Übungsblatt 4 (6. 11. 2008)

Aufgabe 1 (4 Punkte):

(a) Ist die Formel $\alpha := X \rightarrow (Y \rightarrow X \vee Z)$ allgemeingültig?
(b) Ist die Formel $\beta := Z \leftrightarrow \neg(Y \wedge X)$ erfüllbar?
(c) Seien die Formeln φ_i mit $i \in \mathbb{N}$ definiert durch
$\varphi_0 := \neg V_0$
$\varphi_1 := V_0 \rightarrow V_1$
$\vdots$
$\varphi_{i+1} := V_i \rightarrow V_{i+1}$
$\vdots$

und sei $\Phi := \{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Ist Φ erfüllbar?
(d) Gegeben seien die Formeln
$\varphi_1 := X \vee \neg Y, \varphi_2 := \neg X \rightarrow Z$ und $\varphi_3 := \neg(\neg(X \wedge Z) \rightarrow X \vee Z)$.
Ist die Ableitungsregel $\frac{\varphi_1\ \varphi_2}{\varphi_3}$ korrekt?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

Aufgabe 2 (5 Punkte):

(a) Definieren Sie rekursiv eine Funktion $f : \mathsf{AL} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{-1\}$, so dass f für jede Formel aus AL den maximalen Index aller vorkommenden aussagenlogischen Variablen ausgibt und -1 falls keine aussagenlogischen Variablen enthalten sind, also $f(\varphi) = \max(\{i \mid V_i \text{ kommt in } \varphi \text{ vor}\} \cup \{-1\})$ für alle $\varphi \in \mathsf{AL}$.
(b) Sei $g : \mathsf{AL} \rightarrow \mathsf{AL}$ definiert wie folgt:

Rekursionsanfang:

$g(\mathbf{0}) := \mathbf{0}$, $g(\mathbf{1}) := \mathbf{1}$ und $g(V_i) := V_{2i+1}$ für alle $V_i \in \mathsf{AVAR}$.

Rekursionsschritt:

$$\begin{aligned} g(\neg\varphi) &:= g(\varphi) \\ g(\varphi_1 * \varphi_2) &:= g(\varphi_1) * g(\varphi_2) \end{aligned}$$

für $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Beweisen Sie, dass $f(g(\varphi)) = 2f(\varphi) + 1$ für alle $\varphi \in \mathsf{AL}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte): In einem Data-Mining Problem sollen Datensätze von Augenärzten und Optikern analysiert werden, um Regeln für das Verschreiben von Kontaktlinsen festzustellen. Folgende Daten stehen zur Verfügung:

Sehschwäche	*Astigmatismus*	*Tränenproduktion*	*Alter*	*Altersweitsichtig*	*Empfohlenene Kontaktlinsen*
kurzsichtig	nein	verringert	Kind	nein	keine
kurzsichtig	nein	normal	Kind	nein	weich
kurzsichtig	ja	verringert	Kind	nein	keine
kurzsichtig	ja	normal	Kind	nein	hart
kurzsichtig	nein	verringert	erwachsen	nein	keine
kurzsichtig	nein	normal	erwachsen	nein	weich
kurzsichtig	ja	verringert	erwachsen	nein	keine
kurzsichtig	ja	normal	erwachsen	nein	hart
kurzsichtig	nein	verringert	erwachsen	ja	keine
kurzsichtig	nein	normal	erwachsen	ja	keine
kurzsichtig	ja	verringert	erwachsen	ja	keine
kurzsichtig	ja	normal	erwachsen	ja	hart
weitsichtig	nein	verringert	Kind	nein	keine
weitsichtig	nein	normal	Kind	nein	weich
weitsichtig	ja	verringert	Kind	nein	keine
weitsichtig	ja	normal	Kind	nein	hart
weitsichtig	nein	verringert	erwachsen	nein	keine
weitsichtig	nein	normal	erwachsen	nein	weich
weitsichtig	ja	verringert	erwachsen	nein	keine
weitsichtig	ja	normal	erwachsen	nein	hart
weitsichtig	nein	verringert	erwachsen	ja	keine
weitsichtig	nein	normal	erwachsen	ja	weich
weitsichtig	ja	verringert	erwachsen	ja	keine
weitsichtig	ja	normal	erwachsen	ja	keine

(a) Beschreiben Sie ein aussagenlogisches Modell des Data-Mining Problems.
Hinweis: Um den Eintrag in („*Empfohlene Kontaktlinsen*“) aussagenlogisch zu modellieren, benötigen Sie zwei Aussagenvariablen, etwa X_{hart} und X_{weich}.

(b) Geben Sie für folgende Assoziationsregeln aussagenlogische Formeln in ihrem Modell an und berechnen Sie jeweils die Abdeckung und die Genauigkeit der Regeln.

   i. Wenn der Patient nicht altersweitsichtig und kurzsichtig ist, dann werden keine Kontaktlinsen empfohlen.
   ii. Wenn der Patient ein Kind ist und einen Astigmatismus hat, dann werden harte Linsen empfohlen.
   iii. Wenn die Tränenproduktion normal ist, dann werden Kontaktlinsen empfohlen.

Aufgabe 4 (6 Punkte): Sei $A_{\mathbb{Q}^+} := \mathsf{AVAR} \cup \{\mathbf{1}, \times, \div, ^{-1}, (,)\}$, wobei $\mathsf{AVAR} = \{V_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist. Die Menge $T_{\mathbb{Q}^+} \subseteq A^*_{\mathbb{Q}^+}$ der $\mathbb{Q}^+$-*Terme* sei rekursiv wie folgt definiert:

Basisregeln:

(BR1) $\mathbf{1} \in T_{\mathbb{Q}^+}$,
(BR2) $V_i \in T_{\mathbb{Q}^+}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Rekursive Regeln:

(RR1) Für $* \in \{\times, \div\}$ gilt: Wenn $t_1, t_2 \in T_{\mathbb{Q}^+}$, so auch $(t_1 * t_2) \in T_{\mathbb{Q}^+}$.

(RR2) Wenn $t \in T_{\mathbb{Q}^+}$, so auch $t^{-1} \in T_{\mathbb{Q}^+}$.

(a) Welche der folgenden Zeichenketten sind in $T_{\mathbb{Q}^+}$?

  (i) $V_3^{-1} \div \mathbf{1}^{-1}$

  (ii) $V_2 \times V_5 \times V_1$

  (iii) $((V_3^{-1} \times V_2) \div V_0^{-1})$

  (iv) $((V_8 \div ((V_3 \div V_1) \times V_0^{-1}) \times (V_7^{-1} \div V_2))$

(b) Definieren Sie rekursiv eine Funktion $var : T_{\mathbb{Q}^+} \to \wp(\mathsf{AVAR})$, die jedem Term die Menge seiner Variablen zuordnet.

(c) Eine *positiv-rationale Belegung* ist eine partielle Abbildung β mit $\mathrm{def}(\beta) \subseteq \mathsf{AVAR}$, die Variablen positive, rationale Zahlen zuordnet. Definieren Sie auf sinnvolle Weise rekursiv eine Abbildung $[\![\bullet]\!]^{\bullet}$, die jedem Term $t \in T_{\mathbb{Q}^+}$ und jeder positiv-rationalen Belegung β einen Wert $[\![t]\!]^{\beta}$ (den Wert des Terms t unter der Belegung β) zuordnet.

Abgabe: Bis Donnerstag, 13. November, 9.15 Uhr; vor der Vorlesung am Donnerstag oder Einwurf in den Briefkasten vor dem Sekretariat des Lehrstuhls Logik in der Informatik.