Mein erster Beweis

Karsten Schmidt

27. Oktober 2000

Zusammenfassung

Nun habe ich also irgendeine Aussage vorliegen und habe die Aufgabe, sie zu beweisen. Ich weiß überhaupt nicht, was ein Beweis ist und wie ich zu einem komme. Die folgende Anleitung wird mir helfen. Ich werde lernen, daß ein Beweis eine Mischung aus Kreativität und solidem Handwerk ist.

1 Was ist ein Beweis?

Ein Beweis ist eine vollständige und folgerichtige Argumentation über die Korrektheit einer Aussage. Eine Aussage enthält üblicherweise Voraussetzungen und Behauptungen. Die Argumentation muß nun die Gültigkeit der Behauptungen in all den Situationen nachweisen, in denen die Voraussetzung gilt.

Die *Vollständigkeit* einer Argumentation verlangt, daß die Argumentation *jeden* möglichen Einzelfall überdeckt. Ist eine Aussage für alle natürlichen Zahlen zu zeigen, reicht es also *nicht*, die Richtigkeit der Aussage für 0, 1, 2, 5 und 17 zu demonstrieren. Die Argumente müssen *jede beliebige* natürliche Zahl erfassen.

Die *Folgerichtigkeit* verlangt, daß jedes einzelne Argument in der Argumentationskette als korrekt abgesichert ist und auch von einem nicht wohlgesonnenen Leser akzeptiert werden *muß*. Wie man solche Argumentationen aufbaut, wollen wir uns nun in Ruhe und Schritt für Schritt anschauen.

2 Was ist Voraussetzung, was ist Behauptung?

Um dies festzustellen, mußt Du Dich in den mathematischen Jargon eingewöhnen. Dieser Jargon ist voll von Formulierungen mit genau festgelegter Bedeutung, die bei jedem ausgebildeten Mathematiker und Informatiker in genau der Weise verwendet und verstanden werden, wie Du es nun lernen sollst[1] . Wenn Du diese Formulierungen in einer Aussage erkennst, kannst Du auf ganz mechanische

[1]Ich rede hier nur vom beruflichen Umfeld. Es gibt natürlich Leute, die Fachjargon auch bei Freunden und in der Kneipe verwenden und es manchmal nicht mal merken. Die sind mir in der Regel auch nicht so sonderlich sympathisch...

Weise Voraussetzung und Behauptung extrahieren. Die folgende Liste gibt Dir die häufigsten und wichtigsten Formulierungen.

Wenn A, so (dann) B

Das ist einfach.

A wird zur Voraussetzung, B wird zur Behauptung.

Wenn Du den Grund wissen willst, dann lies jetzt weiter, ansonsten springe zur nächsten Formulierung.

Die Vorgehensweise liegt darin begründet, daß man in Mathematik und Informatik die Verbindung „wenn ..., dann ...“ in einer vom Alltagsgebrauch abweichenden Bedeutung verwendet. Und zwar wird der Wahrheitswert der Gesamtaussage nur von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen (A, B) abhängig gemacht, egal, ob die beiden Aussagen inhaltlich irgendetwas miteinander zu tun haben. Der Wahrheitswert von „Wenn die S-Bahn in Berlin grün ist, dann heiße ich Otto“ bestimmt sich also nur aus der Farbe der S-Bahn und meinem Namen, egal, ob meine Namensgebung ursächlich mit der S-Bahn-Farbe zusammenhängt. In meinem konkreten Fall ist die Gesamtaussage wahr, wie wir uns gleich überlegen.

Wie bestimmt sich nun der Gesamtwahrheitswert? Zu diesem Zweck schauen wir uns eine aus der Schule bekannte Aussage an. Du wirst sicher zustimmen, daß für beliebige natürliche Zahlen a, b, c die Aussage „Wenn $a = b$, dann ist $a \cdot c = b \cdot c$“ stimmt. Also muß die Aussage auch stimmen, wenn $a = 4$, $b = 4$ und $c = 3$ ist. In diesem Fall ist die linke Teilaussage $(4 = 4)$ wahr und die rechte Teilaussage $(12 = 12)$ ebenfalls wahr. Deshalb soll eine wenn-dann-Verbindung immer wahr ergeben, wenn beide Teilaussagen wahr sind. Die allgemeine Aussage stimmt aber auch, wenn $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$ ist. Eine wenn-dann-Verbindung einer falschen $(2 = 3)$ mit einer falschen Aussage $(8 = 12)$ muß also auch wahr sein. Der kritische Einzelfall ist der, wo $a = 2$, $b = 3$ und $c = 0$ ist. Die allgemeine Aussage muß also selbst dann wahr werden, wenn die linke Teilaussage $(2 = 3)$ falsch, die rechte Aussage $(0 = 0)$ aber wahr wird. In der verbleibenden Konstellation (linke Teilaussage wahr, rechte Teilaussage falsch) wird die wenn-dann-Verbindung falsch.

Du mußt sehr schnell lernen, den Wahrheitswert einer Gesamtaussage (Wenn A, so B) von der Wahrheitswerten der Teilaussagen (A, B) zu unterscheiden.

Um also zu zeigen, daß eine wenn-dann-Verbindung immer richtig ist, können wir zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall ist die linke Teilaussage falsch. Da dann, wie eben erklärt, die wenn-dann-Verbindung immer richtig ist, egal, ob die rechte Teilaussage wahr oder falsch ist, braucht man zu diesem Fall nicht argumentieren. Im zweiten Fall ist die linke Teilaussage wahr. Dann muß aber auch die rechte Teilaussage wahr werden, um die Gesamtaussage wahr zu machen. Dies bedarf nun einer detaillierten Argumentation.

Das ist der Grund, warum man die linke Teilaussage als richtig *voraussetzt* (also nur diejenigen Situationen betrachten muß, wo sie tatsächlich wahr ist) und unter der Voraussetzung dann beweisen muß, daß die rechte Teilaussage (die Behauptung) auch richtig wird.

Man kann auch eine Fallunterscheidung für die rechte Teilaussage machen. Ist die nämlich wahr, so ist die Gesamtaussage wahr, egal, ob die linke Teilaussage wahr oder falsch ist; auf eine Argumentation kann verzichtet werden. Ist dagegen die rechte Teilaussage falsch, so muß man, um die Gültigkeit der Gesamtaussage zu beweisen, zeigen, daß dann auch die linke Teilaussage falsch wird. Man kann also zum Beweis der Aussage „Wenn A, so B“ alternativ zum obigen Ansatz auch so vorgehen:
Annahme: B ist falsch
Behauptung: Dann ist auch A falsch.

Dies ist das Prinzip des indirekten Beweises. Komischerweise neigen Beweisanfänger dazu, das indirekte Prinzip gegenüber dem direkten Beweisprinzip zu bevorzugen. Ich empfehle dagegen, in den allermeisten Fällen lieber einen direkten Beweis zu führen.

Es gibt zwei häufige Fehldeutungen einer wenn-dann-Aussage.

Die erste Fehldeutung verwechselt den Wahrheitswert der Gesamtaussage mit dem der rechten Teilaussage. Wird die rechte Teilaussage falsch, hält man irrtümlicherweise die Gesamtaussage für falsch. Eine falsche rechte Teilaussage kann aber eine wahre wenn-dann-Verbindung ergeben, solange nur die linke Teilaussage ebenfalls falsch ist (siehe unser Beispiel mit $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$). Mit anderen Worten: Wenn ich aus einer falschen Voraussetzung (linke Teilaussage) eine falsche Schlußfolgerung (rechte Teilaussage) ziehe, ist dewegen der Schluß an sich (wenn-dann-Verbindung) noch lange nicht falsch.

Die zweite Fehldeutung verwechselt wenn-dann mit genau-dann-wenn. Einige Leute sehen zwar ein, daß aus etwas Wahren auch nur Wahres gefolgert werden darf, glauben aber, daß aus etwas Falschem auch unbedingt etwas Falsches gefolgert werden muß. Die Möglichkeit, daß ich unter falschen Voraussetzungen trotzdem zu einem richtigen Ergebnis kommen *kann* (siehe $a = 2$, $b = 3$, $c = 0$), bereitet Kopfschmerzen. Gerade diese Tatsache macht aber den ganzen Witz der wenn-dann-Verwendung aus: *Wenn A* richtig ist, so *muß* auch B richtig werden. Wenn dagegen *A nicht* richtig ist, dann treffe ich *überhaupt keine Aussage* über die Gültigkeit von B!

A genau dann, wenn B

Diese Formulierung ist nichts weiter als eine abgekürzte Form von „Wenn A, so B “ *und* „Wenn B, so A“. Damit kann man den Beweis in zwei Teilen führen.

Teil 1: Beweise „Wenn A, so B“.

Teil 2: Beweise „Wenn B, so A“.

Ich empfehle ungeübten Beweisern, diese beiden Teile auch getrennt darzulegen. Später, wenn man ein Gefühl für die Umkehrbarkeit von Argumenten entwickelt hat, kann man manchmal beide Teile gemeinsam in einer beidseitig schlüssigen Argumentation zusammenfassen.

Für alle x gilt A

Normalerweise macht in solchen Fällen A eine Aussage über x, weswegen wir lieber schreiben sollten: *Für alle x gilt $A(x)$.*

Die Argumentation muß nun die Gültigkeit von A nachweisen, egal welchen konkreten Wert x bekommt. Deswegen setzt man an:

Voraussetzung: Sei x ein beliebig gewähltes Element. Behauptung: Für dieses Element gilt $A(x)$.

Dabei dürfen die folgenden Argumente nun keinerlei Annahmen darüber benutzen, welchen der vielen möglichen Werte x hat. Sie dürfen aber von einer einmal für die gesamte Argumentation unveränderten Wahl ausgehen. Klingt wie spitzfindiger Juristenkram. Isses auch.

Ein häufiger Fehler im Umgang mit „Für alle“ ist zu beobachten, wenn danach mehrere Variablen stehen: „Für alle x, y und z gilt ...“. Hier wird irrtümlicherweise unterstellt, daß x, y und z jeweils immer *verschiedene* Werte haben. Dem ist nicht so! Eine Aussage „Für alle natürlichen Zahlen x, y und z erfaßt neben solchen Wertzuordnungen wie $x = 3$, $y = 0$, $z = 64189723$ auch solche Wertbelegungen wie $x = 17$, $y = 17$, $z = 17$ oder $x = 3$, $y = 1864537$, $z = 3$!

Eine besonders häufige Abart der Für-alle-Aussage ist:

Für alle x aus der Menge M gilt $A(x)$

Hier empfehle ich ganz dringend, diese Formulierung zu ersetzen durch:

Für alle x gilt: Wenn $x \in M$, so gilt $A(x)$. Damit kannst Du den Beweisansatz durch Hintereinanderanwendung bereits bekannter Techniken finden. Das mag Dir zunächst überflüssig vorkommen. Hauptsache, Du erinnerst Dich an meinen Rat, wenn Du mit Aussagen der Form „Für alle x aus der *leeren Menge* gilt $A(x)$“ konfrontiert wirst. Da führt eine nicht ganz verstandene abgekürzte Denkweise oft zu Irritationen. Für die leere Menge ergeben sich nämlich manchmal vollkommen schrille und überraschende Effekte. Mit einer zerlegten Aussage wirst Du in der Lage sein, diese komischen Aussagen zu akzeptieren.

Es gibt/existiert ein x, für das $A(x)$ gilt

„Es gibt ein“ ist immer zu lesen als: „Es gibt *mindestens* ein“. Anderenfalls steht: „Es gibt *genau* ein“. Bei letzterer Formulierung muß man neben der Existenz eines x auch zeigen, daß es keine weiteren gibt.

Der Beweis der einfachen Existenzaussage geht nun oft so:

Ich nenne einen (geeignet konstruierten) konkreten Wert x_0 für x. Behauptung: A gilt für x_0.

Spannend wird es, wenn das „es gibt ein y“ hinter einem „für alle x“ steht, also „ Für alle x gibt es ein y mit ....“. Hier zahlt sich nun aus, daß wir bei der Für-alle-Aussage sauber „Sei x ein beliebiges Element“ geschrieben haben. Wenn ich nämlich nun ein konkretes y_0 konstruiere, kann ich x dabei verwenden, weil es sich um ein konkretes, wenn auch nicht näher festgelegtes Element handelt. Man darf also so etwas sagen wie: „ Ich setze $y = x - 3$“ oder „Ich setze $y = \frac{\pi}{2x}$“. Ein paar Zeilen weiter findest Du ein Beispiel.

Es gibt ein x in der Menge M mit $A(x)$

kannst Du zerlegen in: *Es gibt ein x, für das gilt: $x \in M$ <u>und</u> es gilt $A(x)$.*

Beispiel

Aufgabe: Beweise: Zu jeder gebrochenen Zahl x (verschieden von 0) gibt es eine gebrochene Zahl y mit $x \cdot y = 1$.

Erster Schritt: Auflösung des „Zu jeder gebrochenen Zahl x“.

Ergibt: Für jedes x gilt: Wenn x eine gebrochene Zahl (verschieden von 0) ist, so gibt es ein y mit $x \cdot y = 1$.

Zweiter Schritt: Auflösung des „Für jedes“.

Ergibt:

Vor: Sei x beliebig gewählt.

Beh: Wenn x eine gebrochene Zahl (verschieden von 0) ist, so gibt es eine gebrochene Zahl y mit $x \cdot y = 1$.

Dritter Schritt: Auflösung des wenn-dann.

Ergibt:

Vor: x ist beliebig gewählt. x ist eine gebrochene Zahl. x ist verschieden von 0.

Beh: Es gibt eine gebrochene Zahl y mit $x \cdot y = 1$.

Vierter Schritt: Auflösung des „Es gibt ein“

Vor: x ist beliebig gewählt. x ist eine gebrochene Zahl. x ist verschieden von Null.

Ich setze: $y = \frac{1}{x}$ (Dieses Setzen gehört nicht zum mechanischen, sondern zum kreativen Anteil des Beweises!)

Beh: Für dieses y gilt: y ist eine gebrochene Zahl. Für dieses y gilt: $x \cdot y = 1$.

In den Beweis, daß y eine gebrochene Zahl ist, wird nun als Argument eingehen, daß x eine gebrochene Zahl verschieden von 0 ist.

Zum Beweis, daß $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ ist, beruft man sich auf die Gesetze der Multiplikation und Division gebrochener Zahlen.

In diesem Beispiel war ich superausführlich. In der Präsentation eigener Beweise darfst Du Schritte zusammenfassen. Für Deine eigene Klarheit solltest Du Dir selbst gegenüber aber Rechenschaft über die Elementarschritte ablegen. Das, was Du am Ende des Prozesses als Voraussetzung und Behauptung erhalten hast (im Beispiel nach Schritt 4), solltest Du aber *immer* aufschreiben. Dies sichert Dir erste Punkte in Übungsaufgaben, Klausur und Prüfung.

Im Verlauf des Semesters wirst Du zusätzliche Beweisansätze, zum Beispiel das Induktionsschema, kennenlernen. Versuche, die Anwendung dieser Schemata genauso mechanisch zu beschreiben, wie ich es oben getan habe!

3 Was ist ein Beweis? Teil 2

Ein einfacher Beweis ist eine Kette von Aussagen.

Diese Aussagen haben gemeinsam, daß sie alle wahr sind, falls die Voraussetzungen der Aussage wahr sind. Zu einer Aussage in der Kette werden die Gründe angegeben, wegen denen die Wahrheit der neuen Aussage aus der Wahrheit der weiter vorn in der Kette stehenden Aussagen folgt.

Der Beweis ist gelungen, falls die letzten Aussagen in der Kette die Behauptungen der Aussage sind. Zum Zeichen des fertigen Beweises wird an den Schluß ein *w.z.b.w.* (von „was zu beweisen war“) oder ein *q.e.d.* (dasselbe auf lateinisch) gesetzt. In neueren Büchern wirst Du oft einfach nur ein $\square$ finden.

Die ersten Aussagen in der Kette sind die Voraussetzungen selbst. Daß die wahr sind, wenn man die Wahrheit der Voraussetzungen *annimmt*, ist irgendwie klar.

Mußt Du also selbst einen Beweis führen, nimm Dir ein Blatt Papier, schreibe ganz oben die Voraussetzungen und ganz unten die Behauptungen hin. Der Rest des Beweises kommt nun nach und nach dazwischen. Und ich verspreche dir, daß bei allen Beweisen, die wir von Dir abverlangen, ein Blatt ausreicht.

4 Definitionen anwenden

Normalerweise macht man Aussagen nicht einfach so, sondern Aussagen über einzelne oder mehrere *Begriffe*. Diese Begriffe haben einen Namen, und oft hast Du diesen Namen irgendwann und irgendwo in Deinem Leben schon mal gehört.

VERGISS ES!

Das einzige, was für einen Begriff wichtig ist, ist seine Definition. Eine Definition ordnet einem Begriff (meist einem Namen) eine Bestimmung zu, und nur die in der Definition gegebene Bestimmung zählt. Sonst nichts. Egal, wie weit die gegebene Definition von Deiner intuitiven Vorstellung abweicht. Wenn es mir beliebt, den Begriff *S-Bahn* als etwas mit vier Rädern unten und zwei Pferden vorn zu definieren, hast Du mir gefällgst abzukaufen, daß S-Bahnen ohne Strom fahren können und viel Hafer brauchen.

Daß Begriffsnamen natürlich trotzdem mit Bedacht gewählt sind, solltest Du Dir erst in einer späteren Phase des Verstehens überlegen und zunächst davon ausgehen, daß die Übereinstimmung von mathematischen Begriffen mit Begriffen des wirklichen Lebens reiner Zufall ist.

Wenn dem so ist, wie kann man denn dann mit solchen Begriffen umgehen?

Erstens: Man kann natürlich Aussagen über denselben Begriff (also den mit der gleichen Bestimmung), die man vorher schon bewiesen hat, als Argumente verwenden. Dies heben wir uns für später auf, weil wir häufiger in der Situation sind, erste Aussagen über einen Begriff zu beweisen. Dann bleibt als einzige Möglichkeit also

Zweitens: Man kann den Begriff gegen seine Bestimmung austauschen. Ist doch ganz klar: Wenn ein Begriff das und nur das bedeutet, was in seiner Bestimmung steht, dann darf sich doch die Aussage nicht ändern, wenn ich statt des Begriffs seine Bestimmung verwende und umgekehrt.

Diese Tatsache kannst Du nun verwenden, um zu Deiner Liste von Argumenten neue hinzuzufügen.

Hast Du eine Zeile der Form

bla bla bla BEGRIFF blub blub blub,

kannst Du in die nächste Zeile

bla bla bla BESTIMMUNG blub blub blub, (nach Def. von BEGRIFF)

schreiben. Ist die erste Zeile wahr, so ist es auch die zweite. Außerdem hast Du in Klammern ausreichend genau beschrieben, warum die zweite Aussage genauso wahr wie die erste ist.

Auf diese Weise kannst Du vor allem Voraussetzungen weiterverarbeiten, also den oberen Teil Deines Blattes weiter ausfüllen.

Für den unteren Teil mußt Du vielleicht etwas rückwärts denken. In den Behauptungen selber kommen ja normalerweise auch Begriffe vor. Um nun also eine Behauptung über einen Begriff zu beweisen, mußt Du (z.B. im davorliegenden Schritt) beweisen, daß die selbe Aussage für dessen Bestimmung gilt. Dann kannst Du im letzten Schritt die Behauptung beweisen, indem Du die Bestimmung gegen den Begriff eintauschst.

Siehst Du also im hinteren Teil Deines Beweisfragmentes eine Zeile

bla bla bla BEGRIFF blub blub blub,

so füge davor eine Zeile ein, so daß am Ende

bla bla bla BESTIMMUNG blub blub blub
bla bla bla BEGRIFF blub blub blub (nach Def. von BEGRIFF)

steht. Das Argument *(nach Def. von BEGRIFF)* schreibst Du in die zweite Zeile, damit zum Schluß ein von oben nach unten durchgehend lesbarer Beweis entsteht.

Beim Beweis einer Aussage muß Du normalerweise mehrfach Definitionen anwenden. Außerdem können Begriffsbestimmungen Formulierungen wie „wenn-dann“ oder „für alle“ enthalten, so daß Du nun erneut Voraussetzungen und Behauptungen extrahieren mußt. Dabei nicht den Überblick zu verlieren, erfordert einfach nur Training. Und dieses Training bekommst Du.

Beispiel

Beweise: Die Mengeninklusion $\subseteq$ ist transitiv!

Den Beweis findest Du auch im Skript. Hier kannst Du sehen, wie er entstanden ist.

Erster Schritt: Die Suche nach Schlüsselformulierungen verläuft ergebnislos. Daher bleibt nichts übrig, als die Gesamtaussage als Behauptung aufzustellen:
Voraussetzung: Keine
Behauptung: Die Mengeninklusion $\subseteq$ ist transitiv. (1)

Zweiter Schritt: Nun suche nach Begriffen, die eine Definition haben und versuche, sie durch ihre Bestimmung zu ersetzen. In Frage kommen die Begriffe *Mengeninklusion* und *transitiv*. Der Versuch, *Mengeninklusion* zu ersetzen, führt irgendwie ins Chaos. Das passiert bei Beweisen. Muß man durch. Muß man lieber versuchen, *transitiv* zu ersetzen. Die Definition besagt: Eine Relation R ist transitiv, falls für alle x, y, z gilt: Wenn zRy und yRz, so xRz.

Wenn man nun die Mengeninklusion als Relation erkennt, paßt die zu beweisende Aussage optimal auf die Definition. Also ersetzen wir die zu beweisende Aussage durch:

Behauptung: Für alle Mengen M, N und L gilt: Wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq L$, so $M \subseteq L$. (2)

Daß wir x, y und z durch M, N, und L ersetzet haben, liegt daran, daß es bestimmte Vorlieben bei der Namensgebung von Variablen gibt. Dazu gehört, Mengen mit Großbuchstaben aus der Alphabetmitte zu bezeichnen. Verletzung der Konventionen ändert nichts an der Korrektheit, erschwert aber oft das Lesen.

Aussage (2) enthält nun eine Fülle von Schlüsselwörtern, die wir nun der Reihe nach aufdröseln.

Zuerst das „Für alle“. Es entsteht
Voraussetzung: Seien M, N und L beliebige Mengen. (3)
Behauptung: Wenn $M \subseteq N$ und $N \subseteq L$, so $M \subseteq L$. (4)

Nun in der Behauptung (4) die wenn-dann-Verbindung. Ergibt:
Voraussetzung: Seien M, N und L beliebige Mengen. (3)
Sei $M \subseteq N$. (5)
Sei $N \subseteq L$ (6)
Behauptung: $M \subseteq L$ (7)

Keine der verbleibenden Einzelaussagen enthält Schlüsselwörter. Also versuchen wir es mit Definitionsanwendung. Diesmal gelingt es uns, die Definition der Inklusion anzuwenden. Und zwar gleich dreimal — in den Aussagen (5), (6) und (7). Sie lautet: Für zwei Mengen M und N gilt $M \subseteq N$ genau dann, wenn für alle x gilt: wenn $x \in M$, so $x \in N$. Die Anwendung ergibt:
Voraussetzung: Seien M, N und L Mengen (3)
Für alle x gilt: wenn $x \in M$, so $x \in N$ (5’)
Für alle y gilt: wenn $y \in N$, so $y \in L$ (6’)
Behauptung: Für alle z gilt: wenn $z \in M$, so $z \in L$ (7’)

Diesen Schritt könnte man vielleicht explizit notieren.

Erneut haben sich Schlüsselformulierungen in unsere Aussagen eingeschlichen. Wir beseitigen nun (vielleicht gleich in einem Schritt) das „Für alle“ und die wenn-dann-Verbindung in der Behauptung. Man erhält:

Voraussetzung: Seien M, N und L Mengen (3)
Für alle x gilt: wenn $x \in M$, so $x \in N$ (5')
Für alle y gilt: wenn $y \in N$, so $y \in L$ (6')
Sei z ein beliebiges Element. (8)
Sei $z \in M$. (9)
Behauptung: $z \in L$ (10)

Hattest Du am Anfang noch überhaupt keine Voraussetzung, kannst Du Dich inzwischen vor Voraussetzungen kaum noch retten. Und alles ist auf rein mechanische Weise entstanden, allein durch stupide Umformung der gegebenen Aussage. Das ist noch kein Beweis, das umgeformte Problem ist aber, wie Du im nächsten Kapitel sehen wirst, schon 1000 mal einfacher als das Ausgangsproblem.

5 Voraussetzungen anwenden und logisches Schließen

Hier ist zu Semesterbeginn Dein intuitives Verständnis von Logik gefragt. Das Jonglieren mit den logischen Verbindungen *und*, *oder*, *wenn, dann*, *nicht* usw. wird erst im zweiten Kapitel der Vorlesung formal behandelt. Hier darfst Du also im Moment noch frei argumentieren. Welches Argument Du in welcher Reihenfolge benutzt, gehört nun zum kreativen Teil des Beweises. Hier können wir Dir nichts weiter bieten als viele, viele Übungsmöglichkeiten.

Beispiel

Wir setzen einfach den im vorigen Abschnitt begonnenen Beweis fort. Wir hatten

Voraussetzung: Seien M, N und L Mengen (3)
Für alle x gilt: wenn $x \in M$, so $x \in N$ (5')
Für alle y gilt: wenn $y \in N$, so $y \in L$ (6')
Sei z ein beliebiges Element. (8)
Sei $z \in M$. (9)
Behauptung: $z \in L$ (10)

Wenn man nur lange genug anstarrt, was jetzt gegeben und gesucht ist, wird sicher auf die Idee kommen, Voraussetzungen (5') und (9) miteinander zu kombinieren. Aus „$z \in M$“ und „Für alle x gilt: Wenn $x \in M$, so $x \in N$“ kann man die neue Aussage $z \in N$ gewinnen kann.

Unser immer noch unvollständiger Beweis lautet nun:

Voraussetzung: Seien M, N und L Mengen (3)
Für alle x gilt: wenn $x \in M$, so $x \in N$ (5')
Für alle y gilt: wenn $y \in N$, so $y \in L$ (6')
Sei z ein beliebiges Element. (8)
Sei $z \in M$. (9)

Beweis:
Es ist $z \in N$ (wegen Voraussetzungen (5') und (9)) (11)

Behauptung: $z \in L$ (10)

Das, was wir aus Voraussetzungen gewonnen haben (also (11)), können wir nun wie eine Voraussetzung selbst benutzen. Aussage (11) und Voraussetzung (6') lassen sich daher in genau derselben Weise kombinieren wie eben. Es entsteht

Voraussetzung: Seien M, N und L Mengen (3)
Für alle x gilt: wenn $x \in M$, so $x \in N$ (5')
Für alle y gilt: wenn $y \in N$, so $y \in L$ (6')
Sei z ein beliebiges Element. (8)
Sei $z \in M$. (9)

Beweis:
Es ist $z \in N$ (wegen Voraussetzungen (5') und (9)) (11)
Daraus folgt $z \in L$ (nach Voraussetzung (6'))
Behauptung: $z \in L$ (10)

Das „daraus folgt“ signalisiert dem Leser, daß neben der genannten Voraussetzung (6') auch die davorstehende Zeile (also (11)) benutzt wurde, um die neue Aussage abzuleiten. Da das Benutzen der vorigen Zeile der Normalfall ist, gibt es diese Sonderregelung.

Übrigens ist die neu abgeleitete Zeile gerade die Behauptung. Damit muß nun der Beweis lediglich noch ins Reine geschrieben werden:

Endgültiger supertoller Beweis

Aufgabe: Beweise: Die Mengeninklusion $\subseteq$ ist transitiv.

Lösung:

Nach Definition der Transitivität ist folgendes zu zeigen:
Seien M, N und L Mengen mit $M \subseteq N$ und $N \subseteq L$. Dann ist zu beweisen, daß auch $M \subseteq L$ ist. $M \subseteq L$ bedeutet, daß für jedes z gilt: Wenn $z \in M$, so ist $z \in L$.

Sei z ein beliebiges Element mit $z \in M$. Nach Voraussetzung $M \subseteq N$ gilt für jedes x: wenn $x \in M$, so ist $x \in N$. Daraus folgt $z \in N$. Nach Voraussetzung $N \subseteq L$ gilt für jedes y: wenn $y \in N$, so ist $y \in L$. Daraus folgt $z \in L$.

w.z.b.w.

Erkennst Du die Schritte wieder?

6 Andere zulässige Argumente

Bereits bekannte Aussagen

Manchmal kommt es vor, daß Du über einen Begriff Aussagen beweisen sollst, zu dem Du schon mehrere andere Aussagen kennst. Solche Aussagen sollten im Vorlesungsstoff natürlich *vor* der aktuellen Aussage bewiesen worden sein, also ihrerseits im Beweis weder direkt noch indirekt auf der aktuell zu beweisenden Aussage aufbauen. Sonst entsteht etwas, das wir einen *Zirkelschluß* nennen. Und Zirkelschlüsse sind keine korrekten Schlußfolgerungsmethoden.

Ansonsten kannst Du eine bereits bewiesene Aussage einfach zu den Voraussetzungen hinzufügen. Was sowieso gilt, gilt ja schließlich auch unter der Annahme, daß die Voraussetzungen stimmen. Du sollst aber benutzte Aussagen im Beweistext komplett hinschreiben und als vorher bewiesen kennzeichnen.

Schulstoff

In mehreren Übungsaufgaben vertrauen wir auf Deine Schulbildung. Dies betrifft das Rechnen mit den Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $\frac{x}{y}$, das Potenzieren, Wurzelziehen, Logarithmieren, die Relationen $=$, $\neq$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, den Begriff der Primzahl, Teilbarkeit, den größten gemeinsamen Teiler, das kleinste gemeinsame Vielfache, Minimum, Maximum, die Zahlbereiche der natürlichen, ganzen, gebrochenen, rationalen, reellen Zahlen sowie ein paar Dinge, die mir gerade nicht einfallen. Für Argumente, die allein Eigenschaften und Zusammenhänge der genannten Gebiete betreffen, reicht es, als Begründung für eine umgeformte Aussage in Klammern „(Schulstoff)" anzugeben. Details sind dort nicht vonnöten.

Für Begriffe, die in der Vorlesung selbst eingeführt werden, ist die Begründung „Schulstoff" aber nicht zulässig, auch wenn es in der Schule dran war. Hier sollst Du die von uns gelehrten Mechanismen vorführen.

7 Abgesang

Du hast nun die ersten handwerklichen Handgriffe zum Finden eines Beweises gelernt. Dieses Handwerk reicht nicht, um Beweise vollständig zu führen. Nicht umsonst ist auch heutzutage das automatische Finden von Beweisen ein Problem (man kann sogar [zu Fuß] beweisen, daß es immer ein Problem bleiben wird). Kreativität wird verlangt, um das Problem auf die richtige Argumentationsebene zu transformieren, die richtigen Argumente im Übergang von Voraussetzung zu Behauptung zu finden.

Das Handwerk nutzt Dir aber dazu, das Problem auf eine Ebene zu transformieren, auf der es der Lösung leichter zugänglich wird. Die Extraktion von Voraussetzung und Behauptung schafft Übersicht. Durch die Anwendung von Definitionen kannst Du Begriffe entfernen und eine Ebene tiefer argumentieren. Beides ist unabdingbar für eine erfolgreiche Beweisführung.

Wenn der Beweis einmal dasteht, sollte das *Nachvollziehen* eines Beweises aber auf rein handwerklicher Ebene möglich sein.

Wichtige Voraussetzung für gute Handwerksarbeit sind:
Erstens gelernte Definitionen. Dies können wir Dir nicht abnehmen, und eine unbekannte Definition kann man nicht anwenden.
Zweitens Training im Argumentieren. Nur dadurch wirst Du auch kompliziertere Begriffe durch ihre Bestimmung ersetzen können. Nur durch Training wirst Du in der Lage sein, den Überblick über komplexere Voraussetzungs-Behauptungs-Gefüge zu behalten.

Nutze die Trainingsmöglichkeiten in Übung und Übungsaufgaben! Studiere die handwerklichen Anteile in den großen Beweisen in Vorlesung und Skript! Niemand erwartet von Dir, daß Du einen mehrseitigen Beweis aus dem Hut zauberst. In einem vorliegenden ellenlangen Beweis aber die handwerklichen Schritte wiederzuentdecken, solltest Du versuchen. Und Du wirst sehen, daß Du dadurch die Aussage selbst viel besser verstehst.