Übungsblatt 7 (27. 11. 2008)

Aufgabe 1 (5 Punkte):
In dieser Aufgabe wollen wir Zusammenhänge zwischen Formeln und Polynomen untersuchen.

(a) Betrachten wir die Formel $\varphi := \neg X \to Y$ und das Polynom $p(X,Y) := X + Y - XY$. Es ist leicht zu überprüfen, daß für alle X und Y aus AVAR und alle zu φ passenden Belegungen $\mathcal{B}$ gilt: $\varphi[\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)] = p(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$.

Geben Sie für $\varphi_1 = X \wedge \neg Y$ und für $\varphi_2 = X \vee (Y \wedge Z)$ analoge Polynome $p_1(X,Y)$ und $p_2(X,Y,Z)$ an.

(b) Zeigen Sie, daß zu jeder Formel $\varphi(X_1, \cdots, X_n)$ aus AL ein Polynom $p(X_1, \cdots, X_n)$ existiert, so daß für jede zu φ passende Belegung $\mathcal{B}$ gilt: $\varphi[\mathcal{B}(X_1), \cdots, \mathcal{B}(X_n)] = p(\mathcal{B}(X_1), \cdots, \mathcal{B}(X_n))$.

<u>*Hinweis:*</u> *Die Menge* $\{\neg, \wedge\}$ *ist adäquat.*

Aufgabe 2 (6 Punkte):
Beweisen Sie für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{AL}(\{\neg, \to\})$, dass folgende Formeln aus $\emptyset$ in ABS ableitbar sind:

(a) $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$

(b) $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$.

Hinweis: Benutzen Sie ggf. das Deduktionslemma.

Aufgabe 3 (4 Punkte):
Zwei aussagenlogische Formeln φ_1 und φ_2 nennen wir *erfüllbarkeitsäquivalent*, falls gilt: φ_1 ist erfüllbar genau dann, wenn φ_2 erfüllbar ist.

(a) Sei $\varphi := (\neg(X \to \neg(W \wedge \neg Z)) \to Y)$. Konstruieren Sie mit Hilfe des Verfahrens aus dem Beispiel zum Satz 4.20. (S. 233-a bis S. 233-c) eine zu φ erfüllbarkeitsäquivalente Formel in KNF.

(b) Konstruieren Sie eine möglichst kurze zu φ erfüllbarkeitsäquivalente Formel.

Aufgabe 4 (5 Punkte):
Geben Sie für folgende Klauselmengen eine erfüllende Belegung oder eine Resolutionswiderlegung an:

$$\Gamma_1 := \{\neg X \vee Y,\ \neg Y \vee \neg Z \vee W,\ X,\ Z,\ \neg W\}$$
$$\Gamma_2 := \{\neg X \vee Y,\ \neg Y \vee \neg Z \vee W,\ X,\ Z,\ \neg W \vee V \vee \neg X,\ X \vee W \vee \neg V,\ \neg X \vee Y \vee Z,\ Y \vee Z \vee V \vee W\}$$
$$\Gamma_3 := \{X \vee \neg Z,\ Y \vee \neg Z,\ Y \vee \neg W,\ \neg X \vee V,\ \neg Y \vee \neg V,\ \neg Y \vee Z \vee V,\ Y \vee Z\}$$

Abgabe: Bis Donnerstag, 4. Dezember, 9.15 Uhr; vor der Vorlesung am Donnerstag oder Einwurf in den Briefkasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls Logik in der Informatik.