (b) Mit Proposition 4.24 folgt, dass Φ_{ES4} unter den gegebenen Vorraussetzungen die selben Eigenschaften bewahrt wie Φ_{HPP1}. Dann folgt die Behauptung mit Behauptung 1 aus Korollar 4.20.
   (c) Die Behauptung ist das Ergebnis von Proposition 4.25.
2. Die Behauptung wird von Schröter in [Sch06, S. 160 ff.] bewiesen.
3. Wir unterscheiden die Hin- und Rückrichtung der Behauptung:
   ($\Rightarrow$) Da das Anwenden von Φ_{ES4} LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewahrt und die Beschränktheit eines Netzsystems durch eine LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaft repräsentiert werden kann, folgt diese Richtung der Behauptung.
   ($\Leftarrow$) Diese Richtung folgt, da das ursprüngliche Netzsystem Σ nach Vorraussetzung sicher ist. ■

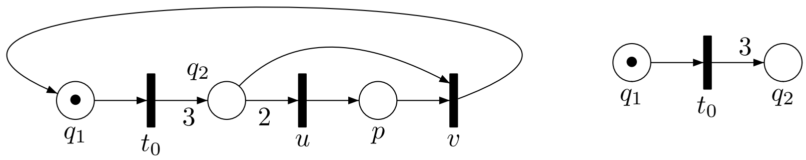
Die Umkehrung von Punkt 1.a gilt im Allgemeinen nicht. Aus der Lebendigkeit des reduzierten Netzsystem folgt im Allgemeinen nicht die Lebendigkeit des ursprünglichen Netzsystems. Zusätzlich werden von der Regel Φ_{ES4} im Allgemeinen keine Deadlocks bewahrt. Wir präsentieren hierfür ein Beispiel in Abbildung 4.10. In Teilabbildung (a) ist das ursprüngliche Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ dargestellt. Es gilt: $U = \{u\}$ und $V = \{v\}$. Die Transition $v \in T$ hat nie Konzession und ist somit tot, da Σ sicher ist. Das Schalten der Transition $u \in T$ konsumiert die Marke vom Platz $q \in P$ und produziert ein Marke auf dem Platz $p \in P$. Das ist ein Deadlock, da keine Transition in Σ Konzession hat. Das entsprechend reduzierte Netzsystem Σ_r ist in (b) dargestellt. Man sieht leicht, dass das reduzierte Netzsystem lebendig ist.

Punkt 1.a gilt nur für sichere und nicht für n-beschränkte Netzsystem, wobei $n \geq 3$ gilt, bzw. nicht für unbeschränkte Netzsysteme. Wir präsentieren ein



(a) ursprüngliches Netzsystem Σ (b) reduziertes Netzsystem Σ_r

Abbildung 4.10: Beispiel für ein gewöhnliches Netzsystem, das sicher und nicht lebendig ist. Durch Anwenden von Φ_{ES4} wird es zu einem lebendigem Netzsystem reduziert.



(a) ursprüngliches Netzsystem Σ (b) reduziertes Netzsystem Σ_r

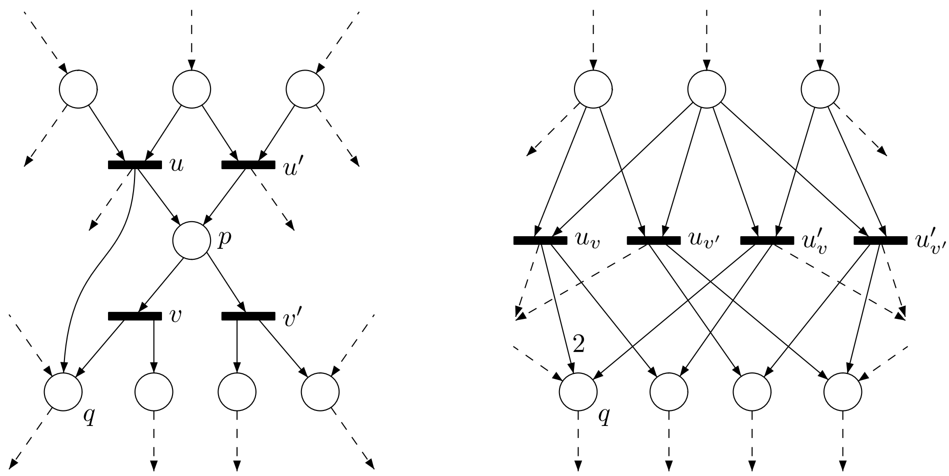
Abbildung 4.11: Beispiel für ein Netzsystem, das lebendig und 3-beschränkt ist. Durch Anwenden von Φ_{ES3} oder Φ_{ES4} wird es zu einem nicht lebendigem Netzsystem reduziert.

Beispiel in Abbildung 4.11. Teilabbildung (a) stellt das ursprüngliche Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ dar. Das Netzsystem ist lebendig. Das reduzierte Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ hingegen ist nicht lebendig. Die Schaltfolge $t_0 \in L_{\Sigma_r}(M_0^r)$ führt zu einem Deadlock. Wir können das Netzsystem so modifizieren, dass Σ unbeschränkt und Σ_r beschränkt ist. Hierfür muss dem Netzsystem Σ ein Platz q_3 hinzugefügt werden. Falls dieser Platz im Nachbereich der Transition $t_0 \in T$ ist und $q_3{}^\bullet = \emptyset$ gilt, wird der Platz q_3 durch die ω-Schaltfolge $t_0 u v_1 t_0 u v_1 \ldots$ unbeschränkt. Der Deadlock in Σ_r würde jedoch weiterhin existieren, woraus folgt, dass Σ_r beschränkt ist.

4.1.3 Nach Berthelot

Esparza und Schröter stellen in [ES01] neben ihrer Variante der Pre-Agglomeration die Post-Agglomeration vor, wie sie von Berthelot in [Ber86] eingeführt wurde.

Für ein gegebenes Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ wird der Vorbereich $U = {}^\bullet p$ eines Platzes $p \in P$ mit dessen Nachbereich $V = p^\bullet$ vereinigt, falls p bestimmte Bedingungen erfüllt. Im Unterschied zu Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration wird für die Post-Agglomeration nicht verlangt, dass $|U| = 1$ und $U^\bullet \setminus \{p\} = \emptyset$ gilt. Für die Post-Agglomeration muss jedoch ${}^\bullet V \setminus \{p\} = \emptyset$ gelten. Im Gegensatz zur Post-Agglomeration von Haddad und Pradat-Peyre (Φ_{HPP11}) ist der Anwendungsbereich von dieser Post-Agglomeration demnach kleiner, da Φ_{HPP11} im Allgemeinen nicht verlangt, dass der Vorbereich von V nur den Platz p enthalten darf. In [ES01] geben Esparza und Schröter eine Darstellung für die Post-Agglomeration an. Eine leicht abgewandelte Darstellung präsentieren wir in Abbildung 4.12. Die Netzstruktur in Teilabbildung (a) ist Teil eines Netzsystems Σ. Es gilt $U = \{u, u'\}$ und $V = \{v, v'\}$. Als Ergebnis der Post-Agglomeration wird das Kreuzprodukt $U \times V$ gebildet. Da der Platz $q \in P$ in der Menge $u^\bullet \cap v^\bullet$ enthalten ist, gilt für $F(u_v, q) = F(u, q) + F(v, q) = 2$. Die Post-Agglomeration wird im Folgenden mathematisch definiert.



(a) Netzsystem mit Platz p, der Esparzas Post-Agglomeration genügt

(b) reduziertes Netzsystem

Abbildung 4.12: Netzsystemreduktion mittels Post-Agglomeration

Definition 4.27 (*Regel Φ_{ES5}: Post-Agglomeration*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Ein Platz $p \in P$ mit $p \notin (p^\bullet)^\bullet$ genügt der Post-Agglomeration, falls gilt:

$$\begin{aligned} {}^\bullet p &\neq \emptyset \\ p^\bullet &\neq \emptyset \\ {}^\bullet(p^\bullet) &= \{p\} \\ M_0(p) &= 0 \\ \forall u \in U\, \forall v \in V \quad &: \quad F(u, q) = 1 \wedge F(q, v) = 1. \end{aligned}$$

Sei $U = {}^\bullet p$ und $U = {}^\bullet p$. Das durch Anwenden von Φ_{ES5} erhaltene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist definiert als: $\forall u \in U \, \forall v \in V$

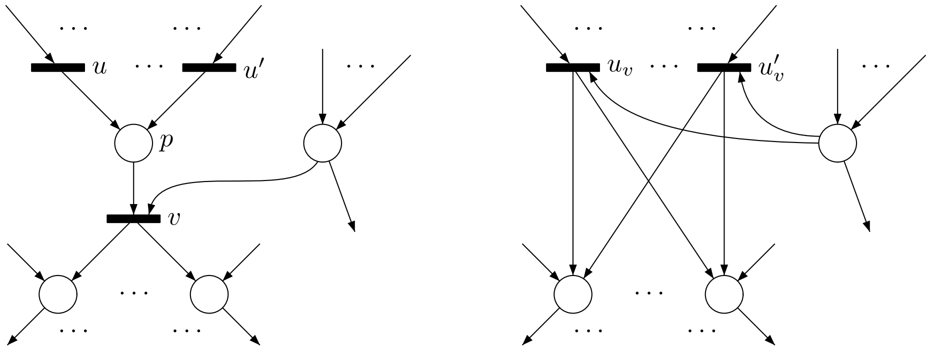
$$
\begin{array}{rcl}
P_r & = & P \setminus \{p\} \\
T_r & = & (T \setminus (U \cup V)) \cup (U \times V) \\
M_0^r & = & M_0|_{P_r} \\
\multicolumn{3}{l}{\forall q \in P_r \, \forall t \in T_r \setminus (U \times V):} \\
F_r(t,q) & = & F(t,q) \\
F_r(q,t) & = & F(q,t) \\
\multicolumn{3}{l}{\forall q \in P_r \setminus V^\bullet \, \forall u_v \in (U \times V):} \\
F_r(u_v,q) & = & F(u,q) \\
F_r(q,u_v) & = & F(q,u). \\
\multicolumn{3}{l}{\forall q \in P_r \cup V^\bullet \, \forall u_v \in (U \times V):} \\
F_r(u_v,q) & = & F(u,q) + F(v,q) \\
F_r(q,u_v) & = & F(q,u).
\end{array}
$$

$\lrcorner$

Berthelot zeigt in [Ber86], dass Φ_{ES5} die Lebendigkeit und Beschränktheit eines Netzsystems bewahrt. Dies bedeutet, ein ursprüngliches Netzsystem ist genau dann lebendig bzw. beschränkt, wenn ein gemäß Φ_{ES5} reduziertes Netzsystem lebendig bzw. beschränkt ist. Haddad und Pradat-Peyre beweisen in [HPP04, S. 21], dass Φ_{ES5} ein Spezialfall von Φ_{HPP11} ist. Hiermit folgt wegen Korollar 4.20, dass die Regel Φ_{ES5} zusätzlich aktionsbasierte und zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften sowie die Projektion der akzeptierten Schaltfolgen auf die Menge $T \setminus (U \cup V)$ bewahrt und zwar in beide Transformationsrichtungen: für die Abstraktion ($\Sigma \to \Sigma_r$) sowie für die Verfeinerung ($\Sigma_r \to \Sigma$).

4.2 Abstraktion

Im Folgenden betrachten wir die von Esparza und Schröter in [ES01] vorgestellte Abstraktionsregel. Diese Regel kann angewendet werden, wenn ein Platz $p \in P$ in einem gegebenen Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ existiert, so dass $U = {}^\bullet p$ und $V = p^\bullet$ gilt. Zusätzlich muss die Menge V einelementig, die Mengen U und V disjunkt sein und der Nachbereich von der Menge U darf nur den Platz p enthalten. Analog zu Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration wird das Kreuzprodukt $U' \times V$ mit $U' = U \setminus \{u' \in U \mid {}^\bullet u' \cap {}^\bullet V \neq \emptyset\}$ gebildet. Der Unterschied zu Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration besteht darin, dass bei der Abstraktionsregel die Menge U unter der Vorraussetzung, dass der Vorbereich von U und der Vorbereich von V ein gemeinsames Element enthalten, reduziert wird. Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration hingegen reduziert die Menge V vor der Fusion der beiden Mengen. Weiterere Unterschiede sind: Die Menge U darf im Gegensatz zu Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration mehr als eine Transition enthalten. Die Menge V hingegen darf nur eine Transition enthalten. Eine Darstellung der Abstraktionsregel ist in [ES01] gegeben. Diese Darstellung ist in Abbildung 4.13 zu sehen. Die Abstraktionsregel ist wie folgt formal definiert:



(a) Netzsystem mit einer Transition u und einem Platz p, die der Abstraktionsregel genügen

(b) reduziertes Netzsystem

Abbildung 4.13: Abstraktion einer Netzsystemstruktur

Definition 4.28 (*Regel Φ_{ES3}: Abstraktion*)

Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Ein Platz $p \in P$ und eine Transition $v \in p^\bullet \setminus {}^\bullet p$ genügen der Abstraktion, falls gilt:

$$\begin{aligned} p^\bullet &= \{v\} \\ {}^\bullet p &\neq \emptyset \\ ({}^\bullet p)^\bullet &= \{p\} \\ v^\bullet &\neq \emptyset \\ M_0(p) &= 0. \end{aligned}$$

Sei $V = p^\bullet$ und $U = {}^\bullet p$. Des Weiteren sei $U' = U \setminus \{u' \in {}^\bullet p \mid {}^\bullet u' \cap {}^\bullet v \neq \emptyset.\}$ und $u' \in U'$. Das durch Anwendung von Φ_{ES3} erhaltene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist definiert als: $\forall u' \in U' \, \forall v \in V$:

$$\begin{aligned} P_r &= P \setminus \{p\} \\ T_r &= (T \setminus (U \cup V) \cup (U' \times V) \\ M_0^r &= M_0|_{P_r} \\ \forall q \in P_r \, \forall t \in T_r \setminus (U' \times V) : & \\ F_r(t, q) &= F(t, q) \\ F_r(q, t) &= F(q, t) \\ \forall q \in P_r \, \forall u_v \in (U' \times V) : & \\ F_r(u_v, q) &= F(v, q) \\ F_r(q, u_v) &= \max[F(q, v), F(q, u')]. \end{aligned}$$

⌟

Esparza und Schröter beweisen in [ES01], das das Anwenden der Regel Φ_{ES4} zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewahrt, falls das ursprüngliche Netzsystem gewöhnlich und sicher ist. Das ursprüngliche Netzsystem erfüllt genau dann eine LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaft, wenn das reduzierte Netzsystem diese LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaft erfüllt.

Wir beweisen im Folgenden, dass das Anwenden der Regel Φ_{ES4} die Lebendigkeit für ein sicheres Netzsystems bewahrt. Wir zeigen, die Lebendigkeit des ursprünglichen Netzsystems impliziert die Lebendigkeit des reduzierten Netzsystems, falls das ursprüngliche Netzsystem sicher ist. Das beweisen wir, indem wir zeigen, wenn das urspüngliche Netzsystem sicher und lebendig ist, dann ist das Anwenden von Φ_{ES4} ein Spezialfall von Φ_{HPP1}. Wir zeigen mit Lemma 4.22 und Lemma 4.23, dass das Anwenden Φ_{ES4} ein Spezialfall der Agglomeration gemäß Definition 4.3 ist. Zusätzlich zeigen wir, dass ein sicheres, lebendiges Netzsystem die strukturellen Bedingungen der Regel Φ_{HPP1} gemäß Tabelle 4.2 erfüllt.

Proposition 4.29

Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Es gilt:

$$\Sigma \textit{ lebendig} \Longrightarrow \Phi_{ES3} \textit{ ist ein Spezialfall von } \Phi_{HPP1}.$$

⌟

Beweis von 4.29: Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (n, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, ein Platz $p \in P$ und eine Transition $u \in T$, die der Regel Φ_{ES3} genügt, sowie ein durch das Anwenden von Φ_{ES3} gewonnenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Sei $U = {}^\bullet p$ und $V = p^\bullet = \{v\}$. Des Weiteren sei das Netzsystem Σ lebendig. Die Regel Φ_{ES3} betrachtet immer nur einen Platz. Die Partitionsmenge für Φ_{HPP1} ist demnach einelementig. Wir lassen die Indizies weg. Wir zeigen zunächst, dass Φ_{ES3} der Agglomeration gemäß Definition 4.3 entspricht. Hierfür beweisen wir, dass $U \cap V = \emptyset$ gilt, und dass T_r, P_r sowie F_r der Definition 4.3 entsprechen. Gemäß Definition 4.28 gilt:

$$u \in p^\bullet \setminus {}^\bullet p.$$

Hieraus folgt, dass $u \notin V$ und somit $U \cap V = \emptyset$ gilt. Mit Lemma 4.22 und Lemma 4.23 folgt, dass die Definitionen von T_r, P_r und F_r gemäß Φ_{ES3} Spezialfälle der entsprechenden Definitionen der Agglomeration gemäß Def. 4.3 sind, falls das ursprüngliche Netzsystem sicher und lebendig ist. Es bleibt noch zu zeigen:

- Σ ist sp-agglomerierbar: Gemäß Def. 4.28 gilt für den Platz p: $M_0(p) = 0$. Da Weiterhin $U \neq \emptyset$ und $V \neq \emptyset$ gilt, ist Bedingung (i) gemäß Def. 4.2 erfüllt. Die Lebendigkeit und Sicherheit von Σ implizieren, dass $\forall f \in F : f \leq 1$. Hiermit ist Bedingung (ii) aus der Definition zur sp-Agglomierbarkeit erfüllt.
- Σ ist U-unabhängig: Nach Definition 4.4 ist zu zeigen: $\forall u \in U \forall M \in \mathcal{R}(M_0) \forall \sigma$ so dass $\forall \sigma' \in \mathit{Pref}(\sigma)$ mit $\Gamma(\sigma') \geq 0 : M \xrightarrow{u\sigma}\Rightarrow M \xrightarrow{\sigma u}$. Das beweist Schröter in Proposition 5.2.9 in [Sch06, S. 151].
- Σ ist UV-austauschbar: Da $V = \{v\}$ eine einelementige Menge ist, wird die Bedingung (2) gemäß Definition 4.7 erfüllt. ■

Wir bemerken folgendes: Netzsysteme, die Esparzas und Schröters Abstraktionsregel genügen, erfüllen im Allgemeinen die U-Unabhängigkeit und die UV-Austauschbarkeit nach Haddad und Pradat-Peyre. Unter der Vorraussetzung, dass das ursprüngliche Netzsystem sicher und lebendig ist, hat die Abstraktionsregel den Charakter einer Pre-Agglomeration gemäß Haddad und Pradat-Peyre.

Analog zum Beweis von Proposition 4.25 für Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration kann bewiesen werden, dass für ein lebendiges, sicheres Netzsystem Σ, für einen Platz $p \in P$, der der Regel Φ_{ES3} genügt, und für ein gemäß Φ_{ES3} reduziertes Netzsystem Σ_r die folgende Gleichung gilt:

$$\Pi_{T \setminus {}^{\bullet}p}(L_{\Sigma}(M_0)) = \Pi_{T \setminus {}^{\bullet}p}(\phi(L_{\Sigma_r}(M_0^r))). \tag{4.46}$$

Zum Abschluss dieses Kapitels fassen wir unsere Ergebnisse im folgenden Korollar zusammen:

Korollar 4.30

Gegeben sei ein sicheres Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{ES3} gewonnenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ sowie ein Platz $p \in P$, der der Regel Φ_{ES3} genügt. Des Weiteren sei eine aktionsbasierte (zustandsbasierte) LTL^r-$\mathcal{X}$-Formel φ (ψ) gegeben. Es gelten die folgenden Aussagen:

1. *Wenn Σ lebendig ist folgt*
   (a) *Σ_r lebendig,*
   (b) *$\Sigma \models \varphi \iff \Sigma \models \varphi$ und*
   (c) *$\Pi_{T \setminus {}^{\bullet}p}(L_{\Sigma}(M_0)) = \Pi_{T \setminus {}^{\bullet}p}(\phi(L_{\Sigma_r}(M_0^r)))$.*
2. *Wenn Σ gewöhnlich ist, folgt:*

$$\Sigma \models \psi \iff \Sigma \models \psi,$$

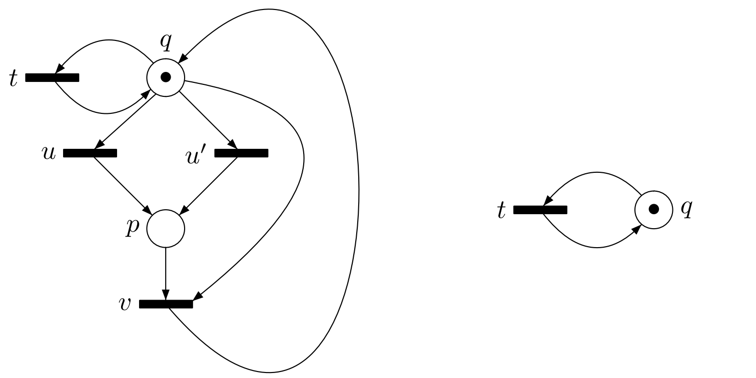
3. *Σ_r sicher $\iff$ Σ sicher.*

$\lrcorner$

Beweis von 4.30 :

1. (a) Mit Proposition 4.29 folgt, dass Φ_{ES3} unter den gegebenen Vorraussetzungen die selben Eigenschaften bewahrt wie Φ_{HPP1}. Dann folgt die Behauptung mit Zeile 1 in Tabelle 4.1.
   (b) Mit Proposition 4.29 folgt, dass Φ_{ES3} unter den gegebenen Vorraussetzungen dieselben Eigenschaften bewahrt wie Φ_{HPP1}. Dann folgt die Behauptung mit Behauptung 1 aus Korollar 4.20.
   (c) Die Behauptung ist das Ergebnis von Proposition 4.25.
2. Die Behauptung wird von Schröter in [Sch06, S. 160 ff.] bewiesen.
3. Wir unterscheiden die Hin- und Rückrichtung der Behauptung:
   ($\Rightarrow$) Da das Anwenden von Φ_{ES3} LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewahrt und die Beschränktheit eines Netzsystems durch eine LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaft repräsentiert werden kann, folgt diese Richtung der Behauptung.
   ($\Leftarrow$) Diese Richtung folgt, da das ursprüngliche Netzsystem Σ nach Vorraussetzung sicher ist. $\blacksquare$

Die Umkehrung von Punkt 1.a gilt im Allgemeinen nicht. Beispielsweise bewahrt die Abstraktionsregel im Allgemeinen keine Deadlocks. Wir präsentieren hierfür



(a) ursprüngliches Netzsystem Σ (b) reduziertes Netzsystem Σ_r

Abbildung 4.14: Beispiel für ein sicheres, gewöhnliches Netzsystem, das nicht lebendig ist. Durch Anwenden von Φ_{ES3} wird es zu einem lebendigem Netzsystem reduziert.

ein Beispiel in Abbildung 4.14. In Teilabbildung (a) ist das ursprüngliche Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ dargestellt. Es gilt: $U = \{u, u'\}$ und $V = \{v\}$. Die Transition $v \in T$ hat nie Konzession und ist somit tot, da Σ sicher ist. Das Schalten der Transition $u \in T$ konsumiert die Marke vom Platz $q \in P$ und produziert eine Marke auf dem Platz $p \in P$. Das ist ein Deadlock, da keine Transition in Σ Konzession hat. Das entsprechend reduzierte Netzsystem Σ_r ist in (b) dargestellt. Man sieht leicht, dass das reduzierte Netzsystem lebendig ist. Punkt 3 gilt im Allgemeinen nur für sichere und nicht für n-beschränkte Netzsysteme, wobei $n \geq 3$ gilt, bzw. nicht für unbeschränkte Netzsysteme. Wir zeigen ein Beispiel in Abbildung 4.11. Das Beispiel wird in Kap. 4.1.2 auf S. 63 erläutert.

4.3 Vereinigung serieller Transitionen

Shatz et al. betrachten in [STMD96] die Vereinigung serieller Transitionen. Diese Regel wurde ursprünglich von Murata in [Mur89] vorgestellt. Diese Reduktionstechnik kann für ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ angewandt werden, wenn zwei Transitionen $u, v \in T$ und ein Platz $p \in P$ existieren, so dass der Platz p das einzige Element des Vorbereichs der Transition v und ein Element des Nachbereichs der Transition u ist. Die Transitionen u und v werden verschmolzen und der Platz p entfernt. Wir präsentieren eine Darstellung dieser Reduktionstechnik in Abbildung 4.15. Die formale Definition der Vereingung serieller Transitionen lautet wie folgt:

Definition 4.31 (*Regel Φ_{S1}*)

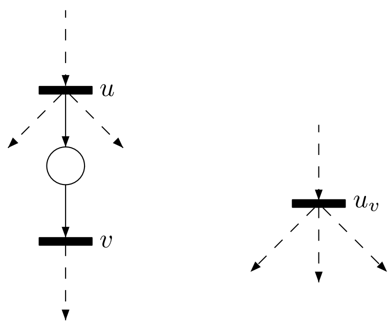
Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, ein Platz $p \in P$ und zwei Transitionen $u, v \in T$, wobei $u \neq v$ gilt. Der Platz p genügt der Regel Φ_{S1}, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- ${}^{\bullet}p = \{u\}$, $p^{\bullet} = \{v\}$,
- ${}^{\bullet}v = \{p\}$, $u^{\bullet} \neq \emptyset$,
- $u^{\bullet} \cap v^{\bullet} = \emptyset$.

Das durch Anwenden von Φ_{S1} gewonnene reduzierte Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
P_r &= P \setminus \{p\} \\
T_r &= (T \setminus \{u, v\}) \cup \{u_v\} \\
M_0^r &= M_0|_{P_r} \\
\forall q \in P_r \setminus ({}^{\bullet}u \cup u^{\bullet} \cup v^{\bullet})\, \forall t \in T_r \setminus \{u_v\} : & \\
F_r(t, q) &= F(t, q) \\
F_r(q, t) &= F(q, t) \\
\forall q \in P_r \cup ({}^{\bullet}u \cup u^{\bullet} \cup v^{\bullet}) : & \\
F_r(u_v, q) &= \max[F(v, q), F(u, q)] \\
F_r(q, u_v) &= F(q, u)
\end{aligned}$$

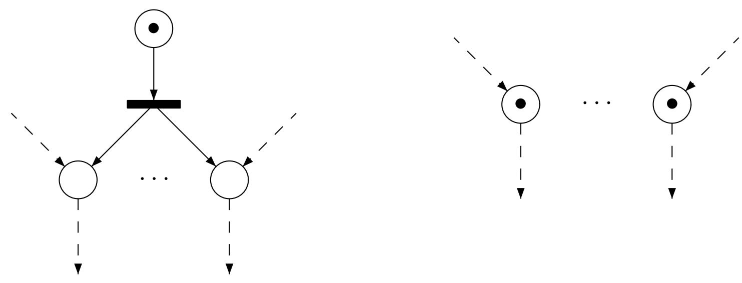
⌟



(a) Netzsystemstruktur, die der Regel Φ_{S1} genügt (b) reduziertes Netz

Abbildung 4.15: Vereinigung von seriellen Transitionen

Murata beweist in [Mur89], ein Netzsystem ist genau dann beschränkt bzw. lebendig, wenn das mittels Φ_{S1} reduzierte Netzsystem beschränkt bzw. lebendig ist. Wir können leicht nachweisen, dass die Vereinigung serieller Transitionen ein Spezialfall der Post-Agglomeration gemäß Berthelot ist. Wenn $U = \{u\}$ eine einelementige Menge und $V = \{v\}$ ebenfalls eine einelementige Menge ist, dann ist für die Regel Φ_{ES5} unmittelbar erkennbar, dass sie äquivalent zu der Regel Φ_{S1} ist. Wir schlussfolgern hiermit unmittelbar das folgende Korollar.



(a) Netzsystemstruktur, die der Regel Φ_{S4} genügt

(b) reduziertes Netz

Abbildung 4.16: Darstellung der Regel Φ_{S4}

Korollar 4.32

Die Regel Φ_{S1} ist ein Spezialfall der Regel Φ_{ES5}.

┘

Wir wissen, die Regel Φ_{ES5} ist eine Spezialisierung der Regel Φ_{HPP11}. Das ist die Post-Agglomeration nach Haddad und Pradat-Peyre, die die Menge der akzeptierten Schaltfolgen sowie LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewahrt. Sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{S1} erhaltenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ gegeben. Seien weiterhin zwei Transitionen $u, v \in T$ gegeben, die der Regel Φ_{S1} genügen. Mit dem letzten Korollar folgern wir, das Netzsystem Σ erfüllt genau dann LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften, wenn das reduzierte Netzsystem diese LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften erfüllt. Zusätzlich gilt $\Pi_{T\setminus\{u,v\}}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T\setminus\{u_v\}}(L_\Sigma(M_0))$.

4.4 Entfernen toter markierter Plätze

Shatz et al. stellen in [STMD96] eine Regel vor, die einen toten Platz aus einem Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ entfernt. Der tote Platz $p \in P$ enthält bei der Anfangsmarkierung Marken. Der Platz p ist hierbei tot, falls der Vorbereich des Platzes leer ist (${}^\bullet p = \emptyset$). Die Regel kann angewandt werden, wenn der Nachbereich nur eine Transition $t \in p^\bullet$ enthält ($|p^\bullet| = 1$). Der tote Platz p und die Transition t aus dessen Nachbereich werden bei dieser Reduktion aus dem Netzsystem entfernt. Die Marken des entfernten Platzes, $M_0(p)$, werden auf alle Plätze verteilt, die im Nachbereich der entfernten Transition, $t^\bullet$, enthalten sind. Wir zeigen das Anwenden dieser Regel in Abbildung 4.16. Die formale Definition des Entfernens toter markierter Plätze geben wir im Folgenden.

Definition 4.33 (*Regel Φ_{S4}*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0^r)$ mit $N(P, T, F)$, ein Platz $p \in P$ und eine Transition $t \in T$. Der Platz p genügt der Regel Φ_{S4}, wenn die *folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- $M_0(p) \geq 1$,
- $p^\bullet = \{t\}$ *und* ${}^\bullet t = \{p\}$,
- ${}^\bullet p = \emptyset$.

Das durch Anwenden von Φ_{S4} *gewonnene reduzierte Netzsystem* $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ *mit* $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ *ist wie folgt definiert:*

$$
\begin{aligned}
P_r &= P \setminus \{p\} \\
T_r &= T \setminus \{t\} \\
\forall q \in P_r \, \forall t' \in T_r \; : & \\
F_r(q, t') &= F(q, t') \\
F_r(t', q) &= F(t', q) \\
M_0^r &= \begin{cases} M_0(q), & \textit{wenn } q \in T \setminus t^\bullet \\ M_0(q) + F(t, q) \cdot M_0(p), & \textit{wenn } q \in t^\bullet. \end{cases}
\end{aligned}
$$

⌟

Sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{S4} reduziertes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ gegeben. Wir zeigen, dass die Projektion der akzeptierten Schaltfolgen des Netzsystems Σ auf die Menge T_r und die Menge der akzeptierten Schaltfolgen des reduzierten Netzsystems Σ_r äquivalent sind.

Proposition 4.34

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ *mit* $N = (P, T, F)$ *und ein durch das Anwenden von* Φ_{S4} *gewonnenes reduziertes Netzsystem* $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ *mit* $N_r = (P_r, T_r, F_r)$*. Es gilt die folgende Aussage:*

$$\Pi_{T_r}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r)).$$

⌟

Beweis von 4.34 : Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{S4} gewonnenes Netzsystem $\Sigma = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Weiterhin seien ein Platz $p \in P$ und eine Transition $t \in T$ gegeben, die der Regel Φ_{S4} genügen. Da der Vorbereich von t nur den Platz p enthält und der Vorbereich von p die leere Menge ist, verhindert das Schalten von t in keinem Fall das Schalten einer anderen Transition $t' \in T$. Wenn der Platz p bei einer Markierung n Marken enthält, kann jede Schaltfolge $\sigma = \sigma_1 t_1 \sigma_2 t_2 \ldots \sigma_n t_n \sigma_{n+1}$ folgendermaßen permutiert werden: $\widehat{\sigma} = t_1 t_2 \ldots t_n \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \sigma_{n+1}$. Das Entfernen der Transition t und das Hinzufügen der Marken von p auf jeden Platz des Nachbereichs entspricht dem erstmaligen Schalten von t vor dem Schalten aller weiteren Transitionen. Dies wiederum entspricht der Permutation $\widehat{\sigma}$. Die Schaltfolge $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n \sigma_{n+1}$ ist demnach genau dann ein Element von $L_\Sigma(M_0)$, wenn diese auch in $L_{\Sigma_r}(M_0^r)$ enthalten ist. ■

Im folgenden Korollar zeigen wir, dass ein ursprüngliches Netzsystem genau dann beschränkt ist, wenn das gemäß Φ_{S4} reduzierte Netzsystem beschränkt ist.

Korollar 4.35

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{S4} gewonnenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Des Weiteren sei eine aktionsbasierte bzw. zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Formel φ gegeben. Es gelten die folgenden Aussagen:

1. *Σ beschränkt $\iff$ Σ_r beschränkt,*
2. *$\Pi_{T_r}(L_\Sigma(M_0)) \models \varphi \iff \Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r)) \models \varphi$.*

┘

Beweis von 4.35:

(1) Wir beweisen die Kontraposition der Aussage. Das ursprüngliche Netzsystem ist genau dann unbeschränkt, wenn das reduzierte Netzsystem unbeschränkt ist. Der Platz p, der entfernt wird, ist in jedem Fall beschränkt, da ${}^\bullet p = \emptyset$ gilt. Im Netzsystem Σ muss demnach ein anderer Platz existieren, der unbeschränkt ist. Die Behauptung folgt mit der folgenden Argumentationskette:

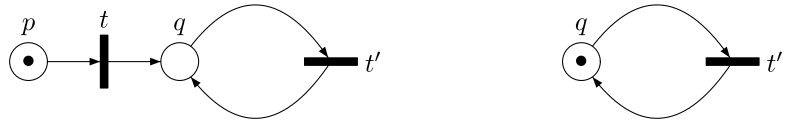
$$\begin{array}{ll} & \Sigma_r \text{ unbeschränkt} \\ \overset{(4.1)}{\iff} & \exists \omega_r \in T_r^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}(M_0) : m \xrightarrow{\omega_r} m' \Rightarrow m' > m \\ \text{Wegen Proposition 4.34} & \\ \iff & \exists \omega \in T^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}(M_0) : m \xrightarrow{\omega} m' \Rightarrow m' > m \\ \overset{(4.1)}{\iff} & \Sigma \text{ unbeschränkt.} \end{array}$$

(2) Folgt wegen Proposition 4.34. ■

Die Erweiterung der Behauptung (2) aus Korollar 4.35 gilt im Allgemeinen nicht. Wir stellen fest, es existieren LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften, die nicht von einem gemäß Φ_{S4} reduzierten Netzsystem Σ_r erfüllt werden. Das ursprüngliche Netzsystem hingegen erfüllt diese LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften. In Abbildung 4.17 stellen wir ein solches Beispiel vor. Da die Transition t und der Platz p aus dem Netzsystem Σ entfernt wurden, dürfen LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften weder die Transition t noch den Platz p überwachen. Das ursprüngliche Netzsystem erfüllt die zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften: Der Platz p enthält irgendwann einmal keine Marke. Das reduzierte Netzsystem erfüllt diese Eigenschaft jedoch nicht.

4.5 Entfernen von Blöcken

Mehrere wissenschaftliche Arbeiten [SM83, Val79] analysieren das Ersetzen einer Transition durch ein Netz Σ', wobei das Netzsystem Σ' bestimmte Bedingungen erfüllt. Die einzelnen Ausarbeitungen betrachten verschiedene Bedingungen, die solch ein Netzsystem Σ' erfüllt. Diese Techniken sind Verfeinerungstechniken. Deren Komplement ist die Abstraktion. In einem gegebenen Netzsystem Σ wird



(a) Netzsystem mit Deadlock p (b) reduziertes lebendiges Netzsystem

Abbildung 4.17: Bsp.für ein Netzsystem das bei Anwenden von Regel Φ_{S4} keine zustandsbasierten LTL^{r}-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewahrt.

ein Teilnetz Σ' bestimmt und dieses Teilnetz wird durch eine Transition ersetzt. Wir betrachten diese Art Reduktionstechniken in diesem Kapitel.

Hierfür benötigen wir jedoch die Definition für ein Teilnetz. Gegeben sei ein Netzsystem Σ, in dem wir ein Teilnetz Σ' bestimmen wollen. Den Teil von Σ ohne das Teilnetz Σ' bezeichnen wir mit Σ''. In diesem Kontext verstehen wir unter einem Teilnetz ein Netzsystem, dessen Platz- und Transitionsmenge keine Plätze und Transitionen aus dem Netzsystem Σ'' enthalten. Für die Flussrelation gilt: Im Teilnetz existieren genau zwei Transitionen t_{In}, t_{Out} in der Transitionsmenge von Σ' von der Art, dass t_{In} die einzige Transition in Σ' ist, die Marken von Plätzen in Σ'' konsumiert, und dass t_{Out} die einzige Transition in Σ' ist, die Marken auf Plätzen in Σ'' produziert. Formal definieren wir ein solches Teilnetz wie folgt:

Definition 4.36 (*Teilnetz/ Block*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein Netzsystem $\Sigma' = (N', M'_0, t_{In}, t_{Out})$ mit $N' = (P', T', F')$. Das Netzsystem Σ' bezeichnet einen Block *oder* Teilnetz *im Netzsystem Σ, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind. Es gilt $P' \subseteq P$, $T' \subseteq T$ und $M'_0 = M_0|_{P'}$. Für die Flussrelationen F' und F gilt:*

- $\exists t \in T' \,:\, (\forall q \in P \setminus P' \,:\, F(q, t_{In}) \geq 0)$ *mit* $t = t_{In}$,
- $\forall t \in T' \setminus \{t_{In}\} \, \forall q \in P \setminus P' \,:\, F(q, t) = 0$,
- $\exists t' \in T' \,:\, (\forall q \in P \setminus P' \,:\, F(t_{Out}, q) \geq 0)$ *mit* $t' = t_{Out}$,
- $\forall t \in T' \setminus \{t_{Out}\} \, \forall q \in P \setminus P' \,:\, F(t, q) = 0$ *sowie*
- $\forall t \in T \setminus T' \, \forall q \in P' \,:\, F(t, q) = F(q, t) = 0$.

⌟

4.5.1 Well-behaved Blöcke

In [SM83] präsentieren Suzuki und Murata eine Verfeinerungstechnik, die eine Transition, die bestimmte Eigenschaften erfüllt, durch ein Netzsystem ersetzt, das ebenfalls ganz bestimmte Bedingungen erfüllt. Wir betrachten hier das Komplement dieser Verfeinerung. Ein Teilnetz eines gegebenen Netzsystems wird zu einer Transition zusammengeschmolzen. Das Teilnetz muss bestimmte Bedingungen erfüllen, wie wir im Weiteren sehen. Diese Bedingungen kennzeichnen eine Erweiterung des Teilnetzes. Eine Erweiterung bedeutet, dass dem Teilnetz ein Platz hinzugefügt wird. Die Flussrelation wird dann folgendermaßen erweitert: Die Transition t_{In} konsumiert eine Marke von diesem Platz und die Transition t_{Out} produziert eine Marke auf dem hinzugefügten Platz. Diese Erweiterung nennt man das mit dem Teilnetz *assoziierte Netzsystem*. Die mathematische Definition lautet wie folgt.

Definition 4.37 (*assoziiertes Netzsystem*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, ein Block $\Sigma' = (N', M'_0, t_{In}, t_{Out})$ mit $N' = (P', T', F')$, eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}^+$ und ein neuer Platz $p_0 \notin P$. Das Netzsystem $\Sigma_B = (N_B, M_0^B, k)$ mit $N_B = (P \cup \{p_0\}, T, F_B)$ bezeichnet das mit dem Block Σ' assoziierte Netzsystem*. Das mit Σ assoziierte Netzsystem Σ_B ist wie folgt definiert:*

$$
\begin{aligned}
M_0^B(p) &= \begin{cases} k, & p = p_0 \\ M_0(p), & p \in P \end{cases} \\
F_B(t,p) &= \begin{cases} 1, & t = t_{Out} \text{ und } p = p_0 \\ 0, & t \neq t_{Out} \text{ und } p = p_0 \\ F(t,p), & p \neq p_0 \end{cases} \\
F_B(p,t) &= \begin{cases} 1, & t = t_{In} \text{ und } p = p_0 \\ 0, & t \neq t_{In} \text{ und } p = p_0 \\ F(p,t), & p \neq p_0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

⌟

Das assoziierte Netzsystem muss bestimmte Bedingungen erfüllen. Es muss sich „gut“ verhalten, damit das entsprechende Teilnetz zu einer Transition verschmolzen werden kann. Dieses gute Verhalten ist von der Anzahl der Marken auf dem neuen Platz p_0 im assoziierten Netzsystem abhängig. Die Transition t_{In} des assoziierten Netzsystems muss lebendig sein, falls der Platz p_0 bei der Anfangsmarkierung k Marken enthält. Des weiteren müssen alle Schaltfolgen aus $L_{\Sigma_B}(M_0^B)$ in Bezug auf die Anzahl der Transitionen t_{In} und t_{Out} ausgeglichen oder zumindest auszugleichen sein. Verhält sich ein Netzsystem entsprechend, sagt man es ist *k-well-behaved*. Die mathematische Formulierung lautet wie folgt.

Definition 4.38 (*k-well-behaved*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, ein Teilnetz $\Sigma' = (N', M'_0, t_{In}, t_{Out})$ mit $N' = (P', T', F')$, eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}^+$ und das mit Σ' assoziierte Netzsystem $\Sigma_B = (N_B, M_0^B, k)$ mit $N_B = (P_B, T, F_B)$. Das Netzsystem Σ_B ist genau dann k-well-behaved *(kurz k-WB), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(a) Die Transition t_{In} ist lebendig in Σ_B.

(b) Für jede Schaltfolge $\sigma_1 \in L_{\Sigma_B}(M_0^B)$, wobei $|\Pi_{t_{In}}(\sigma_1)| > |\Pi_{t_{Out}}(\sigma_1)|$, existiert eine Schaltfolge $\sigma_2 \in (T \setminus \{t_{In}\})^*$, so dass ein $\sigma = L_{\Sigma_B}(M_0^B)$ existiert mit $\sigma = \sigma_1\sigma_2$ und $|\Pi_{t_{In}}(\sigma_1)| = |\Pi_{t_{Out}}(\sigma_1)|$ gilt.

(c) $\forall \sigma \in L_{\Sigma_B}(M_0^B) : |\Pi_{t_{In}}(\sigma)| \geq |\Pi_{t_{Out}}(\sigma)|$.

⌟

Die erste Bedingung verlangt, dass t_{In} niemals durch eine Markierung auf Dauer blockiert wird, also immer irgendwann wieder Konzession erhält. Die zweite Bedingung gewährleistet, dass t_{Out} nie schaltet , ohne dass vorher t_{In} geschaltet hat. Die letzte Bedingung besagt, für jedes Schalten von t_{In} kann t_{Out} auch einmal Schalten.

Damit ein Teilnetz k-WB ist, muss eine Markierung existieren, so dass die Transition t_{In} k-mal schalten kann. Sie darf jedoch bei keiner erreichbaren Markierung mehr als k-mal direkt hintereinander Konzession haben. Andernfalls kann nicht gewährleistet werden, dass das Teilnetz k-WB ist. Dass eine Transition k mal Schalten kann, wird im Folgenden formal definiert.

Definition 4.39 (*k-aktiviert*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, eine Transition $t \in T$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}^+$. Die Transition t ist genau dann k-aktiviert*, wenn eine Markierung $m \in \mathcal{R}_\Sigma(M_0)$ existiert, so dass für jeden Platz $p \in P$ folgendes gilt: $k \cdot F(p,t) \leq m(p)$.*

⌟

Die Reduktionstechnik, die k-WB Blöcke zu einer Transition reduziert, läuft dann folgendermaßen ab: Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Falls ein Teilnetz $\Sigma' = (N', M_0', t_{In}, t_{Out})$ mit $N' = (P', T', F')$ existiert und das mit Σ' assoziierte Netzsystem k-WB ist und weiterhin die Transition t_{In} nicht $k+1$-aktiviert ist, wird das Teilnetzsystem Σ' aus Σ entfernt und die Transition t_{In} nimmt die Position von Σ' ein. Dies bedeutet, dass der Nachbereich von t_{Out} zum Nachbereich von t_{In} wird. Wir präsentieren in Abbildung 4.18 ein Beispiel, das diese Reduktionstechnik illustriert. Die Netzstruktur in Abbildung in Teilabbildung (a) sei sicher. Dann kann die Transition t_{In} niemals zweimal direkt hintereinander Konzession haben. Da der Block 1-WB ist, wird der Block zur Transition t_{In} zusammengefasst. Der Nachbereich von t_{Out} wird zum Nachbereich von t_{In}. Wir definieren die *k-WB-Blockreduktion* formal.

Definition 4.40 (*Regel Φ_{SM1}*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}^+$. Das Netzsystem Σ genügt der Regel Φ_{SM1}, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

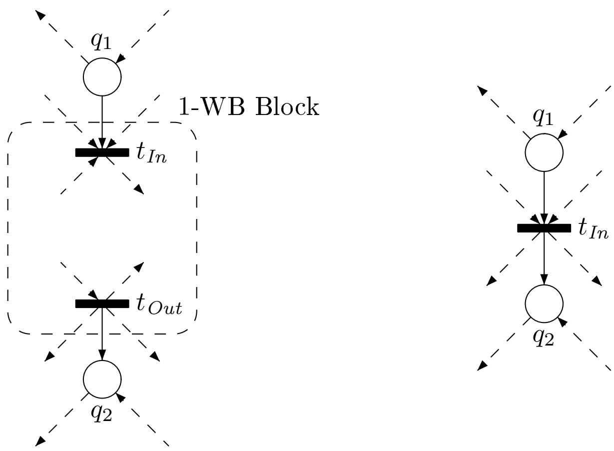
- *Es existiert ein Teilnetz $\Sigma' = (N', M_0', t_{In}, t_{Out})$ mit $N' = (P', T', F')$.*
- *Das mit Σ' assoziierte Netzsystem $\Sigma_B = (N_B, M_0^B, k)$ mit $N_B = (P \cup \{p_0\}, T, F_B)$ ist k-WB.*
- *Die Transition t_{In} ist nicht $k+1$-aktiviert.*

Das durch Anwenden von Φ_{SM1} gewonnene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P_r &= P \setminus P' \\ T_r &= (T \setminus T') \cup \{t_{In}\} \\ M_0^r &= M_0|_{P_r} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} \forall p \in P_r\, \forall t \in T_r : & & \\ F_r(t,p) & = & F(t,p) \\ F_r(p,t) & = & F(p,t) \\ \forall p \in t_{Out}{}^\bullet : & & \\ F_r(t_{In},p) & = & F(t_{Out},p). \end{array}$$

⌟



(a) Netzstruktur mit 1-WB Block (b) reduzierte Netzstruktur

Abbildung 4.18: In (a) ist eine Netzstruktur abgebildet, die einen 1-WB Block enthält. Unter der Vorraussetzung, dass die Netzstruktur in (a) sicher ist, ist die Transition t_{In} in (a) nicht 2-aktiviert. Unter diesen Vorraussetzungen wird die Netzstruktur zu der in (b) abgebildeten Struktur reduziert.

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Suzuki und Murata beweisen in [SM83, S. 59 ff.], ein Netzsystem Σ ist genau dann n-beschränkt, wenn das gemäß Φ_{MS1} reduzierte Netzsystem Σ_r n-beschränkt ist. In [SM83, S. 60] beweisen Suzuki und Murata, die Lebendigkeit von Σ impliziert die Lebendigkeit von Σ_r. Mit weiteren Ergebnissen aus [SM83] folgern wir:

Korollar 4.41

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{MS1} gewonnenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T, F_r)$. Des Weiteren sei eine aktionsbasierte oder zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Formel φ gegeben. Es gelten die folgenden Aussagen:

1. $\Pi_{T_r}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r))$ *und*
2. $\Pi_{T_r}(L_\Sigma(M_0)) \models \varphi \iff \Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r)) \models \varphi$.

⌟

Beweis von 4.41 :

1. Suzuki und Murata definieren in [SM83, S. 55] eine Abbildung $\theta : T^* \longrightarrow T_r^*$, die einer Schaltfolge des ursprünglichen Netzsystems eine Schaltfolge des reduzierten Netzsystems zuordnet. Lemma 2 in [SM83, S. 57] besagt:

   $$\forall \sigma \in L_{\Sigma_r}(M_0^r)\, \exists \sigma' \in L_\Sigma(M_0) : \theta(\sigma') = \sigma.$$

   Hieraus folgt unmittelbar:

   $$\Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r)) \subseteq \Pi_{T_r}(L_\Sigma(M_0)). \tag{4.47}$$

   Lemma 4 in [SM83, S. 58] besagt:

   $$\forall \sigma \in L_\Sigma(M_0) : \theta(\sigma) \in L_{\Sigma_r}(M_0^r),$$

   Hiermit folgt weiterhin:

   $$\Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r)) \supseteq \Pi_{T_r}(L_\Sigma(M_0)). \tag{4.48}$$

   Mit Gleichung (4.47) und Gleichung (4.48) folgt die Aussage:

   $$\Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r)) = \Pi_{T_r}(L_\Sigma(M_0)). \tag{4.49}$$

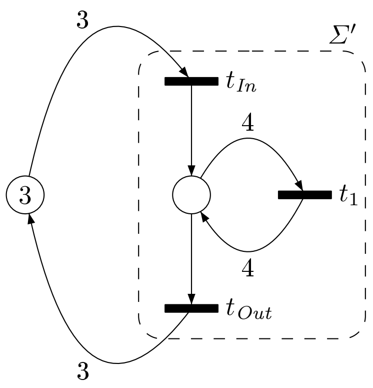
2. Die Behauptung schlussfolgern wir direkt aus der Gültigkeit von Behauptung 1. ■

Die Umkehrung der Lebendigkeitsimplikation gilt im Allgemeinen nicht. So setzt die Lebendigkeit des reduzierten Netzsystem im Allgemeinen nicht die Lebendigkeit des ursprünglichen Netzsystems vorraus. Ein Beispiel hierfür ist [SM83] entnommen und in Abbildung 4.19 dargestellt. Damit aus der Lebendigkeit des reduzierten Netzsystems die Lebendigkeit des ursprünglichen Netzsystems folgt, muss die Transition t_{In} k-aktiviert und $\Sigma_{B'}$ ein lebendiges Netzsystem sein (vgl. hierzu Satz 11 in [SM83, S. 60]).

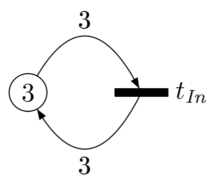
4.5.2 Well-formed Blöcke

Valette präsentiert in [Val79] eine Verfeinerungstechnik, die der von Murata und Suzuki in [SM83] ähnlich ist. Eine Transition mit bestimmten Eigenschaften wird durch einen Block ersetzt, desssen assoziiertes Netzsystem ebenfalls bestimmte Bedingungen erfüllt. Diese Bedingungen unterscheiden diese Verfeinerungsstechnik von Φ_{SM1}. Wir betrachten wiederum in diesem Kapitel das Komplement der Verfeinerung, die Abstraktion.

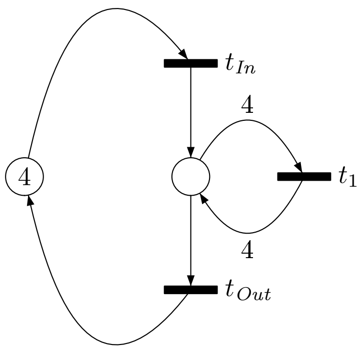
Sei ein Netzsystem Σ gegeben. Im Gegensatz zu Muratas und Suzukis Blockreduktion, erfüllt das mit einem Teilnetz Σ' assoziierte Netzsystem Σ_B strengere Bedingungen. Das gesamte assoziierte Netzsystem Σ_B muss lebendig sein. Die Bedingungen für das Auftreten der Transitionen t_{In} und t_{Out} in einer von Σ_B akzeptierten Schaltfolge sind ebenfalls schärfer als bei Φ_{SM1}. Jedem Schalten von t_{In} muss irgendwann ein Schalten von t_{Out} folgen, bevor t_{In} wieder schalten darf. Ist derjenige Platz p_0 markiert, der dem Netzsystem Σ' hinzugefügt wird, um das assoziierte Netzsystem Σ_B zu erzeugen, hat nur die Transition t_{In} Konzession. Diese Bedingungen charakterisieren einen *well-formed* Block. Formal wird ein well-formed Block wie folgt definiert:



(a) ursprüngliches Netzsystem Σ mit einem Block Σ'



(b) reduziertes Netzsystem Σ_r



(c) mit Σ' assoziiertes Netzsystem $\Sigma_{B'}$

Abbildung 4.19: Das Netzsystem Σ ist nicht lebendig. Σ_r ist lebendig, wobei $\Sigma_{B'}$ 3-WB und t_{In} nicht 4-enabled ist.

Definition 4.42 (*well-formed*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, ein Teilnetz $\Sigma' = (N', M_0', t_{In}, t_{Out})$ mit $N' = (P', T', F')$, ein neuer Platz $p_0 \notin P$ und das mit Σ' assoziierte Netzsystem $\Sigma_B = (N_B, M_0^B, 1)$ mit $N_B = (P \cup \{p_0\}, T, F_B)$. Das Netzsystem Σ_B bezeichnet einen well-formed *Block, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *Das Netzsystem Σ_B ist lebendig.*
2. $\forall m \in \mathcal{R}_\Sigma : m \neq M_0 \Longrightarrow m(p_0) = 0.$
3. *Die einzige Markierung, bei der t_{In} Konzession hat, ist M_0.*

⌟

Wir stellen folgendes fest: Ein well-formed Block erfüllt die Kriterien eines *Workflow Petrinetzes*, wie sie van der Werf in [vdW06] betrachtet. Genauer gesagt, ist ein well-formed Block ein *tWorkflow Petrinetz.* Die Existenz genau eines Anfangs- und eines Endknoten (Transitionen für tWorkflow Netze und Plätze für *pWorkflownetze*) sowie die Existenz eines Pfades, der vom Anfangsknoten zu einem beliebigen Knoten und von dort zum Endknoten führt, kennzeichnen ein Workflow Netz [vdA97]. Die Existenz genau eines Anfangs- und Endknoten ist durch unsere Definition eines Blocks gegeben. Die Lebendigkeit eines well-formed Blocks gewährleistet, dass immer ein Pfad von t_{In} zu irgendeiner Transition im well-formed Block und von dort zu t_{In} existiert.

Die Reduktion von well-formed Blöcken funktioniert analog zur Reduktion der k-WB Blöcke. Gegeben sei ein Netzsystem Σ. Falls ein Teilnetz Σ' existiert und das mit Σ' assoziierte Netzsystem Σ_B well-formed ist und zusätzlich die Transition t_{In} nicht 2-aktiviert ist, dann wird das Teilnetz Σ' zu der Transition t_{In} fusioniert. Wir definieren diese Reduktionstechnik formal:

Definition 4.43 (*Regel Φ_{V1}*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}^+$. Das Netzsystem Σ genügt der Regel Φ_{V1}, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- *Es existiert ein Teilnetz $\Sigma' = (N', M_0', t_{In}, t_{Out})$ mit $N' = (P', T', F')$.*
- *Das mit Σ' assoziierte Netzsystem $\Sigma_B = (N_B, M_0^B, 1)$ mit $N_B = (P \cup \{p_0\}, T, F_B)$ ist well-formed.*
- *Die Transition t_{In} ist nicht 2-aktiviert.*

Das durch Anwenden von Φ_{V1} gewonnene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist wie folgt definiert:

$$
\begin{aligned}
P_r &= P_0 \\
T_r &= T_0 \cup \{t_{In}\} \\
M_0^r &= M_0|_{P_r}
\end{aligned}
$$

$$\begin{array}{rcl} \forall p \in P_r\, \forall t \in T_r : & & \\ F_r(t,p) & = & F(t,p) \\ F_r(p,t) & = & F(p,t) \\ \forall p \in {t_{Out}}^{\bullet} : & & \\ F_r(t_{In},p) & = & F(t_{Out},p). \end{array}$$

⌟

Das Prinzip der WB-Blöcke ist eine Verallgemeinerung des Prinzips der well-formed Blöcke (vgl. hierzu [BGV91, S. 15]). Es konnte jedoch kein entsprechender Beweis in der Literatur gefunden werden. Deshalb zeigen wir folgendes:

Proposition 4.44

Die Regel Φ_{V1} ist ein Spezialfall der Regel Φ_{MS1}.

⌟

Beweis von 4.44: Regel Φ_{V1} sowie Regel Φ_{MS1} ersetzen Teilnetze eines Netzsystems durch eine Transition t_{In}. Dieses Ersetzen und die Tatsache, dass die Platz- sowie Transitionsmengen der Teilnetze und die Platz- und Transitionsmengen der reduzierten Netzsysteme disjunkt sein müssen, sind bei beiden Regeln gemäß Definition 4.40 und Definition 4.43 gleich. Da die Transition t_{In} gemäß Definition 4.43 nicht 2-aktiviert sein darf, um Φ_{V1} anwenden zu können, genügt es zu zeigen, dass ein well-formed Block ein 1-WB Block ist. Da der well-formed Block lebendig ist, muss natürlich ebenfalls t_{In} lebendig sein. Hiermit ist Bedingung (1) eines 1-WB Blocks erfüllt. Aus Bedingung (2) und Bedingung (3) aus Definition 4.42 folgt, dass in jeder geschalteten Schaltfolge die Anzahl von t_{In} größer gleich der Anzahl von t_{Out} und somit Bedingung (c) eines 1-WB Block erfüllt ist. Dies ist damit zu begründen, dass t_{In} nur schalten kann, wenn der Platz p_0 des assoziierten Blocks markiert ist. Keine weitere Transition hat bei der Markierung M_0 Konzession. Nachdem t_{In} geschaltet hat, kann jede beliebige Transition des assoziierten Blocks irgendwann einmal schalten. Schaltet jedoch t_{Out}, wird wegen Bedingung (2) in Definition 4.42 wieder die Markierung M_0 erreicht. Mit der eben geführten Argumentation folgt weiterhin, dass für jede Schaltfolge, die vom assoziierten Block akzeptiert wird, folgendes gilt:

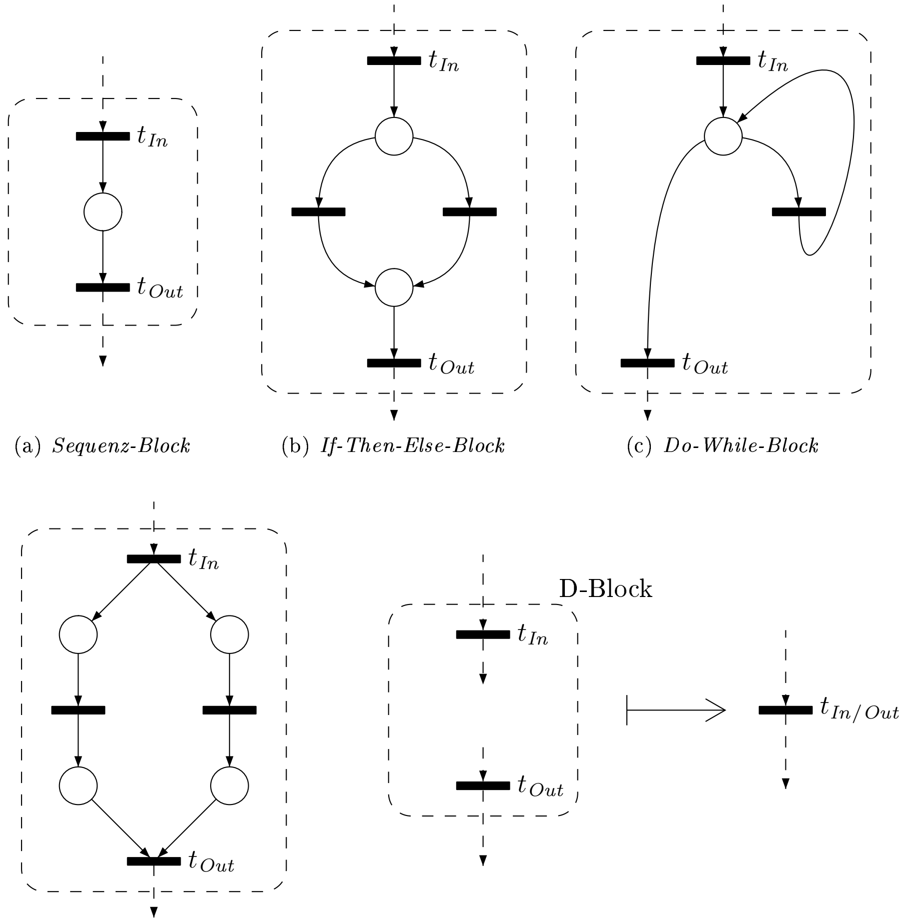
$$0 \leq |\Pi_{t_{In}}| - |\Pi_{t_{Out}}| \leq 1.$$

Da aufgrund der Lebendigkeit des assoziierten Blocks auch die Transition t_{Out} lebendig ist, kann für jede Schaltfolge, für die $|\Pi_{t_{In}}| - |\Pi_{t_{Out}}| > 0$ gilt, eine weitere Schaltfolge geschaltet werden, so dass $|\Pi_{t_{In}}| - |\Pi_{t_{Out}}| = 0$ gilt. Hieraus folgt, dass Bedingung (b) für einen 1-WB Block erfüllt ist. ■

Gegegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$, ein gemäß Φ_{V1} reduziertes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}^+$. Valette zeigt in [Val79], das Netzsystem Σ ist genau dann lebendig bzw. n-beschränkt, wenn das reduzierte Netzsystem lebendig bzw. n-beschränkt ist. Die Lebendigkeit wird im Gegensatz zur Regel Φ_{SM1} auch in Richtung der Verfeinerung bewahrt. Da die Regel Φ_{V1} ein Spezialfall der Regel Φ_{SM1} ist, folgt mit Korollar 4.41: $\Pi_{T_r}(L_{\Sigma}(M_0)) = \Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r))$.

4.5.3 D-Block-Reduktionen

In [Val79] präsentiert Valette weitere spezielle Muster. Er bezeichnet diese Muster als *D-Blöcke*. Die D-Blöcke aus [Val79] sind in Abbildung 4.20 dargestellt.



(a) *Sequenz-Block* (b) *If-Then-Else-Block* (c) *Do-While-Block*

(d) *Join-Fork-Block* (e) D-Block-Reduktion

Abbildung 4.20: In (a), (b), (c) und (d) sind D-Blöcke abgebildet. In (e) ist die D-Block-Reduktion dargestellt.

Diese Muster sind spezielle well-formed Blöcke [Val79]. Wir stellen fest: D-Blöcke sind ebenfalls Workflow Netze. Wir zeigen weiterhin, dass die mit den D-Blöcken assoziierten Blöcke *sound* sind. Ein Workflow Netz ist sound, wenn keine Transition in dem Workflow Netz tot ist und von jeder erreichbaren Markierung eine Schaltfolge schalten kann, in der die finale Transition t_{Out} enthalten ist. Zusätzlich darf nach dem Schalten der finalen Transition t_{Out} kein Platz des Workflow Netzes, mit Ausnahme des Platzes im Nachbereich von t_{Out}, eine Marke enthalten [vdA97]. Die mit den D-Blöcken assoziierten Netzsysteme erfüllen diese Bedingungen.

Ein gegebenes Netzsystem Σ wird analog zu den vorherigen Blockreduktionen reduziert. Falls Σ eine D-Block enthält, und die Transition t_{In} nicht 2-aktiviert ist, wird der D-Block zu einer Transition zusammengefasst. Die verallgemeinerte

D-Block-Reduktion ist Abbildung 4.20.e in dargestellt. Wir definieren die D-Blockreduktion im Allgemeinen wie folgt:

Definition 4.45 (*D-Blockreduktion*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}^+$. Das Netzsystem Σ genügt der D-Blockreduktion, *wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

- *Es existiert ein Teilnetz $\Sigma' = (N', M_0', t_{In}, t_{Out})$ mit $N' = (P', T', F')$.*

- *Das mit Σ' assoziierte Netzsystem $\Sigma_B = (N_B, M_0^B, 1)$ mit $N_B = (P \cup \{p_0\}, T, F_B)$ ist ein D-Block.*

- *Die Transition t_{In} ist nicht 2-aktiviert.*

Das durch Anwenden von Φ_{V1} gewonnene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
P_r &= P_0 \\
T_r &= T_0 \cup \{t_{In}\} \\
M_0^r &= M_0|_{P_r} \\
\forall p \in P_r\, \forall t \in T_r : & \\
F_r(t,p) &= F(t,p) \\
F_r(p,t) &= F(p,t) \\
\forall p \in {t_{Out}}^\bullet : & \\
F_r(t_{In},p) &= F(t_{Out},p).
\end{aligned}$$

⌟

Mit der allgemeinen D-Blockreduktion und den vier D-Blockmustern aus [Val79] ergeben sich die folgenden vier speziellen Reduktionsregeln:

1. Φ_{V2} Ersetzen eines *Sequenzblocks* (siehe Abbildung 4.20.a). Wir überprüfen, dass diese Regel ein Spezialfall von Φ_{S1}, Φ_{ES3} sowie Φ_{ES4} ist.

2. Φ_{V3} Ersetzen eines *If-Then-Else-Blocks* (siehe Abbildung 4.20.b).

3. Φ_{V4} Ersetzen eines *Do-While-Blocks* (siehe Abbildung 4.20.c).

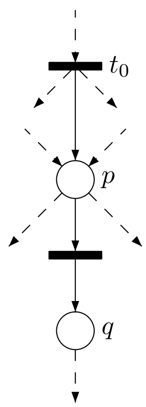
4. Φ_{V5} Ersetzen eines *Fork-Join-Blocks* (siehe Abbildung 4.20.d).

Da die D-Blockreduktion ein Spezialfall von Φ_{V1} ist, gilt für die Anwendung aller Regeln Φ_{V2} bis Φ_{V5}: Ein gegebenes Netzsystem ist genau dann lebendig bzw. beschränkt, wenn das reduzierte Netzsystem lebendig bzw. beschränkt ist. Wegen Korollar 4.41 gilt: $\Pi_{T_r}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r))$. Dies bedeutet, dass das Anwenden dieser Regeln die Projektion der akzeptierten Schaltfolgen auf die Menge der reduzierten Transitionsmenge in beiden Transformationsrichtungen erhält.

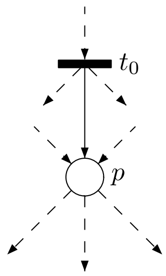
4.6 Vereinigung serieller Plätze

Suzuki und Murata stellen in [SM83] eine Regel vor, die einen Platz in zwei serielle Plätze und eine Transition verfeinert. In [Mur89] präsentiert Murata das entsprechende Komplement: die Vereinigung serieller Plätze. Diese Reduktionstechnik ist das Dual zur Vereinigung serieller Transitionen im folgenden Sinne: Sei Σ^D das duale Netzsystem zu einem Netzsystem Σ. Das Netzsystem Σ^D entsteht aus Σ, wenn die Plätze und Transitionen die Rolle tauschen.

Die Vereinigung serieller Plätze kann angewandt werden, falls in einem gegebenen Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ ein Platz $p \in P$ existiert, so dass der Vorbereich von p nicht leer ist und die Transition $t \in p^\bullet$ einen einelementigen Nachbereich hat $({}^\bullet(t^\bullet) = \{t\})$. Zusätzlich ist der Platz p das einzige Element des Nachbereichs von t. Wir präsentieren in Abbildung 4.21 eine Netzstruktur, die diese Bedingungen erfüllt. Die Plätze p und $q \in P$ werden zu einem Platz verschmolzen, und der Nachbereich von q wird mit dem Nachbereich des Platzes p vereinigt.



(a) Netzsystemstruktur, die der Regel $\Phi MS2$ genügt



(b) reduziertes Netz

Abbildung 4.21: Vereinigung von seriellen Plätzen

Definition 4.46 (*Regel Φ_{SM2}*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und eine Transition $t \in T$. Die Transition t genügt der Regel Φ_{SM2}, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- ${}^\bullet({}^\bullet t) \neq \emptyset$,
- ${}^\bullet(t^\bullet) = ({}^\bullet t)^\bullet = \{t\}$,
- $|t^\bullet| = |{}^\bullet t| = 1$,
- $F(t, t^\bullet) = F(t^\bullet, t) = 1$ *und*
- $M_0(t^\bullet) = 0$.

Das durch Anwenden von Φ_{SM2} gewonnene reduzierte Netzsystem Σ_r =

(N_r, M_0^r) *mit* $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ *ist wie folgt definiert:*

$$\begin{array}{rcl} P_r & = & P \setminus t^\bullet \\ T_r & = & T \setminus \{t\} \\ \forall p \in P_r \, \forall t' \in T_r : & & \\ F_r(p, t') & = & F(p, t') \\ F_r(t', p) & = & F(t', p) \\ \forall p \in {}^\bullet t \, \forall t' \in (t^\bullet)^\bullet : & & \\ F_r(p, t') & = & F(t^\bullet, t') \\ M_0^r & = & M_0|_{P_r}. \end{array}$$

⌟

In [SM83] zeigen Suzuki und Murata, das folgendes gilt:

- Σ ist lebendig $\iff$ Σ_r ist lebendig (vgl. hierzu Lemma 14.c) und 14.d) in [SM83, S. 63]),
- Σ ist n-beschränkt $\iff$ Σ_r ist n-beschränkt (vgl. hierzu Lemma 14.a) in [SM83, S. 63],
- Bezüglich der Erhaltung der Schaltfolgen gilt:

$$\Pi_{T_r}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T_r}(L_{\Sigma_r}(M_0^r)). \tag{4.50}$$

.

Gleichung (4.50) beweisen Suzuki und Murata in Lemma 13 in [SM83, S. 63].

Kapitel 5

Entfernen von Transitionen

In diesem Kapitel betrachten wir Regeln, die im Allgemeinen nur Transitionen aus einem gegebenen Netzsystem entfernen. Eine Reduktionstechnik entfernt zwar auch Plätze aus dem Netzsystem, diese Plätze enthalten jedoch niemals Marken im entsprechenden Netzsystem und sind im Vorbereich von toten Transitionen enthalten. Das Entfernen dieses Platzes ist nur eine Folge des Entfernens der toten Transition.

5.1 Entfernen toter Transitionen

Esparza und Schröter präsentieren in [ES01] eine Regel, die tote Transitionen aus einem gegebenen Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ entfernt. Diese Regel bestimmt mit Hilfe algebraischer Methoden eine Menge von Plätzen $P_d \subseteq P$. Dies Plätze erhalten niemals Marken und sind im Anfangszustand unmarkiert. Alle Transitionen des Nachbereichs von P_d erhalten demnach niemals Konzession. Somit können diese Transitionen entfernt werden.

Definition 5.1 (*Regel Φ_{ES1} zur Erkennung toter Transitionen*)

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Die Plätze einer Menge $P_d \subseteq P$ und die Transitionen einer Menge $T_d \subseteq T$ genügen Φ_{ES1} genau dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} \vec{Y}^T \cdot \mathbf{N} &\leq \mathbf{0} \\ \vec{Y}^T \cdot {M_0}^T &= 0 \end{aligned}$$

besitzt eine Lösung für den Variablenvektor $\vec{Y} \geq \mathbf{0}$.

(ii) Für die Mengen $P_d \subseteq P$ und $T_d \subseteq T$ gilt:

$$\forall p \in P : p \in P_d \iff Y(p) > 0 \tag{5.1}$$

$$\forall t \in T : t \in T_d \iff \exists p \in P_d : p \in {}^\bullet t \cup t^\bullet. \tag{5.2}$$

Das reduzierte Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$, das durch

Anwendung von Φ_{ES1} auf Σ gewonnen wird, ist dann wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P_r &= P \setminus P_d \\ T_r &= T \setminus T_d \\ M_0^r &= M_0|_{P_r} \\ \forall q \in P_r\, \forall t \in T_r : & \\ F_r(q,t) &= F(q,t) \\ F_r(t,q) &= F(t,q). \end{aligned}$$

⌟

Esparza und Schröter beweisen in [ES01], dass das Anwenden dieser Regel zustandsbasierte LTL^r-$\mathcal{X}$-Eigenschaften bewahrt, falls das ursprüngliche Netzsystem sicher ist. Wir zeigen mit der folgenden Proposition, dass die Menge der akzeptierten Schaltfolgen durch die Regel Φ_{ES1} vollständig erhalten bleibt. Mit dieser Aussage können wir anschließend Aussagen zur Bewahrung der Beschränktheit und von LTL-Eigenschaften treffen.

Lemma 5.2

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$, das durch das Anwenden von Φ_{ES1} gewonnen wird. Es gilt:

$$L_\Sigma(M_0) = L_{\Sigma_r}(M_0^r). \tag{5.3}$$

⌟

Beweis von 5.2 : Wir unterscheiden zwei Fälle:

(i) $P_r = \emptyset$: Mit Gleichung 5.1 und Gleichung 5.2 aus Definition 5.1 folgt, dass $T = T_r$ ist. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass das Netzsystem Σ_r und das ursprüngliche Netzsystem identisch sind.

(ii) $P_r \neq \emptyset$: Gemäß Definition 5.1 existiert eine Lösung für das folgende Ungleichungssystem:

$$\begin{aligned} \vec{Y}^T \cdot \mathbf{N} &\leq \mathbf{0} \\ \vec{Y}^T \cdot {M_0}^T &= 0 \\ \vec{Y} &\neq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Es sind wiederum zwei Fälle zu unterscheiden:

(a) $T_r = \emptyset$: Dies bedeutet, dass die entfernten Plätze im Anfangszustand unmarkiert sind, wobei gilt:

$$\forall p \in P_r,\, \forall t \in T \;:\; F(p,t) = F(t,p) = 0.$$

Das Entfernen dieser isolierten Plätze, die im Anfangszustand nicht markiert sind, ändert offensichtlich nichts an der Menge der Schaltfolgen des Netzsystems.

(b) $T_r \neq \emptyset$: Die Menge der Transitionen, die T_r enthält, enthält nur tote Transitionen (vgl. hierzu [Sch06], S.137 ff.) bei der Anfangsmarkierung M_0. Dies bedeutet:

$$\forall \omega \in T^* \nexists M \in \mathcal{R}(M_0) \;:\; M_0 \xrightarrow{\omega t} M.$$

Entsprechend gilt $\mathcal{R}(M_0) = \mathcal{R}(M_0^r)$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Mit Hilfe der Sprachenäquivalenz können wir Aussagen, die die Beschränktheit und LTL-Eigenschaften betreffen, folgern.

Korollar 5.3

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{ES1} gewonnenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$. Des Weiteren sei eine aktionsbasierte oder zustandsbasierte LTL-Formel φ gegeben. Es gelten die folgenden Aussagen:

1. *Σ beschränkt $\iff$ Σ_r beschränkt,*
2. *$\Sigma \models \varphi \iff \Sigma_r \models \varphi$.*

⌟

Beweis von 5.3 :

1. Wir beweisen die Kontraposition der Aussage. Das Netzsystem Σ ist genau dann unbeschränkt, wenn das reduzierten Netzsystem Σ_r unbeschränkt ist.

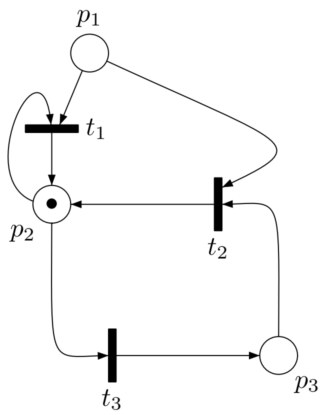
$$
\begin{aligned}
& \Sigma \text{ unbeschränkt} \\
\overset{(4.1)}{\iff} \quad & \exists \sigma \in T^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}(M_0) : m \xrightarrow{\sigma} m' \Rightarrow m > m' \\
\overset{(5.3)}{\iff} \quad & \exists \sigma_r \in T_r^*, \exists m, m' \in \mathcal{R}(M_0) : m \xrightarrow{\sigma_r}_r m' \Rightarrow m > m' \\
\overset{(4.1)}{\iff} \quad & \Sigma_r \text{ unbeschränkt.}
\end{aligned}
$$

2. Folgt aus der Sprachenäquivalenz (siehe Lemma 5.2) von Σ und Σ_r. ■

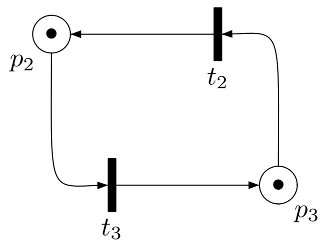
Ist ein Netzsystem nicht lebendig, folgt im Allgemeinen nicht, dass das reduzierte Netzsystem ebenfalls nicht lebendig ist. So bewahrt das Anwenden von Φ_{ES1} im Allgemeinen keine Deadlocks. Wir demonstrieren dies an einem Beispiel, das die Abbildung 5.1.a illustriert. Das Schalten der Transition t_3 produziert eine Marke auf dem Platz p_3 und konsumiert die Marke vom Platz p_2. Das ist ein Deadlock, weil die Transitionen t_1 und t_2 keine Konzession haben, da der Platz $p_1 \in {}^\bullet t_1 \cup {}^\bullet t_2$ keine Marke enthält. Weiterhin hat die Transition t_3 keine Konzession, da der Platz p_2 unmarkiert ist. Der Platz p_1 und die Transition t_1 genügen der Regel Φ_{ES1}. Wir begründen dies im Folgenden. Die zu Σ gehörige Inzidenzmatrix lautet dann:

$$
\mathbf{N} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Die Anfangsmarkierung ist gegeben durch $M_0 = (0, 1, 0)$. Eine Lösung für das Ungleichungssystem $\vec{Y}^T \cdot \mathbf{N} \leq \mathbf{0}$, $\vec{Y}^T \cdot M_0^T$ sowie $\vec{Y} \geq \mathbf{0}$ ist der Vektor $\vec{Y} = (1, 0, 0)$. Da $Y(p_1) > 1$ gilt, genügen p_1 und dessen Ausgangstransition t_1 der Regel Φ_{ES1}. Das entsprechend reduzierte Netzsystem Σ_r ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Mit Definition 14.1 in [Sta90, S. 148] weist man nach, dass Σ_r *stark zusammenhängend* und nach Definition 14.3, (2) in [Sta90, S. 152] eine *Zustandsmaschine* ist. Daraus folgt mit Satz 14.12 in [Sta90], dass Σ_r lebendig ist, obwohl Σ nicht lebendig ist.



(a) Netzsystem Σ mit Platz p_1, der der Regel Φ_{ES1} genügt. Die Transition t_1 ist tot.



(b) reduziertes Netzsystem Σ_r

Abbildung 5.1: Beispiel für die Nichterhaltung der Lebendigkeit bei Anwenden der Regel Φ_{ES1}. Das ursprüngliche Netz in (a) ist nicht lebendig. Das reduzierte Netzsystem in (b) hingegen ist lebendig.

Zum Abschluss betrachten wir den Einfluss der Regel Φ_{ES1} auf den Erreichbarkeitsgraphen. Die Menge der entfernten Transitionen ist tot und die Plätze aus deren Vorbereichen sind bei der Anfangsmarkierung unmarkiert. Hieraus folgt unmittelbar, dass die entfernten Transitionen nie schalten und die entfernten Plätze nie Marken enthalten. Die entfernten Transitionen sind demnach nicht im Erreichbarkeitsgraphen des ursprünglichen Netzsystems enthalten. Der Erreichbarkeitsgraph des ursprünglichen Netzsystems ist demnach isomorph zum Erreichbarkeitsgraphen des reduzierten Netzsystems.

5.2 Vereinigung paralleler redundanter Transitionen

Shatz et al. betrachten in [STMD96] eine Regel, die von zwei parrallelen Transitionen eine Transition entfernt. Diese Regel wurde ursprünglich von Murata in [Mur89] vorgestellt. Die Vereingung paralleler Transitionen kann für ein Netzsystem angewandt werden, falls zwei Transitionen existieren, deren Vor- und Nachbereiche jeweils äquivalent sind. Eine solche Netzstruktur präsentieren wir in Abbildung 5.2.

Definition 5.4 (Φ_{S5}: *Vereinigung paralleler redundanter Transitionen*)
Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$. Zwei Transitionen $u, v \in T$ genügen genau dann der Regel Φ_{S5}, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $u^\bullet = v^\bullet$,

- ${}^\bullet u = {}^\bullet v$,

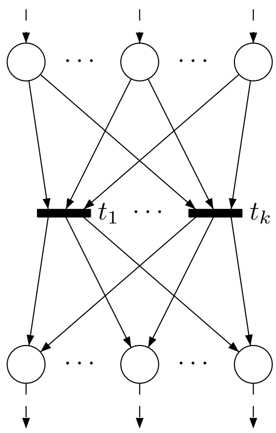
- $\forall t \in p^\bullet : F(t,q) = F(t,p) = 1$ *und*

- $\forall t \in {}^\bullet p : F(t,q) = F(t,p) = 1.$

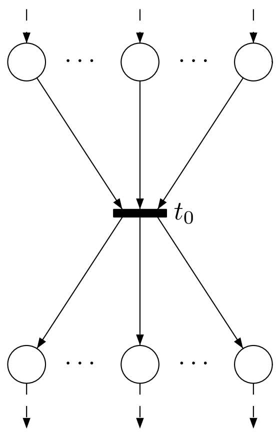
Das durch Anwenden von Φ_{S5} erhaltene Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T_r, F_r)$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P_r &= P \\ T_r &= T \setminus \{v\} \\ M_0^r &= M_0|_{P_r} \\ \forall q \in P_r \, \forall t \in T_r : & \\ F_r(q,t) &= F(q,t) \\ F_r(t,q) &= F(t,q). \end{aligned}$$

┘



(a) Netzsystemstruktur, die der Regel Φ_{S5} genügt



(b) reduziertes Netz

Abbildung 5.2: Vereinigung paralleler redundanter Transitionen

Murata beweist in [Mur89], dass das Anwenden dieser Regel die Beschränktheit und Lebendigkeit bewahrt. Das ursprüngliche Netzsystem ist genau dann lebendig bzw. beschränkt, wenn das reduzierte Netzsystem lebendig bzw. beschränkt ist. Wir stellen fest, die Menge der erreichbaren Markierungen verändert sich durch das Entfernen einer parallelen Transition nicht. Die parallelen Transitionen sind die Beschriftungen eines Zustandsübergangs im Erreichbarkeitsgraphen des ursprünglichen Netzsystems. Dieser Zustandsübergang ist im Erreichbarkeitsgraphen des reduzierten Netzsystems mit nur noch einer Transition beschriftet, ansonsten sind die Erreichbarkeitsgraphen äquivalent. Seien zwei Transitionen t_1, t_2 gegeben, die der Regel Φ_{S5} genügen. Es ist offensichtlich, dass die Projektion der Schaltfolgen auf die Menge $T \setminus \{t_1, t_2\}$ erhalten bleibt.

Zum Anderen bewahrt das Anwenden dieser Regel aktionsbasierte LTL^r-Eigenschaften und zustandsbasierte LTL-Eigenschaften. Die zustandsbasierten LTL-Eigenschaften werden erhalten, da die Menge der Markierungsfolgen des ursprünglichen Netzsystem und die Menge der Markierungsfolgen des reduzierten Netzsystems äquivalent sind. Wir fassen unsere Ergebnisse in einem abschließenden Korollar zusammen.

Korollar 5.5

Gegeben sei ein Netzsystem $\Sigma = (N, M_0)$ mit $N = (P, T, F)$ und ein durch das Anwenden von Φ_{S5} gewonnenes Netzsystem $\Sigma_r = (N_r, M_0^r)$ mit $N_r = (P_r, T, F_r)$. Des Weiteren sei eine aktionsbasierte LTL^r-Formel (bzw. zustandsbasierte LTL-Formel) φ und zwei Transitionen $t_1, t_2 \in T$ gegeben, die der Regel Φ_{S5} genügen. Es gelten die folgenden Aussagen:

1. $\Pi_{T\setminus\{t_1,t_2\}}(L_\Sigma(M_0)) = \Pi_{T\setminus\{t_1,t_2\}}(L_{\Sigma_r}(M_0^r))$ *und*
2. $\Sigma \models \varphi \iff \Sigma_r \models \varphi$.

⌟

Kapitel 6

Klassifikation der Reduktionstechniken

In diesem Kapitel stellen wir die in den Kapiteln 3, 4 und 5 vorgestellten Reduktionstechniken einander gegenüber. Zunächst klassifizieren wir die Regeln hinsichtlich der verwendeten Techniken. Anschließend erläutern wir die Beziehungen der Reduktionstechniken untereinander. Wir betrachten, welche Reduktionstechnik ein Spezialfall einer anderen Reduktionstechnik ist. Abschließend betrachten wir die Eigenschaften, die durch die jeweiligen Reduktionstechniken bewahrt werden. Hierbei betrachten wir gesondert die Auswirkungen der Reduktionstechniken auf den Erreichbarkeitsgraphen. Wir präsentieren weiterhin einen Regelkatalog, der beschreibt, welche Eigenschaften die Reduktionstechniken für welche Netzklassen bewahren.

6.1 Techniken

Wir klassifizieren die Reduktionstechniken hinsichtlich der verwendeten Methoden. Wir benennen vier Methoden und ordnen die Reduktionstechniken den entsprechenden Methoden zu. Viele Reduktionstechniken analysieren die lokalen Gegebenheiten eines Platzes. Passt dieser Platz und seine direkte Umgebung in ein bestimmtes Muster, dann wird der Platz und gegebenenfalls Transitionen aus dessen Vor- oder Nachbereich entfernt. Diese Reduktionstechniken bezeichnen wir als *muster-basierte lokale Regeln*.

Eine weitere Methode sucht ebenfalls nach Mustern. Diese Muster sind Teilnetze, wobei die Teilnetze bestimmte Eigenschaften erfüllen. Wir bezeichnen diese Reduktionstechnik als *eigenschafts-basierte lokale Regeln*.

Ein Problem bei lokalen Regeln besteht darin, dass zum Beispiel für die Charakterisierung impliziter Plätze keine allgemeinen Muster definiert werden können. Hierfür können jedoch algebraische Methoden herangezogen werden. So werden Bedingungen für Plätze geprüft, indem mit Hilfe der Invarianten bzw. Subinvarianten eines Netzsystems lineare Optimierungsprobleme formuliert werden. Da (Sub)Invarianten durch (Un)Gleichungssystem mit Hilfe der Inzidenzmatrix bestimmt werden, untersucht diese Methode die globalen Gegebenheiten eines Netzsystems. Wir bezeichnen diese Reduktionstechniken daher als *globale Regeln*.

Eine weitere Vorgehensweise ergibt sich aus der Kombination der vorhergehenden Vorgehensweisen. Sie analysiert lokale Gegebenheiten und nutzt lineare Optimierungsaufgaben. Sie vereinigt die Analyse lokaler und globaler Gegebenheiten. Wir benennen die vier Vorgehensweisen:

- lokale Regeln (muster-basiert),
- globale Regeln (lineare Optimierungsprobleme),
- Analyse globaler und lokaler Gegebenheiten,
- lokale Regeln (eigenschafts-basiert).

Muster-basierte lokale Regeln sind effizient anwendbar, da für jeden Platz analysiert wird, ob der Platz und der Vor- und Nachbereich bestimmte Bedingungen erfüllt. Die Reduktionstechniken, die auf dem Lösen linearer Optimierungsaufgaben basieren, sind hingegen zeitaufwändiger [HPP04]. Das Nutzen der algebraischen Methoden erweitert den Anwendungsbereich vieler Reduktionstechniken gegenüber lokalen Regeln [HPP04]. Das Bestimmen von Teilnetzen, die bestimmte Eigenschaften erfüllen, ist die zeitaufwändigste Methode. Im Folgenden klassifizieren wir alle Reduktionstechniken hinsichtlich der verwendeten Methoden, die die zu entfernenden Plätze bzw. Transitionen bestimmen:

Lokale Regeln:

- Vereinigung paralleler redundanter Plätze oder Transitionen (Φ_{S2}, Φ_{P1} und Φ_{S5}),
- Entfernen eines gemeinsamen Platzes (Φ_{S3}),
- Esparzas Abstraktionsregel (Φ_{ES3}),
- Esparzas Pre-Agglomeration (Φ_{ES4}),
- Berthelots Post-Agglomeration (Φ_{ES5}),
- Entfernen toter markierter Plätze (Φ_{S4}),
- Vereinigung serieller Plätze oder Transitionen (Φ_{SM2} und Φ_{S1}),

Lineare Optimierungstechniken:

- Entfernen impliziter Plätze (Φ_{ES2}),
- Entfernen toter Transitionen (Φ_{ES1}),

Analyse lokaler und globaler Gegebenheiten:

- Pre-Agglomerationsregeln nach Haddad (Φ_{HPP1} bis Φ_{HPP6}),
- Post-Agglomerationsregeln nach Haddad (Φ_{HPP7} bis Φ_{HPP11}),

Bestimmug von Teilnetzen:

- Ersetzen von k-well-behaved Blöcken (Φ_{SM1}),
- Ersetzen von well-formed Blöcken (Φ_{V1}),
- Ersetzen von D-Blöcken (Φ_{V2} bis Φ_{V5}).

6.2 Beziehungen

Im Folgenden erläutern wir, welche Regeln andere Regeln verallgemeinern und unter welche Voraussetzungen diese Verallgemeinerungen gültig sind. Abschließend präsentieren wir eine hierarchische Anordnung der Regeln in Form eines Diagramms. In diese Hierarchie ordnen wir weitere Regeln ein, die van der Werf in [vdW06] betrachtet und die nicht Gegenstand dieser Arbeit sind.

- Die Regel Φ_{ES2} zur Entfernung impliziter Plätze verallgemeinert die Regel Φ_{S3} zum Entfernen eines gemeinsamen Platzes und die modifizierte Regel Φ_{P1} zur Vereinigung paralleler redundanter Plätze. Die Regel Φ_{P1} verallgemeinert wiederum die Regel Φ_{S2} zur Vereinigung paralleler redundanter Plätze, da die strukturellen Bedingungen für das Anwenden der Regel Φ_{P1} schwächer sind. Die Regel Φ_{P1} ist ein Spezialfall der Regel Φ_{ES2}.

- Haddads und Pradat-Peyres Pre-Agglomerationsregel Φ_{HPP6} ist ein Spezialfall der Pre-Agglomerationsregeln Φ_{HPP1} bis Φ_{HPP5}, da für das Anwenden der Regel Φ_{HPP6} alle strukturellen Bedingungen der Regeln Φ_{HPP1} bis Φ_{HPP5} erfüllt sein müssen. Falls das ursprüngliche Netzsystem lebendig und sicher ist, verallgemeinern die Regeln Φ_{HPP1} und Φ_{HPP5} Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration Φ_{ES4} bzw. deren Abstraktionsregel Φ_{ES3}. Haddads und Pradat-Peyres Post-Agglomerationsregel Φ_{HPP11} verallgemeinert weiterhin Berthelots Post-Agglomeration Φ_{ES5}, da die strukturellen Bedingungen für das Anwenden der Regel Φ_{ES5} strenger sind.

- Suzukis und Muratas Regel Φ_{SM1} zur Ersetzung eines k-WB-Blocks verallgemeinert Valettes Regel Φ_{V1} zur Ersetzung eines well-formed Blocks, da ein well-formed Block stärkere Bedingungen erfüllen muss als ein 1-WB Block. Die Regel Φ_{V1} verallgemeinert wiederum das Ersetzen von D-Blöcken (Φ_{V2}, Φ_{V3}, Φ_{V4}, Φ_{V5}), weil D-Blöcke spezielle well-formed Blöcke darstellen.

- Valettes Sequenz-Block-Reduktion (Φ_{V2}) ist ein Spezialfall der Regel Φ_{ES3}. Des Weiteren ist Φ_{V2} ein Spezialfall der Regel Φ_{ES4} und ein Spezialfall der Regel Φ_{S1} zur Vereinigung serieller Transitionen von Murata. Die Vereinigung serieller Transitionen wiederum ist ein Spezialfall der Regel Φ_{ES5}.

In [vdW06] betrachtet van der Werf Regeln für bestimmte Netzklassen. Unter anderem betrachtet er Regeln für Workflow und für *Free Choice Netze* [Sta90, S. 152]. Die Ergebnisse aus [vdW06] verwenden wir für unsere Regelhierarchie. Zunächst benennen wir die zusätzlichen Regeln, die von uns in dieser Arbeit nicht betrachtet werden. Wir kennzeichnen diese Regeln durch den Bezeichner φ anstatt des in dieser Arbeit verwendeten Bezeichners Φ. Es folgen drei Regeln für Free Choice Netze:

- Die Regel φ_S repräsentiert das Entfernen linear abhängiger Plätze [DE95, S. 142]. Van der Werf beweist in [vdW06, S. 33], dass das Anwenden von φ_S auf Free Choice Netze eine Verallgemeinerung der Regel Φ_{S2} ist.

- Die Regel φ_T repräsentiert das Entfernen linear abhängiger Transitionen [DE95, S. 141]. Van der Werf beweist in [vdW06, S. 37], dass das Anwenden von φ_T auf Free Choice Netze eine Verallgemeinerung der Regel Φ_{S5} ist.

- Die Regel φ_A repräsentiert die Abstraktionsregel von Desel und Esparza [DE95, S. 137]. Die Regeln Φ_{SM2} und Φ_{S1} sind Spezialfälle der Regel φ_A (vgl. hierzu [vdW06, S. 32]). Die Regel φ_A ist ein Spezialfall der Regel Φ_{S1} [vdW06, S. 39].

In Abbildung 6.1 ist eine Hierarchie unserer Regeln abgebildet. Wir ordnen weiterhin die zusätzlichen Regeln van der Werfs in diese Hierarchie ein. Jeder Kreis repräsentiert eine Reduktionstechnik und hat einen entsprechenden Bezeichner. Jeder Pfeil von einer Regel A zu einer Regel B repräsentiert eine Assoziation der Form: *A ist ein Spezialfall von B*. Ein Attribut einer Assoziation beschreibt, für welche Netzklasse die Generalisierung gilt. Es existieren die Attribute *sl* und *FC*, wobei das Attribut *sl* beschreibt: eine Regel ist ein Spezialfall einer weiteren Regel für sichere, lebendige Netzsysteme. Die Spezialisierung gilt für Free Choice Netze, falls das Attribut *FC* verwendet wird. Ist kein Attribut angegeben, gilt die Spezialisierung allgemein für alle Klassen von P/T-Netzen.

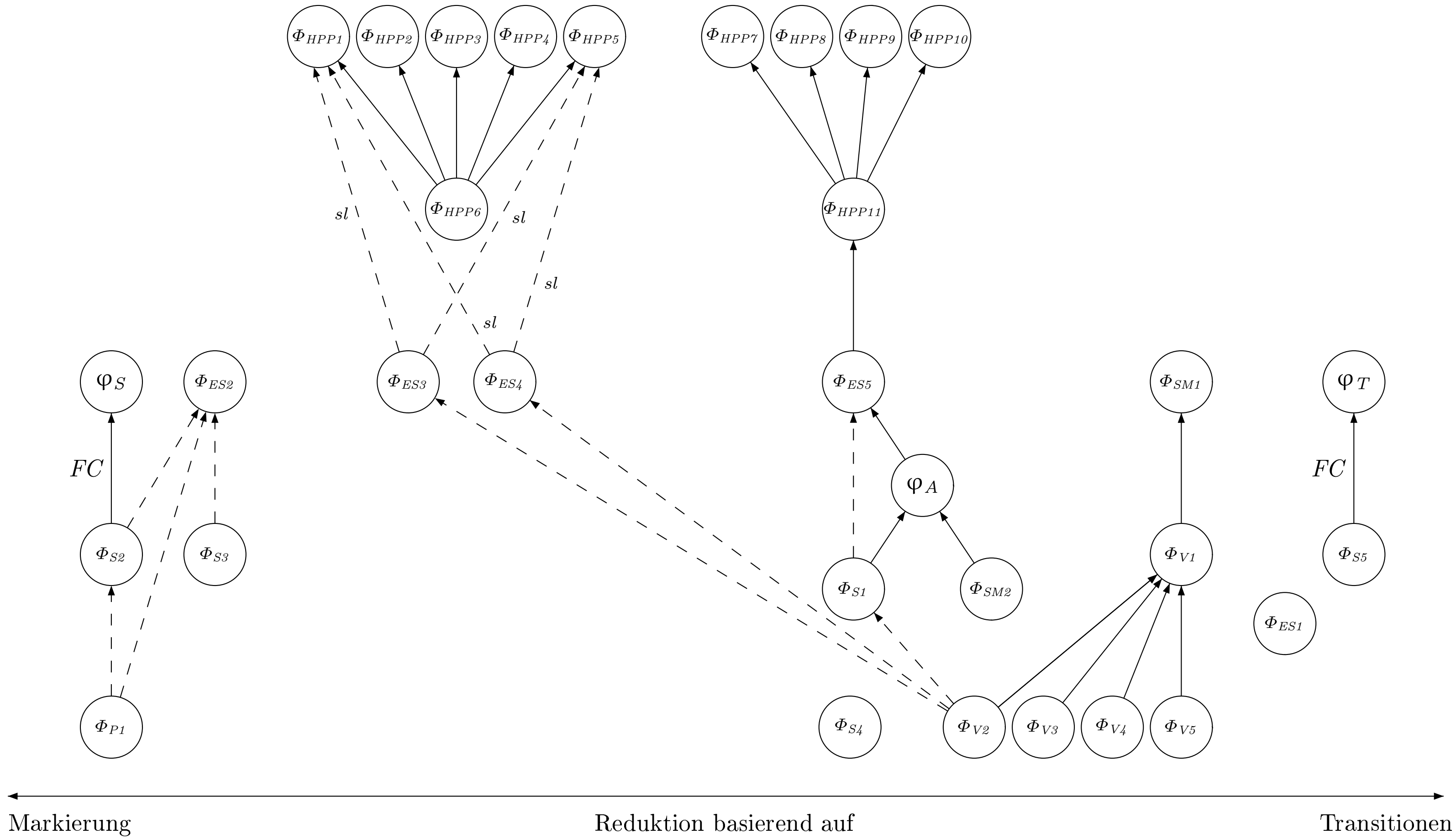
6.3 Eigenschaften

Nachdem wir alle Reduktionstechniken hinsichtlich der verwendeten Methoden klassifiziert und die Beziehungen der Regeln untereinander bestimmt haben, betrachten wir die Reduktionstechniken hinsichtlich der Eigenschaften, die sie bewahren. Wir betrachten zunächst die Auswirkungen auf den Erreichbarkeitsgraphen eines Netzsystems. Anschließend betrachten wir die Bewahrung der Lebendigkeit, Beschränktheit und von LTL-Eigenschaften durch das Anwenden der Reduktionstechniken. Abschließend erstellen wir eine Übersicht der bewahrten Eigenschaften für die jeweiligen Reduktionstechniken.

6.3.1 Effekte auf den Erreichbarkeitsgraph

Viele Probleme der Analyse von Netzsystemen betreffen den Erreichbarkeitsgraphen des Netzsystems. Wir fassen daher in diesem Kapitel die Auswirkungen der Reduktionstechniken auf den Erreichbarkeitsgraphen zusammen. Das Anwenden der einzelnen Reduktionstechniken hat unterschiedliche Auswirkungen auf den Erreichbarkeitsgraphen eines Netzsystems: Zum Einen können der Erreichbarkeitsgraph eines gegebenen Netzsystems und der Erreichbarkeitsgraph des entsprechend reduzierten Netzsystems isomorph sein. Zum Anderen wird die Menge der erreichbaren Markierungen durch das Entfernen von Plätzen und Transitionen reduziert, wobei die Erreichbarkeitsgraphen dann nicht isomorph sind.

Zunächst benennen wir die Reduktionstechniken, deren Anwenden auf ein Netzsystem Σ in ein Netzsystem Σ' mit einem isomorphen Zustandsraum resultieren. Damit die Erreichbarkeitsgraphen eines urspünglichen und eines reduzierten Netzsystems isomorph sind, dürfen keine Kanten aus dem Erreichbarkeitsgraphen des ursprünglichen Netzsystems entfernt werden. Da eine Kante im Erreichbarkeitsgraphen das Schalten einer Transition repräsentiert, sind die Erreichbarkeitsgraphen im Allgemeinen nur isomorph, falls die entsprechende Reduktionstechnik nur Plätze oder tote Transitionen aus einem Netzsystem



sl . . . ist ein Spezialfall für sichere, lebendige Netzsysteme
FC . . . ist ein Spezialfall für Free Choice Netzsysteme

$\longrightarrow$ . . . aus der Literatur bekannte Beziehung
$- \, - \!\!\rightarrow$ . . . von uns gezeigte Beziehung

Abbildung 6.1: Beziehungen aller Regeln zueinander entfernt. Das Entfernen eines Platzes hat die folgende Wirkung: Der Erreichbarkeitsgraph eines reduzierten Netzsystems repräsentiert die Projektion einer Markierung auf die Platzmenge des reduzierten Netzsystems. Die folgenden Reduktionstechniken haben die Isomorphie der Erreichbarkeitsgraphen des ursprünglichen und des reduzierten Netzsystems zur Folge:

- Entfernen impliziter Plätze (Φ_{ES2}),
- Entfernen eines gemeinsamen Platzes (Φ_{S3}),
- Vereinigung paralleler redundanter Plätze: Φ_{S2} und Φ_{P1},
- Vereinigung paralleler redundanter Transitionen Φ_{S5},
- Entfernen toter Transitionen (Φ_{ES1}).

Im Folgenden betrachten wir Reduktionstechniken, deren Anwenden auf ein Netzsystem Σ nicht in einem Netzsystem Σ' mit isomorphem Zustandsraum resultieren. Die Pre- und Post-Agglomerationsregeln von Haddad und Pradat-Peyre (Φ_{HPP1} bis Φ_{HPP11}) entfernen zum Einen zwei Mengen U und V von Transitionen und Plätze aus einem Netzsystem. Zum Anderen werden dem Netzsystem eine Menge von Transitionen hinzugefügt. Das Kreuzprodukt der beiden entfernten Transitionsmengen U und V bestimmt die Menge der hinzugefügten Transitionen. Ist eine der Mengen U und V einelementig, wird die Anzahl der Kanten im Erreichbarkeitsgraphen reduziert. Enthalten jedoch beide Mengen mehr als zwei Elemente, werden dem Erreichbarkeitsgraphen sogar Kanten hinzugefügt. Die neuen Transitionen führen jedoch zu Markierungen, die bereits in der Menge der erreichbaren Markierungen des ursprünglichen Netzsystems enthalten sind. Daher führen die neu hinzugefügten Kanten zu bereits vorhandenen Knoten im Erreichbarkeitsgraphen. Das Entfernen des Platzes reduziert die Menge der erreichbaren Markierungen und somit die Knotenzahl des Erreichbarkeitsgraphen des reduzierten Netzsystems. Wir stellen fest, die Pre- und Post-Agglomeration nach Haddad und Pradat-Peyre führt im Allgemeinen zur Reduktion der Knotenzahl des Erreichbarkeitsgraphen. Diese Betrachtungen gelten im selben Maß für die Post-Agglomeration nach Berthelot (Φ_{ES5}).

Esparzas und Schröters Abstraktionsregel (Φ_{ES3}) sowie deren Pre-Agglomeration (Φ_{ES4}) entfernen eine Transition und einen Platz aus einem gegebenen Netzsystem. Der Erreichbarkeitsgraph des reduzierten Netzsystems entsteht aus dem Erreichbarkeitsgraphen des ursprünglichem Netzsystems durch das Entfernen einer Kante und eines Knoten, da die Menge der erreichbaren Markierungen durch das Entfernen des Platzes reduziert wird. Dasselbe gilt für das Entfernen toter markierter Plätze (Φ_{S5}) sowie für Muratas Vereinigung serieller Plätze und Transitionen (Φ_{S1} und Φ_{SM2}).

Die Blockreduktionsregeln (Φ_{MS1}, Φ_{V1} bis Φ_{V5}) entfernen ganze Teilnetze aus einem gegebenen Netzsystem. Das kann die Menge der erreichbaren Markierungen und der Transitionen substantiell reduzieren. Es werden demnach im Allgemeinen Knoten und Kanten aus dem Erreichbarkeitsgraphen des Netzsystems entfernt.

6.3.2 Lebendigkeit, Beschränktheit und LTL

In diesem Abschnitt betrachten wir die Reduktionstechniken hinsichtlich der bewahrten Eigenschaften. Wir betrachten hierbei die folgenden Eigenschaften: Lebendigkeit, Beschränktheit und LTL-Eigenschaften. Wir unterscheiden im Folgenden die beiden Transformationsrichtungen: Verfeinerung ($\Sigma \to \Sigma_r$) und Abstraktion ($\Sigma \to \Sigma_r$), wobei Σ ein Netzsystem ist und Σ_r das durch Anwenden einer Reduktionstechnik gewonnene, reduzierte Netzsystem ist.

Wir vergleichen zunächst die bewahrten Eigenschaften der Reduktionstechniken, die nur Plätze aus einem Netzsystem entfernen. Wir vergleichen diese Reduktionstechniken, da sie alle auf die Regel Φ_{ES2} zurückzuführen sind. Die Regeln Φ_{S2}, Φ_{P1} und Φ_{S3} bewahren alle betrachteten Eigenschaften in Richtung der Abstraktion und in Richtung der Verfeinerung. Der Anwendungsbereich der Regel Φ_{ES2} ist zwar größer als bei diesen Regeln, sie bewahrt jedoch nicht alle Eigenschaften. Das Anwenden von Φ_{ES2} bewahrt die Beschränktheit nicht in Richtung der Verfeinerung im Gegensatz zu den anderen Regeln.

Ein ähnliches Bild ergibt sich für die Pre- und Post-Agglomerationsregeln nach Haddad und Pradat-Peyre. Die hinsichtlich der Anwendbarkeit allgemeineren Regeln, Φ_{HPP1} bis Φ_{HPP5} und Φ_{HPP7} bis Φ_{HPP10}, bewahren ganz spezielle Eigenschaften, während die in der Anwendung spezialisierten Regeln, Φ_{HPP6} und Φ_{HPP11}, alle Eigenschaften in beide Transformationsrichtungen bewahren. Die Abstraktion und Pre-Agglomeration von Esparza und Schröter bewahren beide die Lebendigkeit und die Beschränktheit in Richtung der Abstraktion, falls das ursprüngliche Netzsystem sicher und lebendig ist. Nur der Anwendungsbereich unterscheidet diese beiden Regeln. Der wesentliche Unterschied zwischen der Regel Φ_{ES1} und Φ_{S5} besteht darin, dass die Regel Φ_{ES1} die Lebendigkeit nicht in Richtung der Verfeinerung bewahrt im Gegensatz zu Regel Φ_{S5}.

Im Folgenden vergleichen wir die Blockreduktionen. Hier gilt ebenfalls, um so allgemeiner der Anwendungsbereich der Reduktionstechniken ist, um so weniger Eigenschaften bewahrt das Anwenden der entsprechenden Reduktionstechnik. So bewahrt die Regel Φ_{SM1} die Lebendigkeit nicht in Richtung der Verfeinerung im Gegensatz zu Φ_{V1} und den D-Blockreduktionen.

6.3.3 Regelkatalog

Abschließend präsentieren wir eine Übersicht aller 29 Regeln und der bewahrten Eigenschaften. Tabelle 6.1 illustriert, welche Eigenschaften durch das Anwenden einer Regel bewahrt wird. Ein Punkt bedeutet, die Regel bewahrt die entsprechende Eigenschaft für alle Klassen von P/T-Netzen. Das Symbol s verwenden wir, falls eine Regel eine Eigenschaft nur für sichere Netzsystem bewahrt. Bewahrt eine Regel eine Eigenschaft nur, wenn das ursprüngliche Netzsystem sicher und lebendig ist, dann kennzeichnen wir das durch das Symbol sl. Das Symbol $\bullet_{\max}$ bedeutet, die entsprechende Eigenschaft gilt nur für Schaltfolgen, die zu einem Deadlock führen. Das Symbol $\bullet_{\infty}$ hingegen besagt, die Eigenschaft wird durch die entsprechende Regel nur für ω-Schaltfolgen bewahrt.

bewahrtes Verhalten

	Σ		Σ_r	Φ_{ES2}	Φ_{S2}	Φ_{P1}	Φ_{S3}	Φ_{HPP1}	Φ_{HPP2}	Φ_{HPP3}	Φ_{HPP4}	Φ_{HPP5}	Φ_{HPP6}	Φ_{HPP7}	Φ_{HPP8}	Φ_{HPP9}	Φ_{HPP10}	Φ_{HPP11}	Φ_{ES4}	Φ_{ES5}	Φ_{ES3}	Φ_{S1}	Φ_{S4}	Φ_{SM1}	Φ_{V1}	D-Block	Φ_{SM2}	Φ_{ES1}	Φ_{S5}
	lebendig	$\Longrightarrow$	lebendig	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	-	-	$\bullet$	$\bullet$	-	-	-	$\bullet$	s	$\bullet$	s	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
	lebendig	$\Longleftarrow$	lebendig	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	$\bullet$	-	-	-	$\bullet$	-	$\bullet$	-	-	$\bullet$	-	$\bullet$	-	$\bullet$	-	-	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	$\bullet$
	beschränkt	$\Longrightarrow$	beschränkt	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	$\bullet$	-	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
	beschränkt	$\Longleftarrow$	beschränkt	s	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	s	s	s	$\bullet$	$\bullet$	s	$\bullet$	s	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
Aktion	LTL	$\Longleftrightarrow$	LTL	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\bullet$	-
Aktion	LTL^r-$\mathcal{X}$	$\Longrightarrow$	LTL^r-$\mathcal{X}$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	-	$\bullet_\infty$	$\bullet$	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	$\bullet_\infty$	$\bullet$	sl	$\bullet$	sl	$\bullet$	-	?	?	?	?	$\bullet$	$\bullet$
Aktion	LTL^r-$\mathcal{X}$	$\Longleftarrow$	LTL^r-$\mathcal{X}$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	$\bullet_\infty$	$\bullet$	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	$\bullet_\infty$	$\bullet$	sl	$\bullet$	sl	$\bullet$	-	?	?	?	?	$\bullet$	$\bullet$
Zustand	LTL	$\Longleftrightarrow$	LTL	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\bullet$
Zustand	LTL^r-$\mathcal{X}$	$\Longrightarrow$	LTL^r-$\mathcal{X}$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	-	$\bullet_\infty$	$\bullet$	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	$\bullet_\infty$	$\bullet$	sg	$\bullet$	sg	$\bullet$	-	?	?	?	?	$\bullet$	$\bullet$
Zustand	LTL^r-$\mathcal{X}$	$\Longleftarrow$	LTL^r-$\mathcal{X}$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	$\bullet_\infty$	$\bullet$	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	$\bullet_\infty$	$\bullet$	sg	$\bullet$	sg	$\bullet$	-	?	?	?	?	$\bullet$	$\bullet$
	L	$\subseteq$	L	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\bullet$	-
	L	$\supseteq$	L	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	$\bullet$	-	-	-	-	$\bullet$	$\bullet$
	$\Pi_{T\setminus T_r}(L)$	$\subseteq$	$\Pi_{T\setminus T_r}(L)$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	-	$\bullet_\infty$	$\bullet$	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	$\bullet_\infty$	$\bullet$	sl	$\bullet$	sl	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$
	$\Pi_{T\setminus T_r}(L)$	$\supseteq$	$\Pi_{T\setminus T_r}(L)$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	-	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	$\bullet_\infty$	$\bullet$	-	-	$\bullet_{\mathrm{max}}$	$\bullet_\infty$	$\bullet$	sl	$\bullet$	sl	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$

s . . . gilt für sichere P/T-Netze

sg . . . gilt für sichere, gewöhnliche P/T-Netze

sl . . . gilt für sichere, lebendige P/T-Netze

(grau hinterlegt) . . . von uns in dieser Arbeit bewiesene Behauptungen

$\bullet_{\mathrm{max}}$ . . . gilt für Schaltfolgen, die zu einem Deadlock führen

$\bullet_\infty$ . . . gilt für ω-Schaltfolgen

Tabelle 6.1: Übersicht darüber, welche Eigenschaften von welchen Regeln für welche Netzklassen erhalten werden.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit haben wir 29 strukturelle Reduktionstechniken aus [ES01, HPP04, STMD96, SM83, Val79, PPP00] recherchiert und unter verschiedenen Aspekten analysiert sowie einander gegenübergestellt. Zunächst mussten wir die Reduktionstechniken aus den ausgewählten Arbeiten herausarbeiten, die auf Netzsysteme anwendbar sind, da beispielsweise einige der Reduktionstechniken von Shatz et al. nur auf spezielle Netzsysteme wie z. B. Ada Netze anwendbar und daher auf Netzsysteme im Allgemeinen nicht anwendbar sind. Wir haben die Reduktionstechniken hinsichtlich des Bewahrens der folgenden Eigenschaften betrachtet: Lebendigkeit, Beschränktheit, LTL-Eigenschaften und das Bewahren der Schaltfolgen. Wir haben die Beziehungen der Regeln untereinander analysiert. Mit diesen Ergebnissen war es uns möglich, die Reduktionstechniken unter den Aspekten der Anwendbarkeit, dem Einfluss auf den Erreichbarkeitsgraphen und der verwendeten Methoden zu klassifizieren.

7.1 Ergebnisse

In diesem Kapitel geben wir einen Überblick über die Ergebnisse der vorliegenden Diplomarbeit. Wir haben für die recherchierten Reduktionstechniken untersucht, inwiefern eine Reduktionstechnik eine andere Reduktionstechnik verallgemeinert, sofern in der Literatur keine Ergebnisse hierfür vorlagen. Wir haben die folgenden Abhängigkeiten gezeigt (die in Abbildung 6.1 graphisch dargestellt sind mit Hilfe gestrichelter Pfeile):

- Die Regel Φ_{S3} zum Entfernen eines gemeinsamen Platzes und die Regeln Φ_{S2} und Φ_{P1} zur Vereinigung paralleler redundanter Plätze sind Spezialfälle der Regel Φ_{ES2} zum Entfernen impliziter Plätze.
- Die Regeln Φ_{ES3} zu Esparzas und Schröters Abstraktion und die Regel Φ_{ES4} zu Esparzas und Schröters Pre-Agglomeration sind Spezialfälle der Regel Φ_{HPP1} und Φ_{HPP5} zu Haddads und Pradat-Peyres Pre-Agglomeration, falls das ursprüngliche Netz sicher und lebendig ist.
- Die Regeln Φ_{ES4}, Φ_{ES5} und die Regel Φ_{V2} zur Vereinigung serieller Transitionen verallgemeinern die Regel Φ_{V2} zur Ersetzung eines Sequenz-Blocks. Weiterhin haben wir bewiesen, dass die Regel Φ_{V2} ein Spezialfall der Regel Φ_{ES5} ist.

Wir haben in der vorliegenden Arbeit für die einzelnen Reduktionstechniken überprüft, inwiefern diese Reduktionstechniken die Lebendigkeit, Beschränktheit, LTL-Eigenschaften bzw. die Schaltfolgen eines Netzsystems bewahren. Hierbei haben wir unterschieden, in welche Transformationsrichtung die Eigenschaften bewahrt werden. Sei Σ ein Netzsystem und Σ_r ein reduziertes Netzsystem. Wir bezeichnen die Transformation $\Sigma \rightarrow \Sigma_r$ als Abstraktion und deren Umkehrung $\Sigma_r \rightarrow \Sigma$ als Verfeinerung. Wir konnten die folgenden Ergebnisse zeigen:

- Die Regel Φ_{ES2} bewahrt die Lebendigkeit und die Beschränktheit eines Netzsystems in Richtung der Verfeinerung und in Richtung der Abstraktion. Wir konnten weiterhin zeigen, dass das Anwenden dieser Regel aktionsbasierte LTL-Eigenschaften eines Netzsystems bewahrt.

- Die Regeln Φ_{HPP1} bis Φ_{HPP6}, Φ_{HPP10} sowie Φ_{HPP11} bezüglich der Pre- und Post-Agglomeration nach Haddad und Pradat-Peyre bewahren die Beschränktheit eines Netzsystems in Richtung der Verfeinerung und in Richtung der Abstraktion. Für die verbleibenden Regeln der Post-Agglomeration nach Haddad haben wir gezeigt, dass das Anwenden die Beschränktheit in Richtung der Abstraktion bewahrt. Wir haben Gegenbeispiele angegeben, die belegen, dass die Umkehrung nicht gilt.

- Die Regeln Φ_{ES3} und Φ_{ES4} bewahren die Lebendigkeit eines sicheren Netzsystems in Richtung der Abstraktion. Für die folgenden Fälle haben wir Gegenbeispiele angegeben: Zum einen wird die Lebendigkeit nicht im Allgemeinen für Netzsysteme bewahrt. Zum anderen bewahrt das Anwenden dieser Regeln im Allgemeinen für keine Netzsystemklassen Deadlocks.

- Das Anwenden der Regel Φ_{S4} zum Entfernen toter markierter Plätze bewahrt die Beschränktheit eines Netzsystems in Richtung der Verfeinerung und der Abstraktion. Wir haben weiterhin gezeigt, dass das Anwenden dieser Regel im Allgemeinen keine LTL-Eigenschaften bewahrt.

- Die Regel Φ_{ES1} zum Entfernen toter Transitionen bewahrt im Allgemeinen die Beschränktheit und LTL-Eigenschaften eines Netzsystems in Richtung der Abstraktion sowie in Richtung der Verfeinerung.

- Die Regel Φ_{S5} zur Vereinigung paralleler redundanter Transitionen bewahrt LTL-Eigenschaften in Richtung der Verfeinerung sowie in Richtung der Abstraktion.

- Für die folgenden Regeln haben wir gezeigt, dass die Menge der Schaltfolgen oder zumindest die Projektion aller Schaltfolgen auf eine bestimmte Menge von Transitionen bewahrt wird: Φ_{ES1}, Φ_{ES2}, Φ_{ES3}, Φ_{ES4}, Φ_{S4}, Φ_{S5} und Φ_{SM1}.

Mit Hilfe der von uns bewiesenen und der bereits bekannten Beziehungen der Regeln untereinander konnten wir das Bewahren bestimmter Eigenschaften auf weitere Regeln übertragen. Alle Ergebnisse, die wir in der vorliegenden Arbeit zeigen konnten, sind in Tabelle 6.1 grau gekennzeichnet.

7.2 Weitere Arbeit

Ein weiterer Bestandteil dieser Diplomarbeit war die Integration ausgewählter Regeln in das Petrinetzwerkzeug *BPEL2oWFN* [BPE07, LMSW06]. Diese Anwendung übersetzt einen *BPEL Prozess* (*Business Process Execution Language for Web Services*) [AAA+06] in ein *offene Workflow Netze* (oWFN) [MRS05]. Wir haben folgende Regeln implementiert: Φ_{ES2}, Φ_{ES3}, Φ_{ES4} und Φ_{ES5}.

Die Bewahrung von LTL-Eigenschaften durch die Blockreduktionen ist noch offen. Des weiteren exitieren eine Vielzahl weiterer Arbeiten in der Literatur, die strukturelle Reduktionstechniken betrachten. In zukünftigen Arbeiten können weitere Reduktionstechniken betrachtet werden, um diese dann in den bestehenden Regelkatalog und die Regelhierarchie einzuordnen.

Literaturverzeichnis

[AAA+06] A. Alves, A. Arkin, S. Askary, B. Bloch, F. Curbera, Y. Goland, N. Kartha, Sterling, D. König, V. Mehta, S. Thatte, D. van der Rijn, P. Yendluri, and A. Yiu. Web Services Business Process Execution Language Version 2.0. OASIS Committee Draft, May 2006.

[Ber86] G. Berthelot. Checking properties of nets using transformation. In *Advances in Petri Nets 1985, covers the 6th European Workshop on Applications and Theory in Petri Nets-selected papers*, pages 19–40, London, UK, 1986. Springer-Verlag.

[BGV91] W. Brauer, R. Gold, and W. Vogler. A survey of behaviour and eqivalence preserving refinements of Petri nets. In *APN 90: Proceedings on Advances in Petri nets 1990*, pages 1–46, New York, NY, USA, 1991. Springer-Verlag New York, Inc.

[BPE07] Petrinetzwerkzeug BPEL2oWFN. GNU Software und Teil des Tools4BPEL Projekts. http://www.gnu.org/software/bpel2owfn/, 2007. Implementiert von N. Lohmann, C. Gierds und M. Znamirowski.

[CS91] J. M. Colom and M. Silva. Improving the Linearly Based Characterization of P/T Nets. In G. Rozenberg, editor, *Advances in Petri Nets 1990*, volume 483, pages 113–145. Springer, 1991.

[DE95] J. Desel and J. Esparza. *Free Choice Petri nets.* Cambridge University Press, 1995.

[DJ01] J. Desel and G. Juhás. What is a Petri Net? In *Unifying Petri Nets, Advances in Petri Nets*, pages 1–25, London, UK, 2001. Springer-Verlag.

[EH00] J. Esparza and K. Heljanko. A new unfolding approach to ltl model checking. In *ICALP '00: Proceedings of the 27th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, pages 475–486, London, UK, 2000. Springer-Verlag.

[ES01] J. Esparza and C. Schröter. Net Reductions for LTL Model-Checking. *Lecture Notes in Computer Science*, 2144:310–324, 2001.

[HPP04] S. Haddad and J.-F. Pradat-Peyre. Efficient Reductions for LTL Formulae Verification. Technical Report 634, CEDRIC, 2004.

[LMSW06] N. Lohmann, P. Massuthe, C. Stahl, and D. Weinberg. Analyzing Interacting BPEL Processes. In S. Dustdar, J. L. Fiadeiro, and A. P. Sheth, editors, *Business Process Management*, volume 4102 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 17–32. Springer, 2006.

[MRS05] P. Massuthe, W. Reisig, and K. Schmidt. An Operating Guideline Approach to SOA. *Annals of Mathematics, Computing & Teleinformatics*, 1(3):35–43, 2005.

[Mur89] T. Murata. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications. In *Proceedings of the IEEE*, pages 541–580, April 1989. NewsletterInfo: 33Published as Proceedings of the IEEE, volume 77, number 4.

[Pnu77] A. Pnueli. The Temporal Logic of Programs. In *FOCS*, pages 46–57. IEEE, 1977.

[PPP00] D. Poitrenaud and J.-F. Pradat-Peyre. Pre- and Post-agglomerations for LTL Model Checking. In *ICATPN*, pages 387–408, 2000.

[Rei82] W. Reisig. *Petrinetze, Eine Einführung*. Springer, 1982. Mit Übersetzungen ins Chinesische, Englische, Italienische, Japanische und Polnische.

[Röm00] Stefan Römer. *Theorie und Praxis der Netzentfaltung als Grundlage für die Verifikation nebenläufiger Systeme*. PhD thesis, TU München, Februar 2000.

[SC88] S. M. Shatz and W. K. Cheng. A petri net framework for automated analysis of ada tasking behavior. *J. Syst. Softw.*, 8(5):343–359, 1988.

[Sch06] C. Schröter. *Halbordnungs- und Reduktionstechniken für die automatische Verifikation von verteilten Systemen*. PhD thesis, Universität Stuttgart, 2006.

[SM83] I. Suzuki and T. Murata. A method for stepwise refinement and abstraction of petri nets. *J. Comput. Syst. Sci.*, 27(1):51–76, 1983.

[Sta90] P. H. Starke. *Analyse von Petri-Netz-Modellen*. Teubner, Stuttgart, 1990.

[STMD96] S. M. Shatz, S. Tu, T. Murata, and S. Duri. An Application of Petri Net Reduction for Ada Tasking Deadlock Analysis. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 7(12):1307–1322, 1996.

[Val79] R. Valette. Analysis of Petri Nets by Stepwise Refinements. *J. Comput. Syst. Sci.*, 18(1):35–46, 1979.

[vdA97] W. M. P. van der Aalst. Verification of Workflow Nets. In P. Azéma and G. Balbo, editors, *ICATPN*, volume 1248 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 407–426. Springer, 1997.

[vdW06] J. M. E. M. van der Werf. Analysis of well-formedness and soundness by reduction techniques and their implementation. Master's thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2006.

Erklärungen

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit „Gegenüberstellung struktureller Reduktionstechniken für Petrinetze“ selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst zu haben und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Hiermit erkläre ich mein Einverständnis, dass die vorliegende Diplomarbeit „Gegenüberstellung struktureller Reduktionstechniken für Petrinetze“ in der Bibliothek des Instituts für Informatik der Humboldt-Universität zu Berlin ausgestellt werden darf.

Berlin, den 31.03.2008