Übungsblatt 6 (20. 11. 2008)

Aufgabe 1 (5 Punkte):

(a) Der zweistellige Junktor $\downarrow$ sei durch folgende Wahrheitstafel gegeben:

X	Y	$X \downarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Bezeichne $\mathsf{AL}(\{\downarrow\})$ die Menge aller Formeln, die aus Variablen, Klammern und dem Junktor $\downarrow$ aufgebaut sind. Zeigen Sie, dass es zu jeder Formel in AL eine äquivalente Formel in $\mathsf{AL}(\{\downarrow\})$ gibt, d.h., dass der Junktor $\downarrow$ alleine adäquat ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathsf{AL}(\{\rightarrow, \mathbf{1}\})$ nicht adäquat ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Sei $n \geq 1$ und $\varphi_n := \bigwedge_{i=1}^{n}(X_i \leftrightarrow Y_i)$. Zeigen Sie, dass jede zu φ_n äquivalente Formel in DNF mindestens 2^n konjunktive Klauseln hat. (D.h. beweisen Sie Satz 3.68)

Hinweis: Betrachten Sie eine beliebige Formel ψ_n, die äquivalent zu φ_n und in DNF ist. Zeigen Sie, dass es für jede Konjunktion $(\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_n)$ mit $var(\lambda_i) = X_i$ mindestens eine konjunktive Klausel von ψ_n gibt, die $(\lambda_1 \wedge \cdots \wedge \lambda_n)$ als Subformel enthält.

Aufgabe 3 (6 Punkte):

Ein *aussagenlogisches Beweissystem* ist ein Paar $B = (A, R)$, bestehend aus einer Menge $A \subseteq \mathsf{AL}$ von Formeln (den *Axiomen* des Systems) und einer Menge R von Ableitungsregeln (die *Regeln* des Systems).

Das System ABS aus der Vorlesung ist ein Beispiel eines aussagenlogischen Beweissystems.

(a) Definieren Sie sinnvoll (wie es in der Vorlesung für das System ABS geschehen ist), was es für ein beliebiges aussagenlogisches Beweissystem B bedeutet, dass eine Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ aus einer Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ im System B beweisbar ist.

Für ein aussagenlogisches Beweissystem B, eine Formelmenge $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und eine Formel $\psi \in \mathsf{AL}$ schreiben wir $\Phi \vdash_B \psi$, wenn ψ aus Φ in B beweisbar ist. Wir nennen das System B *korrekt*, wenn für alle $\Phi \subseteq \mathsf{AL}$ und alle $\psi \in \mathsf{AL}$ gilt:

$$\Phi \vdash_B \psi \implies \Phi \models \psi.$$

(b) Sei $B = (A, R)$ ein aussagenlogisches Beweissystem, für das alle Axiome $\phi \in A$ allgemeingültig und alle Regeln $\rho \in R$ korrekt sind. Zeigen Sie, dass B korrekt ist.

(c) Sei B folgendes aussagenlogische Beweissystem:

Axiome: Alle allgemeingültigen Formeln.

Regeln: Syllogismus, d.h., für alle Formeln φ, ψ, χ die Ableitungsregel

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \psi \rightarrow \chi}{\varphi \rightarrow \chi}.$$

Zeigen Sie, dass B korrekt ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Zeigen Sie, dass folgende Regel in ABS ableitbar ist: $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 27. November, 9.15 Uhr; vor der Vorlesung am Donnerstag oder Einwurf in den Briefkasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls Logik in der Informatik.