Übungsblatt 3 (30. 10. 2008)

Aufgabe 1 (4 Punkte): Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(a) Für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ ist $(a-1)\sum_{k=0}^{n} a^k = a^{n+1} - 1$.

(b) $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ durch 8 teilbar ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte): Sei die Sprache `MU` definiert wie in der Vorlesung. Beweisen Sie, dass `ii` $\notin$ `MU`.

Aufgabe 3 (6 Punkte): Sei $A = \{0, 1\}$ und sei $L \subseteq A^*$ wie folgt rekursiv definiert:

Basisregeln: $0, 1 \in L$.
Rekursive Regeln: Für alle $w \in A^*$ und für alle $a, b \in A$ gilt:

(R1) Wenn $w \in L$, so auch $0w1 \in L$.
(R2) Wenn $wab \in L$, so auch $w \in L$.

(a) Geben Sie drei verschiedene Wörter der Länge 3 in L an.

(b) Zeigen Sie, dass das Wort $0001111 \in L$.

(c) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^+$ gilt: $0^n 1^n \notin L$.

Dabei sei $v^n := \underbrace{vv\ldots v}_{n\text{–mal}}$ für beliebige $v \in A^*$ und $n \in \mathbb{N}^+$

Aufgabe 4 (6 Punkte):

(a) Definieren Sie rekursiv über den Aufbau von Listen eine Funktion `sum` : `LIST`$(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, die für eine gegebene Liste von natürlichen Zahlen die Summe aller Einträge berechnet.

(b) Sei O eine beliebige Menge von Objekten. Definieren Sie rekursiv über den Aufbau von Listen eine Funktion `reverse` : `LIST`$(O) \to$ `LIST`(O), die eine Liste mit allen Einträgen in umgekehrter Reihenfolge zurückgibt.
Hinweis: Verwenden Sie eine rekursiv definierte Hilfsfunktion.