

Übungsblatt 12 (22. 1. 2009)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Beweisen Sie, daß folgende Regeln in σ -BS ableitbar sind:

- (a) Für alle $\varphi \in L_\sigma$, $x, y \in Var$

$$\frac{\forall x \forall y \varphi}{\forall y \forall x \varphi}.$$

- (b) Für alle $\varphi, \psi \in L_\sigma$, $x \in Var$

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi}.$$

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei $\sigma = \{\dot{R}_1, \dots, \dot{R}_m\}$, wobei $\dot{R}_1, \dots, \dot{R}_m$ Relationssymbole sind. Sei \mathcal{A} eine σ -Struktur. Wir definieren eine Menge $M(\mathcal{A})$ von Relationen über \mathcal{A} rekursiv wie folgt:

Basisregeln:

(B1) $A \in M(\mathcal{A})$

(B2) $\dot{R}_i^A \in M(\mathcal{A})$ für $1 \leq i \leq m$.

Rekursive Regeln:

(R1) Für alle $n \geq 1$ und n -stelligen Relationen $R, R' \in M(\mathcal{A})$ ist auch $R \cup R' \in M(\mathcal{A})$.

(R2) Für alle $n \geq 1$, $m \geq 1$ und n -stelligen Relationen $R \in M(\mathcal{A})$ und m -stelligen Relationen $R' \in M(\mathcal{A})$ ist auch die Relation $R \times R'$ in $M(\mathcal{A})$.

(R3) Für alle $n \geq 1$ und n -stelligen Relationen $R \in M(\mathcal{A})$ ist auch die Relation $A^n \setminus R$ in $M(\mathcal{A})$.

(R4) Für alle $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$ und n -stelligen Relationen $R \in M(\mathcal{A})$ ist auch die $(n-1)$ -stellige Relation $\pi_k(R)$ (def. wie in der Aufgabe 4.(d), Übungsblatt 11) in $M(\mathcal{A})$.

(R5) Für alle $n \geq 1$ und n -stelligen Relationen $R \in M(\mathcal{A})$ und jede bijektive Abbildung $S : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ist auch die Relation $\varrho_S(R)$ (def. wie in der Aufgabe 4.(e), Übungsblatt 11) in $M(\mathcal{A})$.

(R6) Für alle $n \geq 1$ und n -stelligen Relationen $R \in M(\mathcal{A})$ und alle i, j mit $1 \leq i, j \leq n$ ist auch die Relation $\sigma_{i=j}(R)$ (def. wie in der Aufgabe 4.(f), Übungsblatt 11) in $M(\mathcal{A})$.

Zeigen Sie, daß $M(\mathcal{A}) = L_\sigma(\mathcal{A})$, wobei $L_\sigma(\mathcal{A})$ wie in Aufgabe 4., Übungsblatt 11 definiert ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei A ein Alphabet. Seien weiterhin $P \subseteq A^*$ und $Q \subseteq P$ und sei P entscheidbar. Zeigen Sie, dass Q entscheidbar ist, wenn Q und $P \setminus Q$ aufzählbar sind.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Seien A und B Alphabete, $\# \notin A \cup B$. Sei $f : A^* \rightarrow B^*$ eine (totale) Funktion. Man zeige die Äquivalenz der Aussagen

(i) f ist berechenbar.

(ii) $\{x\#f(x) \mid x \in A^*\}$ ist aufzählbar.

(iii) $\{x\#f(x) \mid x \in A^*\}$ ist entscheidbar.

Für jedes Wort $x = a_0 \dots a_{n-1} \in A^*$ mit $f(x) = b_0 \dots b_{m-1} \in B^*$ bezeichnet $x\#f(x)$ das Wort $a_0 \dots a_{n-1} \# b_0 \dots b_{m-1}$.