Übungsblatt 8 (04. 12. 2008)

Aufgabe 1 (5 Punkte):
Seien $n \in \mathbb{N}^+$ beliebig und $V_1, V_2, \ldots, V_n$ Aussagenvariablen. Zeigen Sie, dass die Formel φ mit

$$\varphi := \Big(\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (V_i \wedge V_j) \Big) \leftrightarrow \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Big(\bigvee_{j \neq i} V_j \Big)$$

allgemeingültig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte):
Zeigen Sie, dass es eine Klauselmenge Γ und eine Klausel δ gibt, so dass $\Gamma \models \delta$, aber $\Gamma \not\vdash_R \delta$.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

(a) Wenden Sie den Streichungsalgorithmus auf die Hornformel

$$\varphi := (\neg Z \vee X) \wedge (\neg V \vee \neg X \vee \neg U) \wedge V \wedge (U \vee \neg W) \wedge \neg Y \wedge \neg T \wedge Z \wedge W$$

an, um zu testen, ob die Formel erfüllbar ist.

(b) Gibt es zu jeder Formel $\varphi \in$AL eine äquivalente Hornformel? Beweisen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

(a) Berechnen Sie die reflexive transitive Hülle der folgenden Relation R auf der Menge $\{1, \ldots, 150\}$:

$$R := \{(i^3 - 1, i^2 + 1) \mid i \in \{2, 3, 4, 5\}\}.$$

(b) Sei A eine Menge und $R \subseteq A^2$. Die *transitive Hülle* von R ist die folgendermaßen rekursiv definierte Relation $R^+ \subseteq A^2$:

Basisregel:
Für alle $(a, b) \in R$ ist $(a, b) \in R^+$.
Rekursive Regel:
Sind $(a, b), (b, c) \in R^+$, so ist auch $(a, c) \in R^+$.

Berechnen Sie die transitive Hülle der Relation R aus Teil (a).

(c) Sei A eine Menge und $R \subseteq A^2$ so, dass für jedes $a \in A$ ein $b \in A$ existiert mit $(b, a) \in R$. Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist genau dann, wenn aus $(a, b) \in R$ und $(a, c) \in R$ stets folgt, dass $(b, c) \in R$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 11. Dezember, 9.15 Uhr; vor der Vorlesung am Donnerstag oder Einwurf in den Briefkasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls Logik in der Informatik.