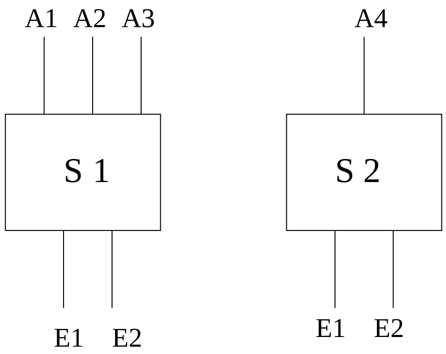
Humboldt-Universität zu Berlin
Vorlesung: Theoretische Informatik I, WS 2008/2009

Übungsblatt 5 (13. 11. 2008)

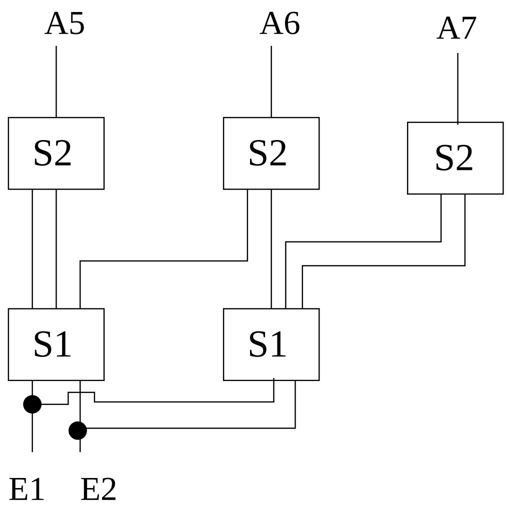
Aufgabe 1 (5 Punkte):

Seien die zwei Schaltelemente S_1 und S_2 wie folgt definiert:



E1	E2	A1	A2	A3	A4
0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1

Betrachten Sie folgenden Schaltkreis:



(a) Beschreiben Sie das Ein-/Ausgabeverhalten des Schaltkreises durch eine Wahrheitstafel.

(b) Beschreiben Sie das Verhalten der beiden Schaltelemente und des Schaltkreises durch aussagenlogische Formeln (wie in der Vorlesung in 3.6).

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Seien die Formeln φ, ψ, ψ^* aus AL wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\varphi &:= (((X \leftrightarrow \neg Y) \leftrightarrow Z) \rightarrow (((X \leftrightarrow \neg Y) \wedge Z) \leftrightarrow Y)), \\
\psi &:= (X \leftrightarrow \neg Y), \\
\psi^* &:= (Z \rightarrow Y).
\end{aligned}$$

Berechnen Sie

(a) φS, wobei $S : \{X, Y\} \longrightarrow$AL die durch $S(X) := \psi$ und $S(Y) := \psi^*$ definierte Substitution ist,

(b) $\text{ers}_{\psi \rightsquigarrow \psi^*}(\varphi)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Zeigen Sie die Äquivalenz von φ_i und ψ_i für $i = 1, 2, 3, 4$ mit Hilfe von algebraischen Umformungen, wobei

$$
\begin{array}{ll}
\varphi_1 := Z \leftrightarrow (Y \rightarrow Z) & \psi_1 := Y \vee Z \\
\varphi_2 := Y \rightarrow \neg(X \vee Z) & \psi_2 := (X \vee Z) \rightarrow \neg Y \\
\varphi_3 := Y \rightarrow (Z \rightarrow X) & \psi_3 := (Y \wedge Z) \rightarrow X \\
\varphi_4 := (Y \rightarrow Z) \rightarrow (Y \rightarrow X) & \psi_4 := X \vee (\neg Y \vee \neg Z)
\end{array}
$$

Aufgabe 4 (6 Punkte):

(a) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils die dualen Formeln an:

(i) $(Y \vee \neg X) \vee (\neg(\mathbf{1} \wedge Y) \vee (\neg Z \wedge \mathbf{0}))$

(ii) $(\mathbf{0} \wedge \mathbf{1}) \vee \neg(\neg Z \vee \neg(X \wedge Z))$

(b) Beweisen Sie, dass für alle Formeln φ, in denen keine Implikation und keine Biimplikation vorkommt, gilt:

$$\varphi \text{ erfüllbar } \iff \tilde{\varphi} \text{ nicht allgemeingültig.}$$

(c) Geben Sie die Wahrheitstabelle für einen zur Implikation dualen Junktoren an! D.h., definieren Sie einen 2-stelligen Junktor $\tilde{\rightarrow}$, so dass für alle $X, Y \in$ AVAR und alle Belegungen $\mathcal{B}$ für {X,Y} gilt:

$$[\![\mathrm{X} \mathbin{\tilde{\rightarrow}} \mathrm{Y}]\!]^{\mathcal{B}} = 1 - [\![\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{Y}]\!]^{\tilde{\mathcal{B}}}.$$

Abgabe: Bis Donnerstag, 20. November, 9.15 Uhr; vor der Vorlesung am Donnerstag oder Einwurf in den Briefkasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls Logik in der Informatik.