

Übungsblatt 11 (15. 1. 2009)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Sei σ eine Symbolmenge und L_σ die zu σ gehörende Sprache erster Stufe.

(a) Sind die Formeln

$$(i) \psi_1 := \forall x \exists y \varphi \rightarrow \exists y \forall x \varphi$$

$$(ii) \psi_2 := \exists y \forall x \varphi \rightarrow \forall x \exists y \varphi$$

für beliebige Formeln φ aus L_σ mit $\text{frei}(\varphi) = \{x, y\}$ allgemeingültig? Begründung!

(b) Zeigen Sie, dass für alle Formeln $\varphi(x, y)$ und $\xi(x, y)$ aus L_σ mit $\text{frei}(\varphi) = \text{frei}(\xi) = \{x, y\}$ folgende Formel allgemeingültig ist:

$$(\forall x \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \exists x \exists y \xi(x, y)) \leftrightarrow \exists x \exists y (\varphi(x, y) \rightarrow \xi(x, y)).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Geben Sie Formeln ψ_1 und ψ_2 in pränexer Normalform an, die zu den Formeln φ_1 und φ_2 äquivalent sind, wobei $\varphi_1, \varphi_2 \in L_\sigma$ mit $\sigma = \{\dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{R}_3, \dot{f}_1, \dot{f}_2\}$ wie folgt definiert sind:

$$(a) \varphi_1 := \exists x (\forall y \dot{R}_1(x, y, z) \rightarrow \exists y \dot{f}_1(x) \doteq \dot{f}_2(y, z)).$$

$$(b) \varphi_2 := \forall x (\forall y (\dot{R}_2(y, z) \vee \neg \dot{R}_3(x, y)) \rightarrow \neg \forall z \dot{R}_1(x, y, z)).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $\sigma := \{\dot{f}\}$, wobei \dot{f} ein Funktionssymbol ist.

(a) Geben Sie einen L_σ -Satz φ an, so dass für alle σ -Strukturen $\mathcal{A} = (A, \dot{f}^{\mathcal{A}})$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \dot{f}^{\mathcal{A}} \text{ ist surjektiv, und wenn } \dot{f}^{\mathcal{A}} \text{ injektiv ist, dann ist } \dot{f}^{\mathcal{A}} \text{ seine eigene Umkehrfunktion.}$$

(b) Geben Sie eine σ -Struktur an, die folgenden σ -Satz erfüllt:

$$\forall x \forall y (\dot{f}(x) \doteq \dot{f}(y) \rightarrow x \doteq y) \wedge \exists x \forall y \neg \dot{f}(y) \doteq x$$

(c) Sei $\mathcal{A} = (A, \dot{f}^{\mathcal{A}})$ die σ -Struktur mit $A := \mathbb{N}$ und $\dot{f}^{\mathcal{A}} : A \rightarrow A$ definiert durch

$$\dot{f}^{\mathcal{A}}(a) := 2a \quad \text{für alle } a \in A$$

Seien

$$\varphi_1 := \exists y (\dot{f}(x) \doteq y \wedge \dot{f}(y) \doteq x),$$
$$\varphi_2 := \forall y \exists z (\dot{f}(x) \doteq y \rightarrow y \doteq \dot{f}(\dot{f}(z))).$$

Geben Sie für $i = 1, 2$ jeweils die Menge

$$\varphi_i(\mathcal{A}) := \{a \in A \mid \mathcal{A} \models \varphi_i[a]\}$$

an.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Für eine σ -Struktur \mathcal{A} sei

$$L_\sigma(\mathcal{A}) := \{\varphi(\mathcal{A}) \mid n \geq 1, \varphi(x_1, \dots, x_n) \in L_\sigma\}.$$

$L_\sigma(\mathcal{A})$ ist also eine Menge von Relationen über A . Zeigen Sie:

(a) Für alle n -stelligen Relationen $R_1, R_2 \in L_\sigma(\mathcal{A})$ ist auch die Relation $R_1 \cup R_2$ in $L_\sigma(\mathcal{A})$.

- (b) Für alle n -stelligen Relationen $R_1 \in L_\sigma(\mathcal{A})$ und alle m -stelligen Relationen $R_2 \in L_\sigma(\mathcal{A})$ ist auch die Relation $R_1 \times R_2$ in $L_\sigma(\mathcal{A})$.
- (c) Für alle n -stelligen Relationen $R \in L_\sigma(\mathcal{A})$ ist auch die Relation $A^n \setminus R$ in $L_\sigma(\mathcal{A})$.
- (d) Für alle $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$ und n -stelligen Relationen $R \in L_\sigma(\mathcal{A})$ ist auch die $(n-1)$ -stellige Relation

$$\pi_k(R) = \{(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n) \mid \text{ex. } a_k \in A, (a_1, \dots, a_n) \in R\}$$

in $L_\sigma(\mathcal{A})$.

- (e) Für alle n -stelligen Relationen $R \in L_\sigma(\mathcal{A})$ und jede bijektive Abbildung $S : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ist auch die Relation

$$\varrho_S(R) = \{(a_{S(1)}, \dots, a_{S(n)}) \mid (a_1, \dots, a_n) \in R\}$$

in $L_\sigma(\mathcal{A})$.

- (f) Für alle n -stelligen Relationen $R \in L_\sigma(\mathcal{A})$ und alle i, j mit $1 \leq i, j \leq n$ ist auch die Relation

$$\sigma_{i=j}(R) = \{(a_1, \dots, a_n) \in R \mid a_i = a_j\}$$

in $L_\sigma(\mathcal{A})$.