Übungsblatt 9 (11. 12. 2008)

Aufgabe 1 (6 Punkte):
Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ definieren wir wie folgt eine 2-stellige Relation $\sim_\Phi$ auf AL^2: Für $\phi, \psi \in \mathsf{AL}$ gelte

$$\phi \sim_\Phi \psi \;:\Longleftrightarrow\; \Phi \models (\phi \leftrightarrow \psi).$$

1. Beweisen Sie, dass für alle $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ die Relation $\sim_\Phi$ eine Äquivalenzrelation auf AL ist.
2. Geben Sie eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ an, für die $\sim_\Phi$ genau eine Äquivalenzklasse hat. Begründen Sie ihre Antwort.
3. Geben Sie eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ an, für die $\sim_\Phi$ genau zwei Äquivalenzklassen hat. Begründen Sie ihre Antwort.

   Hinweis: Wählen Sie Φ maximal widerspruchsfrei.

Aufgabe 2 (6 Punkte):
Eine *Färbung* eines Graphen $\mathcal{G}= (V, E)$ mit Farben aus einer Menge C ist eine Abbildung $f : V \longrightarrow C$, so daß für alle Kanten $(v_1, v_2) \in E$ (d.h. die Ecken v_1 und v_2 sind benachbart) stets gilt $f(v_1) \neq f(v_2)$. Der Graph $\mathcal{G}$ ist C-färbbar, wenn eine Färbung von $\mathcal{G}$ mit Farben aus C existiert.

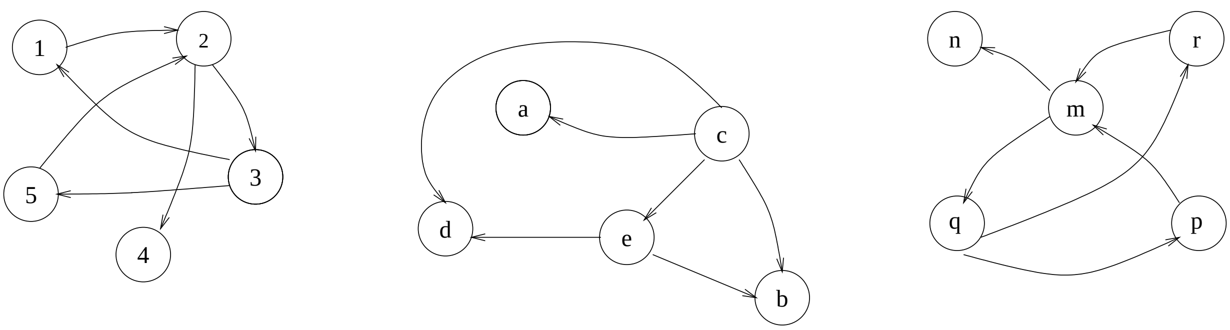
Der Graph $\mathcal{G}_1= (V_1, E_1)$ heißt ein *Teilgraph* von $\mathcal{G}= (V, E)$, wenn $V_1 \subseteq V$ und $E_1 = V_1^2 \cap E$.

Sei jetzt $\mathcal{G}= (V, E)$ ein Graph, wobei V abzählbar unendlich ist und sei C eine endliche Menge von Farben.

(a) Geben Sie eine unendliche Formelmenge Φ an, die genau dann erfüllbar ist, wenn $\mathcal{G}$ C-färbbar ist.

(b) Zeigen Sie, daß $\mathcal{G}$ C-färbbar ist, wenn jeder endliche Teilgraph $\mathcal{G}'$ von $\mathcal{G}$ C-färbbar ist.
Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Gegeben seien die drei Digraphen $\mathcal{G}_1$,$\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}_3$.



Der Digraph $\mathcal{G}_1$ läßt sich als σ_{Graph}-Struktur (wobei $\sigma_{Graph} := \{\dot{E}\}$) mit $\mathcal{G}_1 = (G_1, \dot{E}^{\mathcal{G}_1})$ wie folgt darstellen:

$$G_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ und } \dot{E}^{\mathcal{G}_1} = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (5, 2)\}.$$

(a) Stellen Sie auch $\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}_3$ jeweils als σ_{Graph}-Struktur dar.

(b) Überprüfen Sie, ob

(a) $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$
(b) $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_3$
(c) $\mathcal{G}_2 \cong \mathcal{G}_3$

gilt.

(c) Falls ein Isomorphismus zwischen je zwei σ_{Graph}–Strukturen in Punkt (b) existiert, dann geben Sie ihn an.

Aufgabe 4 (4 Punkte):
Seien $\mathcal{B}_2$ bzw. $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ die in der Vorlesung definierten Boolesche Algebra bzw. Potenzmengenalgebra. Beweisen Sie, daß $\mathcal{B}_2 \cong \mathcal{P}(\{\emptyset\})$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 18. Dezember, 9.15 Uhr; vor der Vorlesung am Donnerstag oder Einwurf in den Briefkasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls Logik in der Informatik.