

Übungsblatt 10 (8. 1. 2009)

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Die Menge $\{\dot{f}, \dot{R}, \dot{c}\}$ sei die Signatur σ^* . Wir betrachten die σ^* -Struktur $\mathcal{A} := (A, \dot{f}^{\mathcal{A}}, \dot{R}^{\mathcal{A}}, \dot{c}^{\mathcal{A}})$ mit $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\dot{c}^{\mathcal{A}} = 3$, $\dot{R}^{\mathcal{A}} = \{(0, 3, 0), (1, 3, 0), (4, 2, 3)\}$ und die Funktion $\dot{f}^{\mathcal{A}}: A \times A \rightarrow A$ definiert durch folgende Tabelle:

$\dot{f}^{\mathcal{A}}$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

d.h. zum Beispiel, $\dot{f}^{\mathcal{A}}(2, 3) = 0$, $\dot{f}^{\mathcal{A}}(1, 3) = 4$ etc. Die Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ sei gegeben durch $\beta: \text{Var} \rightarrow A$ mit $\beta(v_0) = 2, \beta(v_1) = 0, \beta(v_2) = 1$ und $\beta(v_i) = 3$ für alle $i \geq 3$.

(a) Berechnen Sie $\llbracket t_i \rrbracket^{\mathcal{I}}$ für $i = 1, 2$ mit

(a) $t_1 := \dot{f}(\dot{f}(v_2, v_6), v_0)$

(b) $t_2 := \dot{f}(\dot{f}(\dot{c}, \dot{f}(v_2, \dot{c})), v_3)$

(b) Berechnen Sie $\llbracket \varphi_i \rrbracket^{\mathcal{I}}$ für $i = 1, 2$ mit

(a) $\varphi_1 := \exists v_0 \dot{R}(v_0, v_3, v_1) \vee \dot{R}(v_1, v_3, \dot{f}(v_0, v_2))$

(b) $\varphi_2 := \forall v_1 (\dot{f}(v_1, v_6) \doteq \dot{f}(v_2, \dot{c}) \rightarrow \exists v_3 (\dot{R}(v_1, v_2, v_3) \vee \dot{f}(v_1, v_5) \doteq v_1))$

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei $\sigma := \{\dot{R}, \dot{*}, \dot{\oplus}, \dot{c}\}$ eine Symbolmenge, in der \dot{R} ein Relationssymbol, $\dot{*}$ und $\dot{\oplus}$ Funktionssymbole und \dot{c} Konstantensymbol ist. Wir schreiben $x \dot{*} y$ anstatt $\dot{*}(x, y)$ und analog $x \dot{\oplus} y$ anstatt $\dot{\oplus}(x, y)$. Seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ Sätze aus L_σ , die wie folgt definiert sind:

(a) $\varphi_1 := \forall u \forall v \exists x (\neg v \doteq \dot{c} \rightarrow u \dot{\oplus} (v \dot{*} x) \doteq \dot{c})$

(b) $\varphi_2 := \forall u \forall v \forall w \exists x (\neg w \doteq \dot{c} \rightarrow (u \dot{\oplus} (v \dot{*} x)) \dot{\oplus} (w \dot{*} (x \dot{*} x)) \doteq \dot{c}).$

(c) $\varphi_3 := \forall x \forall y \forall z (\dot{R}(x, x) \wedge ((\dot{R}(x, y) \wedge \dot{R}(y, z)) \rightarrow \dot{R}(x, z)) \wedge (\dot{R}(x, y) \rightarrow \dot{R}(y, x))).$

Geben Sie je ein Modell für φ_i und ein Modell für $\neg \varphi_i$ für $i = 1, 2, 3$ an!

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $\sigma = \{\dot{R}, \dot{f}_1, \dot{f}_2, \dot{c}_1, \dot{c}_2\}$ und φ_1 und φ_2 Formeln aus L_σ wie folgt definiert:

(i) $\varphi_1 := \forall v_1 (\exists v_0 (\dot{R}(v_0, v_1, \dot{c}_1) \vee \dot{R}(v_0, v_2, \dot{c}_2)) \rightarrow \dot{f}_1(\dot{c}_2) \doteq \dot{f}_2(v_1, v_0)).$

(ii) $\varphi_2 := \forall v_0 \exists v_2 \neg \dot{R}(\dot{c}_2, v_0, v_2) \wedge \exists v_1 \forall v_2 \dot{f}_2(v_2, \dot{c}_1) \doteq \dot{f}_1(v_1).$

Sei $S := \left(\frac{\dot{f}_1(\dot{c}_1)}{v_0}, \frac{\dot{f}_2(v_0, \dot{c}_2)}{v_2} \right)$. Geben Sie $\varphi_1 S$ und $\varphi_2 S$ an!

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei \leq eine lineare Ordnung auf einer Menge A . \leq ist *dicht*, wenn zu je zwei verschiedenen Elementen $a, b \in A$ mit $a \leq b$ ein Element $c \in A \setminus \{a, b\}$ existiert, so daß $a \leq c \leq b$. Geben Sie ein Axiomensystem Φ_{DO} für die Klasse aller dichten linearen Ordnungen an, d.h. eine Satzmenge $\Phi_{DO} \subseteq L_{\sigma_{Ord}}$, so daß für alle σ_{Ord} -Strukturen $\mathcal{A} = (A, \dot{\leq}^{\mathcal{A}})$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \Phi_{DO} \iff \dot{\leq}^{\mathcal{A}} \text{ dichte lineare Ordnung auf } A.$$