6 Zur Ausdrucksstärke der Logik der 1. Stufe

6.1 Kompaktheit und Löwenheim-Skolem

Modellklassen und Axiomatisierbarkeit

Definition 6.1.
1. Für eine Satzmenge $\Phi \subseteq S_\sigma$ sei

$$\mathrm{Mod}_\sigma(\Phi) := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \models \Phi\}.$$

2. Eine Klasse K von σ-Strukturen ist *(erststufig) axiomatisierbar* (oder *Δ-elementar*), wenn es eine Satzmenge $\Phi \subseteq S_\sigma$ gibt, so dass $K = \mathrm{Mod}_\sigma(\Phi)$.

3. Eine Klasse K von σ-Strukturen ist *endlich axiomatisierbar* (oder *elementar*), wenn es eine endliche Satzmenge $\Phi \subseteq S_\sigma$ gibt, so dass $K = \mathrm{Mod}_\sigma(\Phi)$.

Endliche Axiomatisierbarkeit

Beispiel 6.2. Die Klassen aller Graphen, Ordnungsstrukturen, Gruppen, Körper sind endlich axiomatisierbar.

Lemma 6.3. *Sei K eine endlich axiomatisierbare Klasse von σ-Strukturen. Dann gibt es einen Satz $\varphi \in S_\sigma$ mit $K = \mathrm{Mod}_\sigma(\{\varphi\})$.*

Korollar 6.4. *Sei K eine endlich axiomatisierbare Klasse von σ-Strukturen. Dann ist auch*

$$K^{\complement} := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur}, \mathcal{A} \notin K\}$$

endlich axiomatisierbar.

Beweis (von Lemma 6.3)
$K = \mathrm{Mod}_\sigma(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \iff K = \mathrm{Mod}_\sigma(\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\})$. □

Mächtigkeit von Strukturen

Definition 6.5. Die *Mächtigkeit* einer Struktur oder Interpretation ist die Mächtigkeit ihres Trägers. Eine Struktur oder Interpretation ist *endlich* bzw. *unendlich*, *abzählbar*, *überabzählbar*, wenn sie eine entsprechende Mächtigkeit hat.

Satz 6.6. *Die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen ist axiomatisierbar.*

Beweis
Für $n \geq 1$ sei

$$\varphi_n := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i \doteq x_j.$$

Dann gilt für alle $n \geq 1$ und alle Strukturen $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \models \varphi_n \iff |A| \geq n.$$

Also axiomatisiert $\{\varphi_n \mid n \geq 1\}$ die Klasse der unendlichen Strukturen. □

Nichtaxiomatisierbarkeit der Endlichkeit

Lemma 6.7. *Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ eine Formelmenge, die beliebig mächtige endliche Modelle besitzt. Dann besitzt Φ ein unendliches Modell.*

Satz 6.8.
1. *Die Klasse aller endlichen σ-Strukturen ist nicht axiomatisierbar.*
2. *Die Klasse aller unendlichen σ-Strukturen ist nicht endlich axiomatisierbar.*

Beweis (von Lemma 6.7)
Für $n \geq 1$ sei φ_n wie im Beweis von Beispiel 6.6. Sei

$$\Phi' := \Phi \cup \{\varphi_n \mid n \geq 1\}.$$

Dann ist jede endliche Teilmenge von Φ' erfüllbar, also nach dem Kompaktheitssatz auch Φ'. Alle Modelle von Φ' sind aber unendlich. Also besitzt Φ' und damit auch Φ ein unendliches Modell. □

Beweis (von Satz 6.8)

1. Folgt aus Lemma 6.7.
2. Folgt aus (1) und Korollar 6.4.

Nichtaxiomatisierbarkeit des Zusammenhangs von Graphen

Satz 6.9. *Die Klasse aller zusammenhängenden Graphen ist nicht axiomatisierbar.*

Beweis
Sei $\psi_0(x,y) := x \doteq y$ und für $n \geq 1$

$$\psi_n(x,y) := \exists x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_n \big(x_0 \doteq x \wedge x_n \doteq y \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} E x_{i-1} x_i\big).$$

Dann gilt für alle Graphen $\mathcal{G}$ und alle $a, b \in G$:

$$\mathcal{G} \models \psi[a,b] \iff \text{es gibt einen Weg der Länge } n \text{ von } a \text{ nach } b.$$

Also

$$\mathcal{G} \models \{\neg\psi_n(x,y) \mid n \geq 1\} \left[\tfrac{a}{x}, \tfrac{b}{y}\right] \iff \text{es gibt keinen Weg von } a \text{ nach } b.$$

Angenommen: $\Phi \subseteq S_{\sigma_{\text{Graph}}}$ axiomatisiert die Klasse der zusammenhängenden Graphen.
Dann ist

$$\Psi := \Phi \cup \{\neg\psi_n(x,y) \mid n \geq 1\}$$

unerfüllbar.
Jede endliche Teilmenge Ψ_0 von Ψ ist aber erfüllbar: Sei $m := \max\{n \mid \psi_n \in \Psi_0\}$. Sei $\mathcal{G}_m$ der Graph mit Träger $G_m := \{0, \ldots, m+1\}$ und $E^{\mathcal{G}} := \{(i-1, i) \mid 1 \leq i \leq m+1\}$. Dann gilt:

1. $\mathcal{G}_m \models \Phi$, denn $\mathcal{G}_m$ ist zusammenhängend.
2. $\mathcal{G}_m \models \neg\psi_n[0, m+1]$ für alle $n \leq m$.

Also $\mathcal{G}_m \models \Psi_0 \left[\tfrac{0}{x}, \tfrac{m+1}{y}\right]$.
Nach dem Kompaktheitssatz ist damit auch Ψ erfüllbar. *Widerspruch.* □

Der Satz von Löwenheim und Skolem

Satz 6.10 (Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Jede abzählbare erfüllbare Formelmenge $\Phi \subseteq L_\sigma$ besitzt ein abzählbares Modell.*

Korollar 6.11. *Sei σ abzählbar. Dann ist die Klasse aller überabzählbaren σ-Strukturen nicht axiomatisierbar.*

Bemerkung 6.12. Das Korollar gilt sogar für beliebige und nicht bloß für abzählbare Symbolmengen σ.

Beweis (des Satzes von Löwenheim und Skolem)
Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ abzählbar.
OBdA können wir annehmen:

1. σ ist abzählbar (sonst ersetzen wir σ durch $\{s \in \sigma \mid s \text{ kommt in } \Phi \text{ vor}\}$).
2. Var $\setminus$ frei(Φ) ist unendlich (sonst ersetzen wir überall v_i durch v_{2i}, simultan für alle $i \geq 0$).

Nach den Lemmata 2.38 und 2.39 gibt es ein $\Theta \subseteq L_\sigma$ mit $\Phi \subseteq \Theta$, das erfüllbar und negationstreu ist und Beispiele enthält. Wähle so ein Θ.
Nach dem Satz von Henkin wird Θ von seiner reduzierten Terminterpretation $\big([\mathcal{A}_\Theta], [\beta_\Theta]\big)$ erfüllt. Es gilt aber $|[A_\Theta]| \leq |T_\sigma|$. Weil σ abzählbar ist, ist T_σ abzählbar. Also ist $\big([\mathcal{A}_\Theta], [\beta_\Theta]\big)$ ein abzählbares Modell von Θ und damit von Φ. $\square$

Der Satz von Löwenheim und Skolem für beliebige Formelmengen

Beispiel 6.13. Sei $\tau := \{c_r \mid r \in \mathbb{R}\}$, wobei c_r für alle $r \in \mathbb{R}$ ein Konstantensymbol ist, und

$$\Phi := \{\neg c_r \doteq c_s \mid r, s \in \mathbb{R}, r \neq s\}.$$

Dann ist Φ erfüllbar, hat aber kein abzählbares Modell.

Satz 6.14 (Absteigender Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ eine unendliche erfüllbare Formelmenge. Dann besitzt Φ ein Modell, dessen Mächtigkeit höchstens so groß ist wie die Mächtigkeit von Φ.*

(Einen Beweis findet man in [Ebbinghaus et al., 1996].)

Der aufsteigende Satz von Löwenheim und Skolem und der Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski

Satz 6.15 (Aufsteigender Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ eine erfüllbare Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Dann gibt es zu jeder Menge B ein Modell von Φ, dessen Mächtigkeit mindestens so groß ist wie die Mächtigkeit von B.*

Satz 6.16 (Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski)**.** *Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ eine erfüllbare Formelmenge, die ein unendliches Modell besitzt. Sei B eine unendliche Menge, deren Mächtigkeit mindestens so groß ist wie die Mächtigkeit von Φ. Dann besitzt Φ ein Modell, dessen Mächtigkeit gleich der Mächtigkeit von B ist.*

Der aufsteigende Satz von Löwenheim und Skolem folgt sofort aus dem Satz von Löwenheim, Skolem und Tarski.

Beweis (des Satzes von Löwenheim, Skolem und Tarski)
Seien c_b, für $b \in B$, Konstantensymbole, die paarweise verschieden und nicht in σ enthalten sind. Sei

$$\Phi' := \Phi \cup \{c_a \neq c_b \mid a, b \in B \text{ mit } a \neq b\}.$$

Behauptung: Jede endliche Teilmenge von Φ' ist erfüllbar.

Beweis: Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi'$ endlich. Sei $B_0 = \{b \in B \mid c_b \text{ kommt in } \Phi_0 \text{ vor}\}$. Dann ist B_0 endlich, etwa $B_0 = \{b_1, \dots, b_n\}$. Sei $\mathcal{A}$ ein unendliches Modell von Φ, und seien $a_1, \dots, a_n \in A$ paarweise verschieden und $a \in A$ beliebig. Sei $\mathcal{A}'$ die $\sigma \cup \{c_b \mid b \in B\}$-Expansion von $\mathcal{A}$ mit $c_{b_i} := a_i$ für $1 \leq i \leq n$ und $c_b = a$ für alle $b \in B \setminus B_0$. Dann gilt $\mathcal{A}' \models \Phi_0$.

Nach dem Kompaktheitssatz ist damit auch Φ' erfüllbar. Alle Modelle von Φ' sind mindestens so mächtig wie B. Außerdem ist Φ' höchstens so mächtig wie B. Nach dem absteigenden Satz von Löwenheim und Skolem besitzt damit Φ' auch ein Modell, das höchstens und damit genauso mächtig wie B ist. □

Elementare Äquivalenz

Definition 6.17.
1. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind *elementar äquivalent* (wir schreiben: $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$), wenn für alle Sätze $\varphi \in S_\sigma$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$
2. Die *Theorie* einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Satzmenge
$$\mathsf{Th}(\mathcal{A}) := \{\varphi \in S_\sigma \mid \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Lemma 6.18. *Für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ gilt:*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \iff \mathcal{B} \models \mathsf{Th}(\mathcal{A}).$$

Korollar 6.19. *Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die Klasse aller zu $\mathcal{A}$ elementar äquivalenten σ-Strukturen axiomatisierbar.*

Elementare Äquivalenz und Isomorphie

Lemma 6.20. *Seien σ endlich und $\mathcal{A}$ eine endliche σ-Struktur. Dann gibt es einen Satz $\varphi_{\mathcal{A}}$, der $\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie beschreibt, das heißt, für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt:*

$$\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}.$$

Satz 6.21. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.*

1. *Für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ gilt:*
$$\mathcal{B} \cong \mathcal{A} \implies \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}.$$
2. *Wenn $\mathcal{A}$ endlich ist, so gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$:*
$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \iff \mathcal{B} \cong \mathcal{A}.$$
3. *Wenn $\mathcal{A}$ unendlich ist, so gibt es eine σ-Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$, aber $\mathcal{B} \not\cong \mathcal{A}$.*

Beweis (von Lemma 6.20)
Sei $\mathcal{A}$ endliche σ-Struktur mit $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, wobei $a_i \neq a_j$ für $1 \leq i < j \leq n$. Setze

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n) := & \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg x_i \doteq x_j \\
& \wedge \forall y \bigvee_{i=1}^{n} y \doteq x_i \\
& \wedge \bigwedge_{\substack{R \in \sigma \\ k\text{-stellig}}} \Big(\bigwedge_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n \\ (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \in R^{\mathcal{A}}}} R x_{i_1} \ldots x_{i_n} \wedge \bigwedge_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n \\ (a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) \notin R^{\mathcal{A}}}} \neg R x_{i_1} \ldots x_{i_n} \Big) \\
& \wedge \bigwedge_{\substack{f \in \sigma \\ k\text{-stellig}}} \bigwedge_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_k, j \leq n \\ f^{\mathcal{A}}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = a_j}} f x_{i_1} \ldots x_{i_n} \doteq x_j \\
& \wedge \bigwedge_{c \in \sigma} \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq n \\ c^{\mathcal{A}} = a_j}} c \doteq x_j.
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle Strukturen $\mathcal{B}$ und alle $\{b_1, \ldots, b_n\}$:

$$\mathcal{B} \models \psi_{\mathcal{A}}[b_1, \ldots, b_n] \iff \begin{array}{l} B = \{b_1, \ldots, b_n\} \text{ und} \\ \text{die Abbildung } b_i \mapsto a_i \text{ ist ein Isomorphismus von } \mathcal{B} \text{ nach } \mathcal{A}. \end{array}$$

Setze

$$\varphi_{\mathcal{A}} := \exists x_1 \ldots \exists x_n \; \psi_{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n).$$

$\square$

Beweis (von Satz 6.21) 1. Folgt sofort aus dem Isomorphielemma.

2. Für endliche σ folgt die Behauptung aus Lemma 6.20:

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \implies \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}} \implies \mathcal{B} \cong \mathcal{A}.$$

Weiterhin gilt $|A| = |B|$ (für beliebige σ), denn

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \implies \mathcal{A}|_{\emptyset} \equiv \mathcal{B}|_{\emptyset} \implies \mathcal{A}|_{\emptyset} \cong \mathcal{B}|_{\emptyset} \implies |A| = |B|.$$

Die zweite Implikation folgt hier wieder aus Lemma 6.20.

Nehmen wir als nächstes an, σ ist abzählbar unendlich. Sei etwa

$$\sigma = \{s_0, s_1, s_2, \ldots\}.$$

Für $i \geq 0$ seien

$$\begin{aligned} \sigma_i &:= \{s_0, \ldots, s_i\}, \\ \mathcal{A}_i &:= \mathcal{A}|_{\sigma_i} \\ \mathcal{B}_i &:= \mathcal{B}|_{\sigma_i} \\ \varphi_i &:= \varphi_{\mathcal{A}_i}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\mathcal{B}_i \equiv \mathcal{A}_i$, und weil σ_i endlich ist, folgt $\mathcal{A}_i \cong \mathcal{B}_i$. Sei

$$I_i := \{f : A \to B \mid f \text{ Isomorphismus von } \mathcal{A}_i \text{ nach } \mathcal{B}_i\}.$$

Dann gilt $I_i \neq \emptyset$ für alle $i \geq 0$ und

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots .$$

Weil A und damit B endlich sind, ist auch I_0 endlich.

Folglich gibt es ein i_0, so dass $I_j = I_{i_0}$ für alle $j \geq i_0$. Dann ist jedes $f \in I_{i_0}$ ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Es bleibt der Fall überabzählbarer Symbolmengen σ. Weil A und B endlich sind, gibt es nur abzählbar viele endlichstellige Relationen und Funktionen auf A bzw. B. Also gibt es ein abzählbares $\sigma_0 \subseteq \sigma$, so dass für alle Symbole $s \subseteq \sigma \setminus \sigma_0$ ein Symbol $s_0 \in \sigma_0$ existiert mit $s^{\mathcal{A}} = s_0^{\mathcal{A}}$ und $s^{\mathcal{B}} = s_0^{\mathcal{B}}$.

Wir wählen so ein σ_0. Weil σ_0 abzählbar und $\mathcal{A}|_{\sigma_0} \equiv \mathcal{B}|_{\sigma_0}$, gilt $\mathcal{A}|_{\sigma_0} \cong \mathcal{B}|_{\sigma_0}$. Nach der Definition von σ_0 ist aber jeder Isomorphismus von $\mathcal{A}|_{\sigma_0}$ nach $\mathcal{B}|_{\sigma_0}$ auch ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

3. $\mathcal{A}$ unendlich $\implies$ $\mathsf{Th}(\mathcal{A})$ hat ein unendliches Modell $\implies$ $\mathsf{Th}(\mathcal{A})$ hat ein Modell der Mächtigkeit $\geq 2^{|A|} > |A|$ nach dem aufsteigenden Satz von Löwenheim und Skolem. $\square$

Nichtstandardmodelle der Arithmetik

Zur Erinnerung

$\sigma_{\text{Ar}} = \{\leq, +, \times, 0, 1\}$, wobei $\leq$ ein zweistelliges Relationssymbol, $+, \times$ zweistellige Funktionssymbole und $0, 1$ Konstantensymbole sind.

Das *Standardmodell der Arithmetik* ist die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}),$$

wobei $\leq^{\mathcal{N}}$, $+^{\mathcal{N}}$ und $\times^{\mathcal{N}}$ die natürliche Ordnung, Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind und $0^{\mathcal{N}} := 0, 1^{\mathcal{N}} := 1$.

Definition 6.22. Ein *Nichtstandardmodell der Arithmetik* ist eine zu $\mathcal{N}$ elementar äquivalente, aber nicht isomorphe σ_{Ar}-Struktur.

Der Satz von Skolem

Satz 6.23. *Es gibt ein abzählbares Nichtstandardmodell der Arithmetik.*

Beweis
Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir einen Term $\underline{n} \in T_{\sigma_{\text{Ar}}}$: Sei

$$\underline{0} := 0$$

und für $n \geq 0$

$$\underline{n+1} := \underline{n} + 1.$$

Sei

$$\Phi := \mathsf{Th}(\mathcal{N}) \cup \{\neg x = \underline{n} \mid n \geq 0\}.$$

Dann ist jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar, und zwar durch eine Interpretation $(\mathcal{N}, \beta)$ für eine geeigneten Belegung $\beta : \{x\} \to \mathbb{N}$. Nach dem Kompaktheitssatz ist damit auch Φ erfüllbar. Nach dem Satz von Löwenheim und Skolem besitzt Φ ein abzählbares Modell.
Sei $(\mathcal{A}, \beta)$ ein abzählbares Modell von Φ. Dann gilt $\mathcal{A} \models \mathsf{Th}(\mathcal{N})$, also $\mathcal{A} \equiv \mathcal{N}$.
Angenommen: $\mathcal{A} \cong \mathcal{N}$.
Sei $f : \mathcal{N} \cong \mathcal{A}$. Dann gilt $f(t^{\mathcal{N}}) = t^{\mathcal{A}}$ für alle Grundterme $t \in GT_{\sigma_{\text{Ar}}}$, also insbesondere $f(n) = f(\underline{n}^{\mathcal{N}}) = \underline{n}^{\mathcal{A}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $a := \beta(x)$. Dann gilt $a \neq \underline{n}^{\mathcal{A}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit $a \notin \mathsf{bild}(f)$. Also ist f nicht surjektiv. Widerspruch. $\square$

Bemerkung
Die Terme $\underline{n}$ verwenden wir nicht nur in diesem Beweis, sondern auch später immer wieder.

Beschreibung eines Nichtstandardmodells der Arithmetik
Sei $\mathcal{A} \models \mathsf{Th}(\mathcal{N})$ mit $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{N}$.
Dann ist $\leq^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung, denn die Ordnungsaxiome sind Teil von $\mathsf{Th}(\mathcal{N})$. Weil $\mathcal{A}$ die beiden folgenden Sätze aus $\mathsf{Th}(\mathcal{N})$ erfüllt, hat jedes Element aus $\mathcal{A}$ einen unmittelbaren Nachfolger, und alle Elemente außer $\underline{0}^{\mathcal{A}}$ haben einen unmittelbaren Vorgänger:

$$\begin{aligned}&\forall x \exists y \big(x < y \wedge \forall z (z \leq x \vee y \leq z)\big),\\ &\forall x \Big(x \doteq \underline{0} \vee \exists y \big(y < x \wedge \forall z (z \leq y \vee x \leq z)\big)\Big).\end{aligned}$$

Wie üblich verwenden wir hier $x < y$ als Abkürzung für $x \leq y \wedge \neg x \doteq y$.
Außerdem erfüllt $\mathcal{A}$ die folgenden Sätze aus $\mathsf{Th}(\mathcal{N})$:

$$\begin{aligned}&\forall x\ \underline{0} \leq x,\\ &\forall x (\underline{0} = x \vee \underline{1} \leq x),\\ &\forall x (\underline{0} = x \vee \underline{1} = x \vee \underline{2} \leq x),\\ &\forall x (\underline{0} = x \vee \underline{1} = x \vee \underline{2} = x \vee \underline{3} \leq x),\\ &\qquad\vdots\end{aligned}$$

Die Ordnung von $\mathcal{A}$ besteht damit aus einer Kopie von $(\mathbb{N}, \leq)$, in der die Terme $\underline{n}$ angeordnet sind, gefolgt von Kopien von $\mathbb{Z}$ (vgl. Abb. 8).

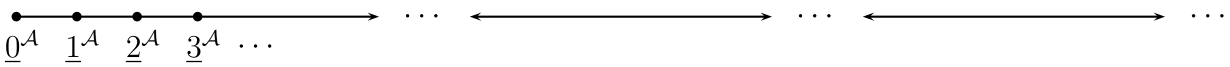

Abbildung 8. Ein Nichtstandardmodell $\mathcal{A}$ der Arithmetik

Außerdem erfüllt $\mathcal{A}$ folgende Sätze der Arithmetik für alle $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\underline{m} + \underline{n} = \underline{m+n} \quad \text{und} \quad \underline{m} \times \underline{n} = \underline{m \cdot n}.$$

Daraus folgt, dass $\mathcal{N}$ isomorph zum Anfangsstück von $\mathcal{A}$ mit Elementen $\{\underline{n}^{\mathcal{A}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist.

6.2 Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Vereinfachende Annahme

Vereinbarung
In diesem Paragraphen bezeichnet σ immer eine endliche relationale Symbolmenge (d.h., σ besteht aus endlich vielen Relationssymbolen).

Erinnerung: Quantorenrang

Die Funktion qr : $L_\sigma \to \mathbb{N}$ ist rekursiv wie folgt definiert:

- Für atomare φ ist $\mathrm{qr}(\varphi) := 0$.
- Ist $\varphi = \neg\psi$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \mathrm{qr}(\psi)$.
- Ist $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ oder $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \max\{\mathrm{qr}(\psi_1), \mathrm{qr}(\psi_2)\}$.
- Ist $\varphi = \exists x\ \psi$ oder $\varphi = \forall x\ \psi$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \mathrm{qr}(\psi) + 1$.

Wir bezeichnen $\mathrm{qr}(\varphi)$ als den *Quantorenrang* von φ.
Eine σ-Formel φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) = 0$ nennen wir *quantorenfrei*.

Varianten der elementaren Äquivalenz

Definition 6.24. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} := (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, $\overline{b} := (b_1, \dots, b_k) \in B^k$.

1. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind *elementar äquivalent* (wir schreiben: $\mathcal{A}, \overline{a} \equiv \mathcal{B}, \overline{b}$), wenn für alle Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in L_\sigma$ gilt:
$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k] \iff \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_k]. \qquad (\star)$$
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ *n-äquivalent* (wir schreiben: $\mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{B}, \overline{b}$), wenn $(\star)$ für alle Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in L_\sigma$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leq n$ gilt.

Bemerkung 6.25. In der Definition lassen wir $k = 0$ zu. In diesem Fall sind $\overline{a}$ und $\overline{b}$ jeweils das leere Tupel $()$. Allerdings schreiben wir üblicherweise $\mathcal{A} \equiv_{(n)} \mathcal{B}$ anstatt $\mathcal{A}, () \equiv_{(n)} \mathcal{B}, ()$ und bezeichnen entsprechend $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ anstatt $(\mathcal{A}, ())$ und $(\mathcal{B}, ())$ als elementar bzw. n-äquivalent.

Partielle Abbildungen

Seien A, B Mengen. Eine *partielle Abbildung* von A nach B ist eine Abbildung p mit $\mathrm{def}(p) \subseteq A$ und $\mathrm{bild}(p) \subseteq B$.

Notation. Seien A, B Mengen und $\overline{a} := (a_1, \dots, a_k) \in A^k$, $\overline{b} := (b_1, \dots, b_k) \in B^k$.

- Für eine partielle Abbildung p von A nach B schreiben wir $p(\overline{a}) = \overline{b}$, um auszudrücken, dass $a_1, \dots, a_k \in \mathrm{def}(p)$ und $p(a_i) = b_i$ für $1 \leq i \leq k$.

  Sind $a_1, \dots, a_k \in \mathrm{def}(p)$, so bezeichnen wir mit $p(\overline{a})$ das eindeutige Tupel $\overline{b}$ mit $p(\overline{a}) = \overline{b}$.
- $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ bezeichnet die partielle Abbildung p mit $\mathrm{def}(p) = \{a_1, \dots, a_k\}$ und $p(\overline{a}) = \overline{b}$.

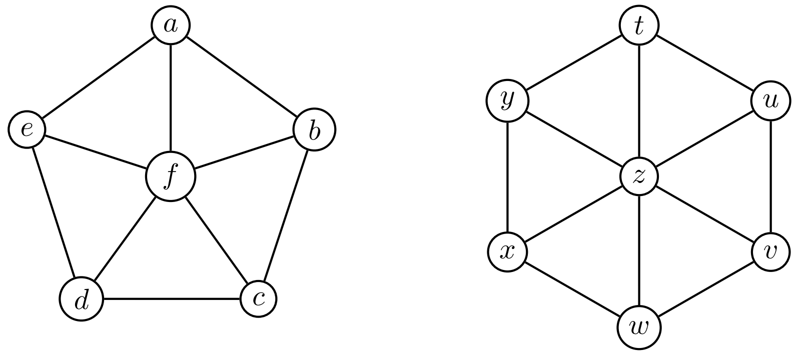

Abbildung 9.

Partielle Isomorphismen

Definition 6.26. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein *partieller Isomorphismus* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine injektive partielle Abbildung p von A nach B, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$, alle k-stelligen $R \in \sigma$ und alle $\overline{a} \in \text{def}(p)^k$ gilt:

$$\overline{a} \in R^{\mathcal{A}} \iff p(\overline{a}) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Beispiel
Für die beiden Graphen in Abbildung 9 ist die Abbildung

$$(a, c, e, f) \mapsto (x, u, w, z)$$

ein partieller Isomorphismus. Die Abbildung

$$(a, e) \mapsto (t, x)$$

ist keiner.

Quantorenfreie Äquivalenz

Lemma 6.27. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k$, $\overline{b} \in B^k$. Dann gilt:*

$\mathcal{A}, \overline{a} \equiv_0 \mathcal{B}, \overline{b} \iff$ *Es gibt einen partiellen Isomorphismus p von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ mit $p(\overline{a}) = \overline{b}$.*

Beweis „$\Longrightarrow$“ Gelte $\mathcal{A}, \overline{a} \equiv_0 \mathcal{B}, \overline{b}$.

Dann gilt für $1 \leq i, j \leq k$:

$$\Big(\mathcal{A} \models x_i \doteq x_j \left[\tfrac{a_i}{x_i}, \tfrac{a_j}{x_j}\right] \iff \mathcal{B} \models x_i \doteq x_j \left[\tfrac{b_i}{x_i}, \tfrac{b_j}{x_j}\right]\Big)$$
$$\Longrightarrow \big(a_i = a_j \iff b_i = b_j\big).$$

Also ist die Abbildung $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ wohldefiniert und injektiv.

Weiterhin gilt für alle r-stelligen $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq k$:

$$\Big(\mathcal{A} \models Rx_{i_1} \dots x_{i_r} \Big[\tfrac{a_{i_1}}{x_{i_1}}, \dots, \tfrac{a_{i_r}}{x_{i_r}}\Big] \iff \mathcal{B} \models Rx_{i_1} \dots x_{i_r} \Big[\tfrac{b_{i_1}}{x_{i_1}}, \dots, \tfrac{b_{i_r}}{x_{i_r}}\Big]\Big)$$
$$\implies \big((a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \iff (b_{i_1}, \dots, b_{i_r}) \in R^{\mathcal{B}}\big).$$

Also ist $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ ein partieller Isomorphismus, der offensichtlich $\overline{a}$ auf $\overline{b}$ abbildet.

„$\Longleftarrow$" Sei p einen partieller Isomorphismus p von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ mit $p(\overline{a}) = \overline{b}$. Wir zeigen per Induktion über den Aufbau, dass für alle quantorenfreien $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in L_\sigma$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k] \iff \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_k].$$

Für atomare φ gilt dies, weil p ein partieller Isomorphismus mit $\overline{b} = p(\overline{a})$ ist, und der Induktionsschritt ist trivial, etwa für $\varphi = \neg\psi$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k] &\iff \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \dots, a_k] \\ &\iff \mathcal{B} \not\models \psi[b_1, \dots, b_k] && \text{(Induktionsannahme)} \\ &\iff \mathcal{B} \models \varphi[b_1, \dots, b_k]. \end{aligned}$$

□

Hin- und Her-Systeme

Definition 6.28. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein *Hin- und Her-System* (kurz: *HH-System*) von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Folge $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Mengen von partiellen Isomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, so dass für alle $i \geq 1$ gilt:

- (Hin) Für alle $p \in I_i$ und $a \in A$ existiert ein $q \in I_{i-1}$ mit $p \subseteq q$ und $a \in \mathrm{def}(q)$.
- (Her) Für alle $p \in I_i$ und $b \in B$ existiert ein $q \in I_{i-1}$ mit $p \subseteq q$ und $b \in \mathrm{bild}(q)$.

Der *Rang* eines HH-Systems $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist die Zahl

$$\mathrm{rg}\big((I_i)_{i \in \mathbb{N}}\big) := \begin{cases} \omega & \text{falls } I_i \neq \emptyset \text{ für alle } i \in \mathbb{N}, \\ \min\{i \mid I_i = \emptyset\} - 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel

Ein Hin- und Her-System vom Rang 2 für die Graphen in Abbildung 10:

$$\begin{aligned} I_n &:= \emptyset && \text{für } n > 2 \\ I_2 &:= \{\emptyset\} \\ I_1 &:= \{a \mapsto v, b \mapsto w, c \mapsto x, d \mapsto y, d \mapsto z\} \\ I_0 &:= \big\{aa \mapsto vv, ab \mapsto vw, ac \mapsto vx, ac \mapsto vy, ad \mapsto vz, \\ &\quad\ bb \mapsto ww, bc \mapsto wx, bd \mapsto wy, bd \mapsto wz, ba \mapsto wv, \\ &\quad\ cc \mapsto xx, cd \mapsto xy, ca \mapsto xz, ca \mapsto xv, cb \mapsto xw, \\ &\quad\ dd \mapsto yy, da \mapsto yz, db \mapsto yv, db \mapsto yw, dc \mapsto yx, \\ &\quad\ dd \mapsto zz, da \mapsto zv, db \mapsto zw, db \mapsto zx, dc \mapsto zy\big\} \end{aligned}$$

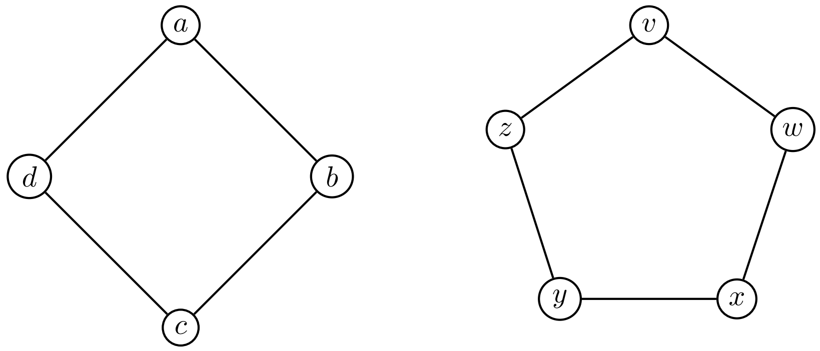

Abbildung 10.

Endliche Isomorphie

Definition 6.29. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k$, $\overline{b} \in B^k$.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ *n-isomorph* (wir schreiben: $\mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}$), wenn es ein HH-System $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt, so dass für alle $i \leq n$ ein $p \in I_i$ mit $p(\overline{a}) = \overline{b}$ existiert

2. $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$ sind *endlich isomorph* (wir schreiben: $\mathcal{A}, \overline{a} \cong_\omega \mathcal{B}, \overline{b}$), wenn es ein HH-System $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ ein $p \in I_i$ mit $p(\overline{a}) = \overline{b}$ existiert.

Notation. Wir schreiben $(I_i) : \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}$ bzw. $(I_i) : \mathcal{A}, \overline{a} \cong_\omega \mathcal{B}, \overline{b}$, um anzudeuten, dass $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ein HH-System von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist, das die Bedingungen von (1) bzw. (2) der Definition erfüllt.

Endliche Isomorphie von Strukturen

Bemerkung 6.30. In der Definition der endlichen Isomorphie lassen wir den Fall $k = 0$ zu und unterschlagen wieder das leere Tupel $()$ in der Notation.

Beobachtung 6.31. *Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Strukturen.*

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\mathcal{A} \cong_n \mathcal{B} \iff \text{es gibt ein Hin- und Her-System } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ von } \mathcal{A} \text{ nach } \mathcal{B} \text{ vom Rang } n.$$

2.

$$\mathcal{A} \cong_\omega \mathcal{B} \iff \text{es gibt ein Hin- und Her-System } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ von } \mathcal{A} \text{ nach } \mathcal{B} \text{ vom Rang } \omega.$$

Beispiel
Seien $\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5$ die beiden Graphen aus Abbildung 10.
Dann gilt $\mathcal{C}_4 \cong_2 \mathcal{C}_5$, denn im letzten Beispiel haben wir ein HH-System von $\mathcal{C}_4$ nach $\mathcal{C}_5$ vom Rang 2 angegeben.
Es gilt $\mathcal{C}_4 \not\cong_3 \mathcal{C}_5$. Denn *angenommen*, $(I_i)_{i \geq 0}$ ist ein HH-System von Rang 3. Sei $p_0 \in I_3$. Wähle $p_1 \in I_2$ mit $p_1 \supseteq p_0$ und $a \in \mathrm{def}(p_1)$ und $p_2 \in I_1$ mit $p_2 \supseteq p_1$ und $c \in \mathrm{def}(p_2)$. OBdA gelte $p_2(a) = v$. Dann gilt $p_2(c) \in \{x, y\}$. OBdA gelte $p_2(c) = x$. Dann läßt sich p_2 nicht zu einem partiellen Isomorphismus $p_3 \in I_0$ mit $p_3 \supseteq p_2$ und $z \in \mathrm{bild}(p_3)$ erweitern. *Widerspruch*.
Weiterhin gilt etwa $\mathcal{C}_4, a \cong_1 \mathcal{C}_5, v$ und $\mathcal{C}_4, a \not\cong_2 \mathcal{C}_5, v$.

Endliche Isomorphie vs n-Isomorphie

Lemma 6.32. *Seien $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k$, $\overline{b} \in B^k$. Dann gilt:*

$$\mathcal{A}, \overline{a} \cong_\omega \mathcal{B}, \overline{b} \iff \textit{für alle } n \in \mathbb{N}: \ \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}.$$

Beweis „$\Longrightarrow$" Trivial.

„$\Longleftarrow$" Für $n \in \mathbb{N}$ sei $(I_i^n) : \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}$. Setze

$$I_i := \bigcup_{n \geq 1} I_i^n \qquad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dann $(I_i) : \mathcal{A}, \overline{a} \cong_\omega \mathcal{B}, \overline{b}$. □

Verkettung von Tupeln

Notation. Seien $k \geq 0$, A eine Menge und $\overline{a} := (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$.

- Für alle $b \in A$ bezeichnet $\overline{a}b$ das Tupel $(a_1, \ldots, a_k, b)$.
- Für alle $\ell \geq 0$ und $\overline{b} := (b_1, \ldots, b_\ell) \in A^\ell$ bezeichnet $\overline{a}\overline{b}$ das Tupel $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell)$.

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a}_0 \in A^k, \overline{b}_0 \in B^k$.

Das Spiel EF$_n(\mathcal{A}, \overline{a}_0, \mathcal{B}, \overline{b}_0)$
n-Zug Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a}_0)$ und $(\mathcal{B}, \overline{b}_0)$

- Das Spiel wird von zwei Spielern I und II gespielt.
- *Positionen* sind Paare $(\overline{a}, \overline{b}) \in A^\ell \times B^\ell$, wobei $k \leq \ell \leq k + n$. Die Anfangsposition ist $(\overline{a}_0, \overline{b}_0)$.

- In jeder *Runde* des Spiels wird die aktuelle Position $(\overline{a}, \overline{b})$ wie folgt in eine neue Position $(\overline{a}a', \overline{b}b')$ überführt: Spieler I wählt entweder $a' \in A$ oder $b' \in B$, und dann wählt Spieler II $b' \in B$ bzw. $a' \in A$.

- Nach n Runden ist eine Partie zu Ende. Spieler II hat die Partie *gewonnen*, wenn in der Endposition
$$\big((a_1, \ldots, a_{k+n}), (b_1, \ldots, b_{k+n})\big)$$
die Abbildung $(a_1, \ldots, a_{k+n}) \mapsto (b_1, \ldots, b_{k+n})$ ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist; sonst hat Spieler I gewonnen.

Gewinnstrategien
Eine *Strategie* für einen der Spieler in einem Ehrenfeucht-Fraïssé Spiel ist eine Abbildung, die ihm für jede angefangene Partie den nächsten Zug vorgibt. Eine *Gewinnstrategie* ist eine Strategie, mit der er für alle möglichen Antworten des anderen Spielers gewinnt.

Spielcharakterisierung der n-Isomorphie

Satz 6.33. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a}_0 \in A^k$, $\overline{b}_0 \in B^k$. Dann gilt:*

$$\mathcal{A}, \overline{a}_0 \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}_0 \iff \text{Spieler II hat eine Gewinnstrategie für das Spiel } \mathrm{EF}_n(\mathcal{A}, \overline{a}_0, \mathcal{B}, \overline{b}_0).$$

Beweis „$\Longrightarrow$“ Sei $(I_i) : \mathcal{A}, \overline{a}_0 \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}_0$.

Spieler II spielt so, dass für alle Positionen $(\overline{a}_i, \overline{b}_i)$, die in Runde i erreicht werden, ein $p_i \in I_{n-i}$ mit $p_i(\overline{a}_i) = \overline{b}_i$ existiert. Das ist möglich, weil ein $p_0 \in I_n$ mit $p(\overline{a}_0) = \overline{b}_0$ existiert und weil $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ die Hin- und Her-Eigenschaft besitzt.

Das ist eine Gewinnstrategie, weil p_n ein partieller Isomorphismus mit $p_n(\overline{a}_n) = \overline{b}_n$ für die Endpositionen $(\overline{a}_n, \overline{b}_n)$ ist.

„$\Longleftarrow$“ Sei S eine Gewinnstrategie für Spieler II im Spiel $\mathrm{EF}_n(\mathcal{A}, \overline{a}_0, \mathcal{B}, \overline{b}_0)$. Eine Position $(\overline{a}, \overline{b})$ heißt *S-erreichbar*, wenn es eine Partie des Spiels gibt, in der Spieler II gemäß S spielt und in der die Position $(\overline{a}, \overline{b})$ vorkommt.

Für $0 \leq i \leq n$ setzen wir:
$$I_i := \big\{\overline{a} \mapsto \overline{b} \;\big|\; \overline{a} \in A^{k+n-i}, \overline{b} \in B^{k+n-i}, (\overline{a}, \overline{b})\ S\text{-erreichbar}\big\}.$$

Für $i > n$ setzen wir $I_i := \emptyset$.

Behauptung: $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist ein HH-System.

Beweis: Weil für alle $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in \bigcup_{i\geq 1} I_i$ die Position $(\overline{a}, \overline{b})$ aus einer Partie des Spiels kommt, in der Spieler II gemäß seiner Strategie S spielt und damit gewinnt, ist $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ ein partieller Isomorphismus.

Hin: Sei $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in I_i$ für ein $i > 0$ und sei $a \in A$. Sei $b \in B$ die Antwort von Spieler II auf die Wahl von a durch Spieler I in Position $(\overline{a}, \overline{b})$. Dann ist $\overline{a}a \mapsto \overline{b}b \in I_{i-1}$.

Her: Analog.

Außerdem gilt $\overline{a}_0 \mapsto \overline{b}_0 \in I_n$. Das zeigt $(I_i) : \mathcal{A}, \overline{a}_0 \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}_0$. □

Der Satz von Fraïssé

Satz 6.34. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k$, $\overline{b} \in B^k$. Dann gilt:*

$$\mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{B}, \overline{b} \iff \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}.$$

Korollar 6.35. *Seien $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k$, $\overline{b} \in B^k$. Dann gilt:*

$$\mathcal{A}, \overline{a} \equiv \mathcal{B}, \overline{b} \iff \mathcal{A}, \overline{a} \cong_\omega \mathcal{B}, \overline{b}.$$

Bemerkung
Man erinnere sich an unsere Vereinbarung, dass σ immer eine endliche Symbolmenge bezeichnet. Tatsächlich gilt die Hinrichtung des Satzes von Fraïssé für unendliche Symbolmengen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt. Die Rückrichtung (bewiesen in Lemma 6.36) gilt allerdings auch für unendliche Symbolmengen.

Beispiel
Sei $\sigma := \{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, wobei P_i 1-stelliges Relationssymbol für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir definieren σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ durch:

$$\begin{aligned} A &:= \{a_M \mid M \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich}\}, \\ P_i^{\mathcal{A}} &:= \{a_M \mid i \in M\} && \text{für } i \in \mathbb{N}, \\ B &:= \{b_M \mid M \subseteq \mathbb{N}\}, \\ P_i^{\mathcal{B}} &:= \{b_M \mid i \in M\} && \text{für } i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, aber $\mathcal{A} \not\cong_\omega \mathcal{B}$.

Behauptung 1: Für alle endlichen $\sigma_0 \subseteq \sigma$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{A}_n|_{\sigma_0} \cong_n \mathcal{B}_n|_{\sigma_0}.$$

Beweis: Seien $\sigma_0 \subseteq \sigma$ endlich und $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}|_{\sigma_0}$, $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B}|_{\sigma_0}$. Ferner sei $S_0 := \{i \mid P_i \in \sigma_0\}$. Man beachte: Eine partielle Abbildung p von A nach B ist genau dann ein partieller Isomorphismus von $\mathcal{A}_0$ nach $\mathcal{B}_0$, wenn für alle $a_M \in \text{def}(p)$ gilt: $p(a_M) = b_{M'}$ für ein M' mit $M' \cap S_0 = M \cap S_0$.
Für alle $i \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$I_i := \{p \mid p \text{ endlicher partieller Isomorphismus von } \mathcal{A}_0 \text{ nach } \mathcal{B}_0\}.$$

Dann gilt $(I_i) : \mathcal{A}_0 \cong \mathcal{B}_0$. Offensichtlich gilt $\emptyset \in I_i$ für alle i, also $I_i \neq \emptyset$. Um die Her-Eigenschaft zu beweisen, seien $p \in I_i$ und $b_M \in B$, OBdA mit $b_M \notin \text{bild}(p)$. Wähle ein endliches $M' \subseteq \mathbb{N}$ so, dass $a_{M'} \notin \text{def}(p)$ und $a_{M'} \cap S_0 = b_M \cap S_0$. Das ist immer möglich, weil es unendliche viele endliche Teilmengen $M' \subseteq \mathbb{N}$ mit $a_{M'} \cap S_0 = b_M \cap S_0$ gibt. Die Hin-Eigenschaft wird ähnlich bewiesen.

Aus Behauptung 1 und dem Satz von Fraïssé folgt $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, weil jede Formel $\varphi \in L_\sigma$ enthalten ist in L_{σ_0} für ein endliches $\sigma_0 \subseteq \sigma$.

Behauptung 2: $\mathcal{A} \not\cong_1 \mathcal{B}$.

Beweis: Es gibt keinen partiellen Isomorphismus p von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ mit $b_\mathbb{N} \in \text{bild}(p)$.

□

Beweis (von Korollar 6.35)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}, \overline{a} \equiv \mathcal{B}, \overline{b} &\iff \text{für alle } n \in \mathbb{N}: \ \mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{B}, \overline{b} \\ &\iff \text{für alle } n \in \mathbb{N}: \ \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b} && \text{(Satz 6.34)} \\ &\iff \mathcal{A}, \overline{a} \cong_\omega \mathcal{B}, \overline{b} && \text{(Lemma 6.32).} \end{aligned}$$

□

---

n-Isomorphie impliziert n-Äquivalenz

Lemma 6.36. *Seien $k, n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $\overline{a} \in A^k$, $\overline{b} \in B^k$. Dann gilt:*

$$\mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b} \implies \mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{B}, \overline{b}.$$

Beweis
Induktion über n.

$n = 0$: Lemma 6.27.

$n \to n+1$: Sei $(I_i) : \mathcal{A}, \overline{a} \cong_{n+1} \mathcal{B}, \overline{b}$. Zeige für alle $\varphi(x_1, \dots, x_k) \in L_\sigma$ mit $\text{qr}(\varphi) \leq n+1$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}]. \qquad (\star)$$

Wir beweisen $(\star)$ per Induktion über den Aufbau von φ.

φ atomar: Lemma 6.27.

$\varphi = \neg\psi$, $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$: Wie üblich.

$\varphi(\overline{x}) = \exists y \psi(\overline{x}, y)$:

„$\Longrightarrow$“ Gelte $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$. Sei $a' \in A$, so dass $\mathcal{A} \models \psi[\overline{a}, a']$. Sei $p \in I_{n+1}$ mit $p(\overline{a}) = \overline{b}$.
(Hin) $\Longrightarrow$ ex. $q \in I_n$ mit $q \supseteq p$ und $a' \in \operatorname{def}(q)$.
Wähle so ein q und setze $b' := q(b)$. Dann gilt

$$(I_i) : \mathcal{A}, \overline{a}a' \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}b'.$$

Weil $\operatorname{qr}(\psi) \leq n$ gilt dann nach Induktionsannahme (für die Induktion über n) $\mathcal{B} \models \psi[\overline{b}, b]$ und damit $\mathcal{B} \models \varphi[\overline{b}]$.

„$\Longleftarrow$“ Analog mit (Her).

$\varphi(\overline{x}) = \forall y \psi(\overline{x}, y)$: Analog wie im $\exists$-Fall für $\neg\varphi \equiv \exists y \neg\psi$. $\square$

Definierbarkeit der n-Isomorphie

Lemma 6.37. *Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und $\overline{a} := (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$.*
Dann gibt es eine Formel $\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}(v_1, \ldots, v_k) \in L_\sigma$ mit $\operatorname{qr}(\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}) = n$, so dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ und alle $\overline{b} := (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[b_1, \ldots, b_k] \iff \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}.$$

Außerdem ist für alle $k, n \in \mathbb{N}$ die Menge $\Theta^n_{\sigma,k} := \{\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}} \mid \mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur}, \overline{a} \in A^k\}$ endlich.

Beweis
Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.
Wir definieren $\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}$ induktiv über n für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k$.

$n = 0$: Sei $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$. Setze

$$\theta^0_{\mathcal{A},\overline{a}} := \bigwedge_{\substack{\varphi(v_1,\ldots,v_k) \in L_\sigma \\ \text{atomar oder negiert atomar} \\ \text{mit } \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\ldots,a_k]}} \varphi(v_1, \ldots, v_k).$$

Weil σ endlich ist, ist diese Konjunktion endlich und damit $\theta^0_{\mathcal{A},\overline{a}}$ wohldefiniert.
Außerdem gibt es nur endlich viele verschiedene Formeln $\theta^0_{\mathcal{A},\overline{a}}$.

$n \to n + 1$: Sei $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$. Setze

$$\begin{aligned}\theta^{n+1}_{\mathcal{A},\overline{a}} := {} & \forall v_{k+1} \bigvee_{a \in A} \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}a}(v_1, \ldots, v_{k+1}) \\ & \wedge \bigwedge_{a \in A} \exists v_{k+1} \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}a}(v_1, \ldots, v_{k+1}).\end{aligned}$$

Weil in der Konjunktion und Disjunktion nach Induktionsannahme jeweils nur endlich viele verschiedene Formeln stehen (selbst wenn $\mathcal{A}$ unendlich ist), ist diese Formel wohldefiniert.
Außerdem gibt es nur endlich viele verschiedene Formeln $\theta^{n+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}$.

Behauptung 1: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k$ gilt $\mathrm{qr}(\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}) = n$.

Beweis: Induktion über n.

Behauptung 2: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k$ gilt $\mathcal{A} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$.

Beweis: Induktion über n.

Im Folgenden sei $\mathcal{B}$ eine σ-Struktur.

Behauptung 3: Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k$ gilt:

$$\mathcal{B} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}] \implies \overline{a} \mapsto \overline{b} \text{ ist partieller Isomorphismus von } \mathcal{A} \text{ nach } \mathcal{B}.$$

Beweis: Induktion über n:

$n = 0$*:* Folgt aus Lemma 6.27.

$n \to n + 1$*:* $\mathcal{B} \models \theta^{n+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}] \implies \mathcal{B} \models \forall v_{k+1} \bigvee_{a \in A} \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}a}(\overline{v}, v_{k+1})$.

Seien $b \in B$ und $a \in A$, so dass $\mathcal{B} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}a}[\overline{b}, b]$. Nach Induktionsannahme ist $\overline{a}a \mapsto \overline{b}b$ ein partieller Isomorphismus. Damit ist auch $\overline{a} \mapsto \overline{b}$ ein partieller Isomorphismus.

Für $i \geq 0$ sei

$$I_i := \left\{\overline{a} \mapsto \overline{b} \;\middle|\; \exists k \geq 0 : \ \overline{a} \in A^k, \overline{b} \in B^k, \mathcal{B} \models \theta^i_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]\right\}.$$

Behauptung 4: $(I_i)_{i \geq 0}$ ist ein HH-System.

Beweis: Nach Behauptung 3 ist I_i eine Menge von partiellen Isomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, für alle $i \geq 0$.

Sei nun $i \geq 1$ und $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in I_i$.

Hin: Sei $a \in A$.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \theta^i_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}] &\implies \mathcal{B} \models \exists v_{k+1} \theta^{i-1}_{\mathcal{A},\overline{a}a}(\overline{v}, v_{k+1}) \left[\tfrac{\overline{b}}{\overline{v}}\right] \\ &\implies \text{ex. } b \in B : \ \mathcal{B} \models \theta^{i-1}_{\mathcal{A},\overline{a}a}[\overline{b}, b] \end{aligned}$$

Wähle so ein b. Dann gilt $\overline{a}a \mapsto \overline{b}b \in I_{i-1}$.

Her: Sei $b \in B$.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \theta^i_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}] &\implies \mathcal{B} \models \bigvee_{a \in A} \theta^{i-1}_{\mathcal{A},\overline{a}a}[\overline{b}, b] \\ &\implies \text{ex. } a \in A : \ \mathcal{B} \models \theta^{i-1}_{\mathcal{A},\overline{a}a}[\overline{b}, b] \end{aligned}$$

Wähle so ein a. Dann gilt $\overline{a}a \mapsto \overline{b}b \in I_{i-1}$.

Jetzt können wir die Äquivalenz

$$\mathcal{B} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[b_1, \ldots, b_k] \iff \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}.$$

beweisen:

„$\Longrightarrow$“ Gelte $\mathcal{B} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$. Dann ist $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in I_n$. Also $(I_i) : \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}$.

„$\Longleftarrow$“ Gelte $\mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b}$. Nach Lemma 6.36 gilt damit auch

$$\mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{B}, \overline{b} \tag{$\star$}$$

Nach Behauptung 1 ist $\mathrm{qr}(\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}) = n$, und nach Behauptung 2 gilt $\mathcal{A} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$. Also gilt wegen ($\star$) auch also auch $\mathcal{B} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}]$. □

Beweis (des Satzes von Fraïssé)

„$\Longrightarrow$“

$$\begin{aligned} \mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{B}, \overline{b} &\Longrightarrow \mathcal{B} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{b}] && \text{(weil } \mathrm{qr}(\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}) = n \text{ und } \mathcal{A} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]) \\ &\Longrightarrow \mathcal{A}, \overline{a} \cong_n \mathcal{B}, \overline{b} && \text{(Lemma 6.37).} \end{aligned}$$

„$\Longleftarrow$“ Lemma 6.36. □

Folgerungen aus dem Definierbarkeitslemma

Korollar 6.38. *Seien $n, k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und $\overline{a} := (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$.
Dann gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$ und alle $\overline{b} := (b_1, \ldots, b_k) \in B^k$:*

$$\mathcal{B} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[b_1, \ldots, b_k] \iff \mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{B}, \overline{b}.$$

Korollar 6.39. *Jede erfüllbare Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in L_\sigma$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leq n$ ist äquivalent zu einer Disjunktion von Formeln $\theta \in \Theta^n_{\sigma,k}$.*

Korollar 6.40. *Seien $n, k \in \mathbb{N}$. Bis auf logische Äquivalenz gibt es nur endlich viele Formeln $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leq n$.*

Beweis (von Korollar 6.38)
Folgt direkt aus Lemma 6.37 und dem Satz von Fraïssé. □

Beweis (von Korollar 6.39)
Sei $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in L_\sigma$ mit $\mathrm{qr}(\varphi) \leq n$. Wir setzen

$$\varphi'(\overline{x}) := \bigvee_{\substack{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Struktur}, \overline{a} \in A^k \\ \text{mit } \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]}} \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}).$$

Behauptung: $\varphi \equiv \varphi'$.

Beweis: „$\Longrightarrow$“ Sei $\mathcal{A}$ σ-Struktur und $\overline{a} \in A^k$, so dass $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$. Dann kommt $\theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x})$ als Disjunktionsglied in φ' vor. Es gilt $\mathcal{A} \models \theta^n_{\mathcal{A},\overline{a}}[\overline{a}]$ und damit $\mathcal{A} \models \varphi'[\overline{a}]$.

„$\Longleftarrow$“ Sei $\mathcal{A}$ σ-Struktur und $\overline{a} \in A^k$, so dass $\mathcal{A} \models \varphi'[\overline{a}]$. Gelte etwa $\mathcal{A} \models \theta^n_{\mathcal{A}',\overline{a}'}[\overline{a}]$ für eine σ-Struktur $\mathcal{A}'$ und ein Tupel $\overline{a}' \in (A')^k$ mit $\mathcal{A}' \models \varphi[\overline{a}']$.
Nach Korollar 6.38 folgt aus $\mathcal{A} \models \theta^n_{\mathcal{A}',\overline{a}'}[\overline{a}]$

$$\mathcal{A}, \overline{a} \equiv_n \mathcal{A}', \overline{a}'.$$

Also gilt auch $\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}]$. □

Beweis (von Korollar 6.40)
Folgt direkt aus Korollar 6.39 und der Endlichkeit von $\Theta^n_{\sigma,k}$. □

Einfache Anwendungen des Satzes von Fraïssé

Satz 6.41. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ zwei $\emptyset$-Strukturen.*

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|A|, |B| \geq n \implies \mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B}$.*
2. *Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ unendlich, so gilt $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.*

Satz 6.42.

$$(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <).$$

Beweis (von Satz 6.41)

1. Für $0 \leq i \leq n$ sei
$$I_i := \big\{\overline{a} \mapsto \overline{b} \;\big|\; \exists \ell \leq n - i : \; \overline{a} = (a_1, \ldots, a_\ell) \in A^\ell, \overline{b} = (b_1, \ldots, b_\ell) \in B^\ell, \text{ so dass } a_j \neq a_k \text{ und } b_j \neq b_k \text{ für } 1 \leq j < k \leq \ell\big\}.$$
Für $i > n$ sei $I_i := \emptyset$. Dann gilt $(I_i) : \mathcal{A} \cong_n \mathcal{B}$, und die Behauptung folgt aus dem Satz von Fraïssé.
2. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei
$$I_i := \big\{\overline{a} \mapsto \overline{b} \;\big|\; \exists \ell \in \mathbb{N} : \; \overline{a} = (a_1, \ldots, a_\ell) \in A^\ell, \overline{b} = (b_1, \ldots, b_\ell) \in B^\ell, \text{ so dass } a_j \neq a_k \text{ und } b_j \neq b_k \text{ für } 1 \leq j < k \leq \ell\big\}.$$
Dann gilt $(I_i) : \mathcal{A} \cong_\omega \mathcal{B}$, und die Behauptung folgt aus dem Satz von Fraïssé.

Beweis (von Satz 6.42)
Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei

$$I_i := \big\{\overline{a} \mapsto \overline{b} \;\big|\; \text{ex. } \ell \in \mathbb{N} : \overline{a} = (a_1, \ldots, a_\ell) \in \mathbb{Q}^\ell, \overline{b} = (b_1, \ldots, b_\ell) \in \mathbb{R}^\ell, \text{ so dass } a_1 < a_2 < \ldots < a_\ell \text{ und } b_1 < b_2 < \ldots < b_\ell\big\}.$$

Dann gilt $(I_i) : \mathcal{A} \cong_\omega \mathcal{B}$, und die Behauptung folgt aus dem Satz von Fraïssé.

Nichtaxiomatisierbarkeitssätze mit HH-Systemen

Lemma 6.43. *Sei K eine Klasse von σ-Strukturen, und seien $\mathcal{A}_n$, für $n \in \mathbb{N}$, und $\mathcal{B}$ σ-Strukturen, so dass:*

- *$\mathcal{A}_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{B} \notin K$.*
- *Für alle $n \geq 0$ gilt $\mathcal{A}_n \cong_n \mathcal{B}$ (bzw. Spieler II hat eine Gewinnstrategie für das Spiel EF$_n(\mathcal{A}_n, \mathcal{B})$).*

Dann ist K nicht axiomatisierbar.

Beweis
Angenommen: $K = \text{Mod}_\sigma(\Phi)$.
$\mathcal{B} \notin K \implies$ ex. $\varphi \in \Phi$, so dass $\mathcal{B} \not\models \varphi$.
Wähle so ein φ. Sei $n := \text{qr}(\varphi)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n \cong_n \mathcal{B} &\implies \mathcal{A}_n \not\models \varphi && \text{(Satz von Fraïssé)} \\ &\implies \mathcal{A}_n \not\models \Phi \\ &\implies \mathcal{A}_n \notin K. \end{aligned}$$

Widerspruch. □

Endliche Ordnungen

Satz 6.44. *Die Klasse der endlichen linearen Ordnungen ist nicht axiomatisierbar.*

Der Satz folgt leicht aus Lemma 6.7. Um die neue Methode zu illustrieren, geben wir einen Beweis mit HH-Systemen.

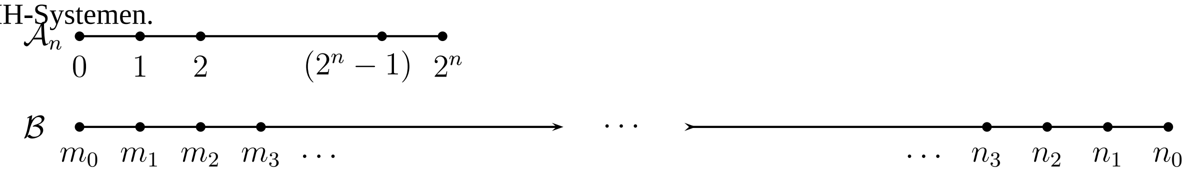

Abbildung 11.

Beweis (von Satz 6.44)
Sei K die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen (d.h., $\{\leq\}$-Strukturen $\mathcal{A}$, in denen $\leq^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist).
Für alle $n \geq 1$ sei $\mathcal{A}_n$ die lineare Ordnung mit

- $A_n := \{0, \ldots, 2^n\}$,
- $\leq^{\mathcal{A}_n} := \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq j \leq 2^n\}$.

Dann gilt $\mathcal{A}_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Ferner sei $\mathcal{B}$ die lineare Ordnung mit

- $B := \{m_i, n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$,
- $\leq^{\mathcal{B}} := \{(m_i, n_j) \mid i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{(m_i, m_j) \mid i \leq j\} \cup \{(n_j, n_i) \mid i \leq j\}$

(siehe Abbildung 11).
Für Elemente $a, a' \in A_n$ setzen wir $d^{\mathcal{A}_n}(a, a') := |a - a'|$. Für Elemente $b, b' \in B$ setzen wir

$$d^{\mathcal{B}}(b, b') := \begin{cases} \infty & \text{falls } b = m_i, b' = n_j \text{ oder } b = n_j, b' = m_i \text{ für } i, j \in \mathbb{N}, \\ |i - j| & \text{falls } b = m_i, b' = m_j \text{ oder } b = n_i, b' = n_j \text{ für } i, j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Für alle $i \leq n$ sei

$$\begin{aligned} I_i := \big\{ \overline{a} \mapsto \overline{b} \bigm| & \text{ ex. } \ell \leq n - i : \overline{a} = (a_0, a_1, \dots, a_\ell, a_{\ell+1}) \in A_n^{\ell+2}, \overline{b} = (b_0, \dots, b_{\ell+1}) \in B^{\ell+2}, \\ & a_0 = 0, a_{\ell+1} = 2^n, a_0 <^{\mathcal{A}_n} a_1 <^{\mathcal{A}_n} \dots <^{\mathcal{A}_n} a_{\ell+1} \\ & b_0 = m_0, b_{\ell+1} = n_0, b_0 <^{\mathcal{B}} b_1 <^{\mathcal{B}} \dots <^{\mathcal{B}} b_{\ell+1} \\ & \text{für } 0 \leq i \leq \ell \text{ gilt } d^{\mathcal{A}_n}(a_i, a_{i+1}) = d^{\mathcal{B}}(b_i, b_{i+1}) \\ & \qquad \text{oder } d^{\mathcal{A}_n}(a_i, a_{i+1}) \geq 2^i \text{ und } d^{\mathcal{B}}(b_i, b_{i+1}) \geq 2^i \big\}. \end{aligned}$$

Für $i > n$ sei $I_i := \emptyset$.

Behauptung: $(I_i) : \mathcal{A}_n \cong_n \mathcal{B}$.

Beweis: Offensichtlich sind die I_i Mengen von partiellen Isomorphismen. Für $i \leq n$ gilt $(0, 2^n) \mapsto (m_0, n_0) \in I_i$ und damit $I_i \neq \emptyset$. Wir müssen die Hin- und Her-Eigenschaft beweisen.

Hin: Seien $i \geq 1$, $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in I_i$ mit $\overline{a} = (a_0, \dots, a_{\ell+1})$, $\overline{b} = (b_0, \dots, b_{\ell+1})$, und $a \in A_n$. OBdA gelte $a \notin \{a_0, \dots, a_{\ell+1}\}$. Sei $0 \leq j \leq \ell$, so dass $a_j <^{\mathcal{A}_n} a <^{\mathcal{A}_n} a_{j+1}$.

1. Fall: $d^{\mathcal{A}_n}(a_j, a) < 2^{(i-1)}$.
Wähle $b \in B$ mit $b_j <^{\mathcal{B}} b <^{\mathcal{B}} b_{j+1}$ mit $d^{\mathcal{B}}(b_j, b) = d^{\mathcal{A}_n}(a_j, a)$. Falls $d^{\mathcal{A}_n}(a_j, a_{j+1}) < 2^i$ gilt $d^{\mathcal{B}}(b_j, b_{j+1}) = d^{\mathcal{A}_n}(a_j, a_{j+1})$ und damit auch $d^{\mathcal{B}}(b, b_{j+1}) = d^{\mathcal{A}_n}(a, a_{j+1})$. Falls $d^{\mathcal{A}_n}(a_j, a_{j+1}) \geq 2^i$ gilt $d^{\mathcal{B}}(b_j, b_{j+1}) \geq 2^i$ und damit $d^{\mathcal{A}_n}(a, a_{j+1}) \geq 2^{i-1}$ und $d^{\mathcal{B}}(b, b_{j+1}) \geq 2^{i-1}$. Also ist

$$(a_0, \dots, a_j, a, a_{j+1}, \dots, a_{\ell+1}) \mapsto (b_0, \dots, b_j, b, b_{j+1}, \dots, b_{\ell+1}) \in I_{i-1}.$$

2. Fall: $d^{\mathcal{A}_n}(a, a_{j+1}) < 2^{(i-1)}$.
Analog.

3. Fall: $d^{\mathcal{A}_n}(a_j, a) \geq 2^{(i-1)}$ und $d^{\mathcal{A}_n}(a, a_{j+1}) \geq 2^{(i-1)}$.
Dann gilt $d^{\mathcal{A}_n}(a_j, a_{j+1}) \geq 2^i$ und damit $d^{\mathcal{B}}(b_j, b_{j+1}) \geq 2^i$. Wähle $b \in B$ mit $b_j <^{\mathcal{B}} b <^{\mathcal{B}} b_{j+1}$ und $d^{\mathcal{B}}(b_j, b) = 2^{i-1}$. Dann ist

$$(a_0, \dots, a_j, a, a_{j+1}, \dots, a_{\ell+1}) \mapsto (b_0, \dots, b_j, b, b_{j+1}, \dots, b_{\ell+1}) \in I_{i-1}.$$

Her: Analog. □

Axiomatisierbarkeit im Endlichen

Definition 6.45. Sei K eine Klasse endlicher σ-Strukturen. Dann ist K *im Endlichen axiomatisierbar*, wenn es eine Satzmenge $\Phi \subseteq S_\sigma$ gibt, so dass für alle endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \in K \iff \mathcal{A} \models \Phi. \qquad (\star)$$

K ist *im Endlichen endlich axiomatisierbar* (kurz: *e-axiomatisierbar*), wenn es eine endliche Satzmenge Φ gibt, so dass für alle endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$ $(\star)$ gilt.

Satz 6.46. *Jede unter Isomorphie abgeschlossene Klasse endlicher σ-Strukturen ist im Endlichen axiomatisierbar.*

Beweis
Sei K eine unter Isomorphie abgeschlossene Klasse endlicher σ-Strukturen.
Für jede endliche σ-Struktur $\mathcal{A}$ sei $\varphi_\mathcal{A} \in S_\sigma$ ein Satz, der $\mathcal{A}$ bis auf Isomorphie charakterisiert. Ein solcher Satz existiert nach Lemma 6.20.
Sei

$$\Phi := \{\neg\varphi_\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ endliche } \sigma\text{-Struktur mit } \mathcal{A} \notin K\}.$$

Dann gilt für alle endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} \in K \iff \neg\varphi_\mathcal{A} \notin \Phi \iff \mathcal{A} \models \Phi.$$

Also $K = \mathrm{Mod}_\sigma(\Phi)$. □

Nichtaxiomatisierbarkeit im Endlichen

Lemma 6.47. *Sei K eine Klasse von endlichen σ-Strukturen. Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien $\mathcal{A}_n$ und $\mathcal{B}_n$ endliche σ-Strukturen, so dass*

- *$\mathcal{A}_n \in K$ und $\mathcal{B}_n \notin K$.*
- *$\mathcal{A}_n \cong_n \mathcal{B}_n$ (bzw. Spieler II hat eine Gewinnstrategie für das Spiel EF$_n(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n)$).*

Dann ist K nicht e-axiomatisierbar.

Beweis
Angenommen: K e-axiomatisierbar.
Dann existiert ein $\varphi \in S_\sigma$, so dass für alle endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt:

$$\mathcal{A} \in K \iff \mathcal{A} \models \varphi.$$

Wähle so ein φ. Sei $n := \mathrm{qr}(\varphi)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n \in K &\implies \mathcal{A}_n \models \varphi \\ &\implies \mathcal{B}_n \models \varphi && \text{(weil } \mathcal{A}_n \equiv_n \mathcal{B}_n\text{)} \\ &\implies \mathcal{B}_n \in K. \end{aligned}$$

Widerspruch. □

Anwendungen

Satz 6.48. *Die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen gerader Länge ist nicht e-axiomatisierbar.*

Satz 6.49. *Die Klasse der zusammenhängenden endlichen Graphen ist nicht e-axiomatisierbar.*

Beweis (von Satz 6.48)
Sei K die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen gerader Länge (d.h., endliche $\{\leq\}$-Strukturen $\mathcal{A}$, in denen $\leq^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf A ist und für die $|A|$ gerade ist).
Für alle $n \geq 1$ seien

$$\mathcal{A}_n := \big(\{0, \ldots, 2^n + 1\}, \leq\big)$$

und

$$\mathcal{B}_n := \big(\{0, \ldots, 2^n\}, \leq\big).$$

Dann ist $\mathcal{A}_n \in K$ und $\mathcal{B}_n \notin K$.
Für $a, b \in A \cup B$ sei $d(a, b) := |a - b|$. Für alle $i \leq n$ sei

$$\begin{aligned} I_i := \Big\{\overline{a} \mapsto \overline{b} \;\Big|\; & \text{ex. } \ell \leq n-1 : \overline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_\ell, a_{\ell+1}) \in A_n^{\ell+2}, \overline{b} = (b_0, \ldots, b_{\ell+1}) \in B_n^{\ell+2}, \\ & a_0 = 0, a_{\ell+1} = 2^n + 1, a_0 < a_1 < \ldots < a_{\ell+1} \\ & b_0 = 0, b_{\ell+1} = 2^n, b_0 < b_1 < \ldots < b_{\ell+1} \\ & \text{für } 0 \leq i \leq \ell \text{ gilt } d(a_i, a_{i+1}) = d(b_i, b_{i+1}) \\ & \qquad \text{oder } d(a_i, a_{i+1}) \geq 2^i \text{ und } d(b_i, b_{i+1}) \geq 2^i\Big\}. \end{aligned}$$

Für $i > n$ sei $I_i := \emptyset$.

Behauptung: $(I_i) : \mathcal{A}_n \cong_n \mathcal{B}_n$.

Beweis: Der Beweis is völlig analog zum Beweis der enstprechendem Behauptung im Beweis von Satz 6.44. Der Vollständigkeit halber geben wir ihn trotzdem:
Offensichtlich sind die I_i Mengen von partiellen Isomorphismen. Für $i \leq n$ gilt $(0, 2^n + 1) \mapsto (0, 2^n) \in I_i$ und damit $I_i \neq \emptyset$. Wir müssen die Hin- und Her-Eigenschaft beweisen.

Hin: Seien $i \geq 1$, $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in I_i$ mit $\overline{a} = (a_0, \ldots, a_{\ell+1})$, $\overline{b} = (b_0, \ldots, b_{\ell+1})$, und $a \in A_n$. OBdA gelte $a \notin \{a_0, \ldots, a_{\ell+1}\}$. Sei $0 \leq j \leq \ell$, so dass $a_j < a < a_{j+1}$.

1. Fall: $d(a_j, a) < 2^{(i-1)}$.
Wähle $b \in B$ mit $b_j < b < b_{j+1}$ mit $d(b_j, b) = d(a_j, a)$. Falls $d(a_j, a_{j+1}) < 2^i$ gilt $d(b_j, b_{j+1}) = d(a_j, a_{j+1})$ und damit auch $d(b, b_{j+1}) = d(a, a_{j+1})$. Falls $d(a_j, a_{j+1}) \geq 2^i$ gilt $d(b_j, b_{j+1}) \geq 2^i$ und damit $d(a, a_{j+1}) \geq 2^{i-1}$ und $d(b, b_{j+1}) \geq 2^{i-1}$. Also ist

$$(a_0, \ldots, a_j, a, a_{j+1}, \ldots, a_{\ell+1}) \mapsto (b_0, \ldots, b_j, b, b_{j+1}, \ldots, b_{\ell+1}) \in I_{i-1}.$$

2. Fall: $d(a, a_{j+1}) < 2^{(i-1)}$.
Analog.

3. Fall: $d(a_j, a) \geq 2^{(i-1)}$ und $d(a, a_{j+1}) \geq 2^{(i-1)}$.
Dann gilt $d(a_j, a_{j+1}) \geq 2^i$ und damit $d(b_j, b_{j+1}) \geq 2^i$. Wähle $b \in B$ mit $b_j < b < b_{j+1}$ und $d(b_j, b) = 2^{i-1}$. Dann ist ist

$$(a_0, \dots, a_j, a, a_{j+1}, \dots, a_{\ell+1}) \mapsto (b_0, \dots, b_j, b, b_{j+1}, \dots, b_{\ell+1}) \in I_{i-1}.$$

Her: Analog. □

Beweis (von Satz 6.49)
Für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ definieren wir einen Graphen $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ wie folgt:

- Der Träger von $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ ist $G(\mathcal{A}) := A$.
- Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_1 <^{\mathcal{A}} a_2 <^{\mathcal{A}} \dots <^{\mathcal{A}} a_n$. Dann setzen wir

$$E^{\mathcal{G}(\mathcal{A})} := \big\{(a_i, a_{i+2}), (a_{i+2}, a_i) \bigm| 1 \leq i \leq n-2\big\} \cup \big\{(a_{n-1}, a_1), (a_1, a_{n-1}), (a_n, a_2), (a_2, a_n)\big\}.$$

Dann ist $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ genau dann zusammenhängend, wenn $|A|$ ungerade ist. Betrachte die Formel

$$\begin{aligned}
\chi(x,y) := {} & \exists z\big(\neg x = z \wedge x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg y = z \wedge \forall z'(z' \leq x \vee z' = z \vee y \leq z')\big) \\
& \vee \exists z\big(\neg y = z \wedge y \leq z \wedge z \leq x \wedge \neg x = z \wedge \forall z'(z' \leq y \vee z' = z \vee x \leq z')\big) \\
& \vee \exists z\big(\neg x = z \wedge x \leq z \wedge \forall z'\,(z' \leq x \vee z' = z)\big) \wedge \forall z'' y \leq z'' \\
& \vee \exists z\big(\neg y = z \wedge y \leq z \wedge \forall z'\,(z' \leq y \vee z' = z)\big) \wedge \forall z'' x \leq z'' \\
& \vee \forall z' z' \leq x \wedge \exists z\big(z \leq y \wedge \neg z = y \wedge \forall z''\,(z = z'' \vee y \leq z'')\big) \\
& \vee \forall z' z' \leq y \wedge \exists z\big(z \leq x \wedge \neg z = x \wedge \forall z''\,(z = z'' \vee x \leq z'')\big).
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle linearen Ordnungen $\mathcal{A}$:

$$\chi(\mathcal{A}) = E^{\mathcal{G}(\mathcal{A})}.$$

Angenommen, die Klasse der endlichen zusammenhängenden Graphen ist e-axiomatisierbar. Sei $\varphi \in L_{\{E\}}$, so dass für alle endlichen Graphen $\mathcal{G}$ gilt:

$$\mathcal{G} \models \varphi \iff \mathcal{G} \text{ ist zusammenhängend.}$$

Sei φ' die Formel, die aus φ entsteht, wenn man alle atomaren Subformeln der Gestalt Exy durch $\chi(x,y)$ ersetzt. Dann gilt für alle endlichen linearen Ordnungen $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi' & \iff \mathcal{G}(\mathcal{A}) \models \varphi \\
& \iff \mathcal{G}(\mathcal{A}) \text{ ist zusammenhängend} \\
& \iff |A| \text{ ist ungerade.}
\end{aligned}$$

Also ist die Klasse aller endlichen linearen Ordnungen gerader Länge e-axiomatisierbar, was Satz 6.48 widerspricht. □

6.3 Der Satz von Gaifman

Der Gaifmangraph

Vereinbarung
Auch in diesem Paragraphen bezeichnet σ immer eine endliche relationale Symbolmenge.

Definition 6.50. Der *Gaifmangraph* einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist der Graph $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ mit:

- Eckenmenge $G_\mathcal{A} := A$;
- Kantenmenge

$$E^{\mathcal{G}_\mathcal{A}} := \Big\{(a,b) \in A^2 \ \Big|\ \begin{array}{l} a \neq b \text{ und es existiert ein } R \in \sigma \\ \text{und ein Tupel } (a_1,\dots,a_k) \in R^\mathcal{A}, \\ \text{so dass } a,b \in \{a_1,\dots,a_k\} \end{array}\Big\}$$

Beobachtung
Für jeden Graphen $\mathcal{G}$ gilt $\mathcal{G}_\mathcal{G} = \mathcal{G}$.

Abstände

Zur Erinnerung
Die *Länge* eines Weges in einem Graphen ist die Zahl der Kanten auf dem Weg.

Definition 6.51. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur.

1. Seien $a,b \in A$. Der *Abstand* $d^\mathcal{A}(a,b)$ von a nach b ist die Länge des kürzesten Weges von a nach b in $\mathcal{G}_\mathcal{A}$, oder ∞, wenn es keinen Weg von a nach b in $\mathcal{G}_\mathcal{A}$ gibt.

2. Seien $\overline{a} = (a_1,\dots,a_k) \in A^k$ und $b \in A$. Der *Abstand* von $\overline{a}$ nach b ist

$$d^\mathcal{A}(\overline{a},b) := \min\big\{d^\mathcal{A}(a_i,b)\ \big|\ 1 \leq i \leq k\big\}.$$

Definierbarkeit der Abstände

Lemma 6.52. *1. Es gibt eine Formel $\kappa(x,y) \in L_\sigma$, so dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a,b \in A$ gilt:*

$$\mathcal{A} \models \kappa[a,b] \iff (a,b) \in E^{\mathcal{G}_\mathcal{A}}.$$

2. Für alle $r \in \mathbb{N}$ gibt es eine Formel $\delta_r(x,y) \in L_\sigma$, so dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a,b \in A$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \delta_r[a,b] \iff d^\mathcal{A}(a,b) \leq r.$$

Notation.

- Wir schreiben $d(x,y) \le r$ statt $\delta_r(x,y)$ und $d(x,y) > r$ statt $\neg\delta_r(x,y)$.
- Für Tupel $\overline{x} = (x_1,\dots,x_k)$ schreiben wir $d(\overline{x},y) \le r$ statt $\bigvee_{i=1}^k d(x_i,y) \le r$.

Beweis (von Lemma 6.52)

1. Für $R \in \sigma$ bezeichne s_R die Stelligkeit von R. Setze

$$\kappa(x,y) := \neg x \doteq y \wedge \bigvee_{R\in\sigma} \exists x_1 \dots x_{s_R} \big(Rx_1 \dots x_{s_R} \wedge \bigvee_{i=1}^{s_R} x \doteq x_i \wedge \bigvee_{i=1}^{s_R} y \doteq x_i\big).$$

2. $\delta_r(x,y)$ ist induktiv definiert durch

$$\begin{aligned} \delta_0(x,y) &:= x \doteq y, \\ \delta_{r+1}(x,y) &:= \delta_r(x,y) \vee \exists z\big(\delta_r(x,z) \wedge \kappa(z,y)\big). \end{aligned}$$

□

Umgebungen

Definition 6.53. Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, $\overline{a} \in A^k$ und $r \in \mathbb{N}$.

1. Die *r-Umgebung* von $\overline{a}$ in $\mathcal{A}$ ist die Menge

$$N_r^{\mathcal{A}}(\overline{a}) := \big\{b \;\big|\; d^{\mathcal{A}}(\overline{a},b) \le r\big\}$$

2. Die *r-Umgebungsstruktur* von $\overline{a}$ in $\mathcal{A}$ ist die σ-Struktur $\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\overline{a})$ mit Träger $N_r^{\mathcal{A}}(\overline{a})$ und Relationen

$$R^{\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\overline{a})} := R^{\mathcal{A}} \cap \big(N_r^{\mathcal{A}}(\overline{a})\big)^k$$

für alle k-stelligen $R \in \sigma$.

Lokale Formeln

Definition 6.54. Sei $r \in \mathbb{N}$. Eine Formel $\varphi(x_1,\dots,x_k) \in L_\sigma$ ist *r-lokal*, wenn für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $\overline{a} = (a_1,\dots,a_k) \in A^k$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_k] \iff \mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \models \varphi[a_1,\dots,a_k].$$

Eine Formel $\varphi \in L_\sigma$ ist *lokal*, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt, so dass φ r-lokal ist.

Basislokale Sätze

Definition 6.55. Seien $r,k \in \mathbb{N}$, $k \ge 1$. Ein Satz $\varphi \in S_\sigma$ ist *(r,k)-basislokal*, wenn es eine r-lokale Formel $\psi(x)$ gibt, so dass

$$\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_k \Big(\bigwedge_{1\le i<j\le k} d(x_i,x_j) > 2r \wedge \bigwedge_{i=1}^k \psi(x_i)\Big).$$

Ein Satz $\varphi \in L_\sigma$ ist *basislokal*, wenn es $r,k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass φ (r,k)-basislokal ist.

Boolesche Kombinationen

Definition 6.56. Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$. Die Menge $B := \mathrm{BK}(\Phi)$ aller *boolesche Kombinationen über Φ* ist durch folgende Grammatik gegeben:

$$\begin{aligned} B &::= \varphi && (\text{für } \varphi \in \Phi) \\ &\quad \big|\, \neg B \,\big|\, (B \wedge B) \,\big|\, (B \vee B). \end{aligned}$$

Beispiel
Die quantorenfreien σ-Formeln sind genau die booleschen Kombinationen der atomaren σ-Formeln.

Der Satz von Gaifman

Satz 6.57. *Jeder Satz $\varphi \in S_\sigma$ ist äquivalent zu einer booleschen Kombination von basislokalen σ-Sätzen.*

Relativierung auf Umgebungen

Vereinbarung
OBdA nehmen wir im Folgenden an, dass freie Variablen in σ-Formeln niemals auch in quantifizierter Form vorkommen.

Definition 6.58. Seien $\varphi(\overline{x}) \in L_\sigma$ und $r \in \mathbb{N}$. Die *Relativierung von φ auf $N_r(\overline{x})$* ist die Formel $\varphi|_{N_r(\overline{x})}(\overline{x})$, die aus φ entsteht, indem man:

- jede Subformel von φ der Gestalt $\exists z \psi$ ersetzt durch
$$\exists z \Big(d(\overline{x}, z) \leq r \wedge \psi \Big),$$
- jede Subformel von φ der Gestalt $\forall z \psi$ ersetzt durch
$$\forall z \Big((d(\overline{x}, z) \leq r \rightarrow \psi \Big),$$

Lemma 6.59. *Seien $r \in \mathbb{N}$ und $\varphi(\overline{x}) \in L_\sigma$.*

1. *$\varphi|_{N_r(\overline{x})}(\overline{x})$ ist r-lokal.*
2. *Ist φ r-lokal, so gilt $\varphi|_{N_r(\overline{x})}(\overline{x}) \equiv \varphi(\overline{x})$.*
3. *Für alle $s \leq r$ gilt*
$$\big(\varphi|_{N_r(\overline{x})}\big)|_{N_s(\overline{x})} \equiv \big(\varphi|_{N_s(\overline{x})}\big)|_{N_r(\overline{x})} \equiv \varphi|_{N_s(\overline{x})}.$$

Beweis 1. Induktion über den Aufbau von φ.

2. Sei $k := |\overline{x}|$. Per Induktion über den Aufbau von φ zeigt man für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $\overline{a} \in A^k$ mit $A \subseteq N_r^{\mathcal{A}}(\overline{a})$:
$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi|_{N_r(\overline{x})}[\overline{a}].$$
Damit erhält man für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $\overline{a} \in A^k$:
$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] &\iff \mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \models \varphi[\overline{a}] \\ &\iff \mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \models \varphi|_{N_r(\overline{x})}[\overline{a}] \\ &\iff \mathcal{A} \models \varphi|_{N_r(\overline{x})}[\overline{a}] \qquad \text{(wegen (1)).} \end{aligned}$$

3. Übung.

Disjunkte Vereinigungen

Definition 6.60. Die *Vereinigung* zweier σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ist σ-Struktur $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ mit

- Träger $A \cup B$,
- Relationen $R^{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} := R^{\mathcal{A}} \cup R^{\mathcal{B}}$ für alle $R \in \sigma$.

Lemma 6.61. *Seien $\mathcal{A}\mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ σ-Strukturen mit $A \cap A' = \emptyset$ und $B \cap B' = \emptyset$. Dann gilt für alle $n \geq 0$:*
$$\mathcal{A} \equiv_n \mathcal{B} \quad \textit{und} \quad \mathcal{A}' \equiv_n \mathcal{B}' \implies \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \equiv_n \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'.$$

Beweis
Seien $(I_i) : \mathcal{A} \cong_n \mathcal{B}$ und $(I'_i) : \mathcal{A}' \cong_n \mathcal{B}'$. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei J_i die Menge aller partiellen Isomorphismen p von $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ nach $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$, so dass es $j, j' \geq i$ gibt mit
$$p|_A \in I_j \quad \text{und} \quad p|_{A'} \in I'_{j'}.$$
Wie leicht zu sehen ist, gilt dann $(J_i) : \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \equiv_n \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$. □

Lemma 6.62. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen, so dass für alle basislokalen Sätze φ gilt*
$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$
Dann gilt
$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Beweis
Sei $n \geq 0$. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{A} \cong_n \mathcal{B}$.
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, die gewissen Bedingungen genügt, die wir im Laufe des Beweises festlegen werden. Um die Notation zu vereinfachen, setzten wir für das leere Tupel $()$

$$N_r^{\mathcal{A}}(()) := N_r^{\mathcal{B}}(()) := \emptyset$$

und vereinbaren außerdem, dass $\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(()) \equiv_j \mathcal{N}_r^{\mathcal{B}}(())$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$\begin{aligned} I_i &:= \emptyset && \text{für } i > n, \\ I_i &:= \left\{ \overline{a} \mapsto \overline{b} \;\middle|\; |\overline{a}| = |\overline{b}| \leq n - i, \mathcal{N}_{7^i}^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \equiv_{f(i)} \mathcal{N}_{7^i}^{\mathcal{B}}(\overline{b}) \right\} && \text{für } 0 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Dann sind die I_i Mengen von partiellen Isomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$, und für alle $i \leq n$ gilt $() \mapsto () \in I_i$.
Wir werden zeigen, dass $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Hin- und Her-Eigenschaft besitzt.
Für jedes $i \leq n$ und jedes Tupel $\overline{a} \in A^{n-i}$ und setzen wir

$$\psi_{\overline{a}}^i(\overline{x}) := \left(\theta^{f(i)}_{\mathcal{N}_{7^i}^{\mathcal{A}}(\overline{a}), \overline{a}}(\overline{x})\right)\Big|_{N_{7^i}(\overline{x})}.$$

Dann ist $\psi_{\overline{a}}^i$ 7^i-lokal, und es gilt für alle $\overline{b} \in B^{n-i}$:

$$\mathcal{B} \models \psi_{\overline{a}}^i[\overline{b}] \iff N_{7^i}^{\mathcal{B}}(\overline{b}), \overline{b} \equiv_{f(i)} N_{7^i}^{\mathcal{A}}(\overline{a}), \overline{a}. \tag{1}$$

Um die Hin-Eigenschaft zu zeigen, seien $i < n$, $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in I_{i+1}$, und $a \in A$. Wir müssen ein $b \in B$ finden, so dass $\overline{a}a \mapsto \overline{b}b \in I_i$.

Fall 1: $a \in N_{2 \cdot 7^i}^{\mathcal{A}}(\overline{a})$.
Sei

$$\varphi(\overline{x}) := \exists y \big(d(\overline{x}, y) \leq 2 \cdot 7^i \wedge \psi_{\overline{a}a}^i(\overline{x}, y) \big).$$

Die erste Anforderung, die wir an die Funktion f stellen ist

$$\mathrm{qr}(\varphi) \leq f(i+1). \tag{2}$$

Es gilt

$$\mathcal{N}_{7^{i+1}}^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \models \varphi[\overline{a}].$$

Weil $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in I_{i+1}$ folgt

$$\mathcal{N}_{7^{i+1}}^{\mathcal{B}}(\overline{b}) \models \varphi[\overline{b}].$$

Wähle $b \in B$, so dass $b \in N_{2 \cdot 7^i}^{\mathcal{B}}(\overline{b})$ und $\mathcal{N}_{7^{i+1}}^{\mathcal{B}}(\overline{b}) \models \psi_{\overline{a}a}^i[\overline{b}, b]$. Weil $\psi_{\overline{a}a}^i$ 7^i-lokal ist, folgt $\mathcal{B} \models \psi_{\overline{a}a}^i[\overline{b}, b]$. Aus (1) folgt dann

$$N_{7^i}^{\mathcal{B}}(\overline{b}b), \overline{b}b \equiv_{f(i)} N_{7^i}^{\mathcal{A}}(\overline{a}a), \overline{a}a.$$

Also $\overline{a}a \mapsto \overline{b}b \in I_i$.

Fall 2: $a \notin N_{2 \cdot 7^i}^{\mathcal{A}}(\overline{a})$.
Dann gilt $N_{7^i}^{\mathcal{A}}(\overline{a}) \cap N_{7^i}^{\mathcal{A}}(a) = \emptyset$.
Für $\ell \geq 1$ sei

$$\xi_\ell(y_1, \ldots, y_\ell) := \bigwedge_{1 \leq j < k \leq \ell} d(y_j, y_k) > 4 \cdot 7^i \wedge \bigwedge_{j=1}^{\ell} \psi_a^i(y_j).$$

Die Formel ξ_ℓ besagt, dass die y_j paarweise weit voneinander entfernt sind und dass ihre 7^i-Umgebung jeweils so aussieht wie die von a in $\mathcal{A}$.
Sei ℓ_A maximal, so dass

$$\mathcal{A} \models \exists y_1 \dots \exists y_{\ell_A} \xi_{\ell_A}(y_1, \dots, y_{\ell_A}),$$

falls dieses Maximum existiert, oder $\ell_A := \infty$ falls $\mathcal{A} \models \exists y_1 \dots \exists y_\ell \xi_\ell(y_1, \dots, y_\ell)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$. Entsprechend sei ℓ_B in Bezug auf die Struktur $\mathcal{B}$ definiert. Dann gilt

$$\ell_A = \ell_B,$$

denn die Sätze $\exists y_1 \dots \exists y_\ell \xi_\ell(y_1, \dots, y_{\ell_A})$ sind basislokal, und $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ erfüllen dieselben basislokalen Sätze.
Sei m_A maximal, so dass

$$\mathcal{N}^{\mathcal{A}}_{7^{i+1}}(\overline{a}) \models \exists y_1 \dots \exists y_{m_A} \left(\bigwedge_{j=1}^{m_A} d(\overline{x}, y_j) \leq 2 \cdot 7^i \wedge \xi_{m_A}(y_1, \dots, y_{m_A}) \right) \left[\frac{\overline{a}}{\overline{x}} \right].$$

Entsprechend sei m_B bezüglich $\mathcal{B}, \overline{b}$ definiert. Dann gilt

$$m_A, m_B \leq |\overline{a}| = |\overline{b}| \leq n - i - 1,$$

denn je zwei Elemente y, y', die beide von einem x Abstand $\leq 2 \cdot 7^i$ haben, haben Abstand $\leq 4 \cdot 7^i$. Die zweite Bedingung, die wir an die Funktion f stellen, ist

$$\mathrm{qr}\left(\exists y_1 \dots \exists y_m \Big(\bigwedge_{j=1}^{m} d(\overline{x}, y) \leq 2 \cdot 7^i \wedge \xi_m(y_1, \dots, y_m) \Big) \right) \leq f(i+1) \quad \text{für alle } m \leq n - i - 1. \tag{3}$$

Weil $\mathcal{N}^{\mathcal{A}}_{7^{i+1}}(\overline{a}), \overline{a} \equiv_{f(i+1)} \mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{7^{i+1}}(\overline{b}), \overline{b}$ folgt damit

$$m_A = m_B.$$

Offensichtlich gilt noch

$$m_A = m_B \leq \ell_A = \ell_B.$$

Fall 2a: $m_A = \ell_A$.

Dann gilt für alle $a' \in A$ mit $\mathcal{A} \models \psi^i_a[a']$:

$$d^{\mathcal{A}}(\overline{a}, a') \leq 2 \cdot 7^i + 4 \cdot 7^i = 6 \cdot 7^i \leq 7^{i+1}.$$

Insbesondere gilt also $d^{\mathcal{A}}(\overline{a}, a) \leq 6 \cdot 7^i$. Sei

$$\chi(\overline{x}) := \exists y \big(d(\overline{x}, y) \leq 6 \cdot 7^i \wedge d(\overline{x}, y) > 2 \cdot 7^i \wedge \psi^i_a(y) \big).$$

Dann gilt ist χ 7^{i+1}-lokal, und es gilt

$$\mathcal{N}^{\mathcal{A}}_{7^{i+1}}(\overline{a}) \models \chi[\overline{a}].$$

Die nächste Bedingung, die wir an die Funktion f stellen, ist

$$\mathrm{qr}\big(\chi(\overline{x})\big) \leq f(i+1). \tag{4}$$

Weil $\overline{a} \mapsto \overline{b} \in I_{i+1}$, folgt
$$\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{7^{i+1}}(\overline{b}) \models \chi[\overline{b}].$$
Sei $b \in B$ mit
$$2 \cdot 7^j \leq d^{\mathcal{B}}(\overline{b}, b) \leq 6 \cdot 7^j$$
und
$$\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{7^{i+1}}(\overline{b}) \models \psi^i_a[b].$$
Weil $d^{\mathcal{B}}(\overline{b}, b) \leq 6 \cdot 7^i$ und damit $N^{\mathcal{B}}_{7^i}(b) \subseteq N^{\mathcal{B}}_{7^{i+1}}(\overline{b})$, gilt $N^{\mathcal{B}}_{7^i}(b) \models \theta^{f(i)}_{N^{\mathcal{A}}_{7^i}(\overline{a}),a}[b]$. Also
$$\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{7^i}(b) \cong_{f(i)} \mathcal{N}^{\mathcal{A}}_{7^i}(a).$$
Ferner
$$\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{7^i}(\overline{b}) \cong_{f(i)} \mathcal{N}^{\mathcal{A}}_{7^i}(\overline{a}).$$
Weil $d^{\mathcal{B}}(\overline{b}, b) > 2 \cdot 7^i$ und damit $N^{\mathcal{B}}_{7^i}(\overline{b}) \cap N^{\mathcal{B}}_{7^i}(b) = \emptyset$, ist $\mathcal{N}^{\mathcal{B}}(\overline{b}b)$ die disjunkte Verinigung von $\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{7^i}(\overline{b})$ und $\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{7^i}(b)$. Entsprechendes gilt für $\mathcal{A}, \overline{a}$ und a. Also gilt nach Lemma 6.61
$$\mathcal{N}^{\mathcal{B}}_{7^i}(\overline{b}b) \cong_{f(i)} \mathcal{N}^{\mathcal{A}}_{7^i}(\overline{a}a)$$
und damit $\overline{a}a \mapsto \overline{b}b \in I_i$.

Fall 2b: $m_A < \ell_A$.
Damit gilt auch $m_B < \ell_B$, und es gibt ein $b \in B$ mit $d^{\mathcal{B}}(\overline{b}, b) > 2 \cdot 7^i$ und $\mathcal{B} \models \psi^i_a[b]$. Jetzt können wir die wie in Fall 2a argumentieren, um $\overline{a}a \mapsto \overline{b}b \in I_i$ zu beweisen.

Die Her-Eigenschaft können wir analog beweisen. Also $(I_i) : \mathcal{A} \cong_n \mathcal{B}$. □

Lemma 6.63. *Sei $\Psi \subseteq S_\sigma$, so dass für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ gilt: Wenn*
$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$
für alle $\psi \in \Psi$, dann
$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$
Dann ist jeder Satz $\varphi \in S_\sigma$ äquivalent zu einem Satz in $\mathrm{BK}(\Psi)$.

Beweis
Für jede σ-Struktur $\mathcal{A}$ sei
$$\Psi_{\mathcal{A}} := \{\psi \mid \psi \in \Psi, \mathcal{A} \models \psi\} \cup \{\neg\psi \mid \psi \in \Psi, \mathcal{A} \not\models \psi\}.$$
Dann gilt für alle σ-Strukturen $\mathcal{B}$:
$$\mathcal{B} \models \Psi_{\mathcal{A}} \iff \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}.$$
Sei nun $\varphi \in L_\sigma$. Dann gilt für alle $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\varphi)$:
$$\Psi_{\mathcal{A}} \models \varphi.$$
Nach dem Kompaktheitssatz gibt es damit eine endliche Teilmenge $\Psi^0_{\mathcal{A}} \subseteq \Psi_{\mathcal{A}}$ mit $\Psi^0_{\mathcal{A}} \models \varphi$. Setze
$$\psi_{\mathcal{A}} := \bigwedge_{\psi \in \Psi^0_{\mathcal{A}}} \psi.$$

Behauptung: Es gibt eine endliche Menge $M \subseteq \text{Mod}(\varphi)$, so dass

$$\varphi \equiv \bigvee_{\mathcal{A} \in M} \psi_{\mathcal{A}}$$

Beweis: Man beachte zunächst, dass für alle endlichen $M \subseteq \text{Mod}(\varphi)$ gilt:

$$\models \bigvee_{\mathcal{A} \in M} \psi_{\mathcal{A}} \to \varphi,$$

denn $\models \psi_{\mathcal{A}} \to \varphi$ für alle $\mathcal{A} \in \text{Mod}(\varphi)$.
Angenommen, für alle endlichen Mengen $M \subseteq \text{Mod}(\varphi)$ gilt

$$\not\models \varphi \to \bigvee_{\mathcal{A} \in M} \psi_{\mathcal{A}}.$$

Dann ist für alle endlichen Mengen $M \subseteq \text{Mod}(\varphi)$ die Menge

$$\Phi_M := \{\varphi\} \cup \{\neg\psi_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in M\}$$

erfüllbar. Nach dem Kompaktheitssatz ist damit die Menge

$$\Phi := \{\varphi\} \cup \{\neg\psi_{\mathcal{A}} \mid \mathcal{A} \in \text{Mod}(\varphi)\}$$

erfüllbar. Sei $\mathcal{A} \models \Phi$. Dann gilt $\mathcal{A} \in \text{Mod}(\varphi)$ und damit $\mathcal{A} \models \neg\psi_{\mathcal{A}}$. *Widerpruch*.

Aus der Behauptung folgt sofort das Lemma. □

Beweis (des Satzes von Gaifman)
Folgt sofort aus Lemma 6.62 und Lemma 6.63. □

Literaturhinweise

§ 6.1 folgt [Ebbinghaus et al., 1996], Kap. VI und § 6.2 folgt [Ebbinghaus et al., 1996], Kap. XII.
§ 6.3 folgt [Ebbinghaus Flum, 1999], Kap. 2.5.

Lehrbücher

[Ebbinghaus et al., 1996] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, und W. Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. Spektrum Akademischer Verlag, 4. Auflage, 1996.

[Ebbinghaus Flum, 1999] H.-D. Ebbinghaus und J. Flum,. *Finite Model Theory*. Springer Verlag, 2. Auflage, 1999.

Eine wichtige Originalarbeit

[Fraïssé 1954] R. Fraïssé. Sur quelques classifications des systèmes de relations. *Université d'Alger, Publications Scientifiques, Série A*, 1, 35-182, 1954.