Logik in der Informatik

Martin Grohe
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Humboldt-Universität zu Berlin

Vorlesung im Wintersemester 2007/2008

Das Skript beruht auf Vorlesungen an der HU Berlin in den Wintersemestern 2005/06 und 2006/07. Eine erste LaTeX-Version des Skripts wurde im 2006 von Kornelius Kalnbach und Thomas Kunze erstellt. Dank an Mark Weyer für zahlreiche Beiträge zum Skript und zur Vorlesung.

Inhaltsverzeichnis

1 Wiederholung — Die Logik der 1. Stufe

1.1 Strukturen

Symbolmengen

Definition 1.1. Eine *Symbolmenge* (auch *Signatur* oder *Vokabular*) ist eine Menge σ von *Relations-*, *Funktions-* und *Konstantensymbolen*.
Jedes Relationsymbol $R \in \sigma$ und jedes Funktionssymbol $f \in \sigma$ hat eine *Stelligkeit*

$$\text{stell}(R) \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{bzw.} \quad \text{stell}(f) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Notation

- σ bezeichnet immer eine Symbolmenge.
- Für Relationssymbole verwenden wir normalerweise Großbuchstaben wie P, Q, R, E, für Funktionsymbole Kleinbuchstaben wie f, g, h und für Konstantensymbole Kleinbuchstaben wie c, d.
- Gelegentlich verwenden wir als Relations- und Funktionssymbole auch Zeichen wie $\leq$ (2-stelliges Relationssymbol), $+, \times$ (2-stellige Funktionssymbole) und als Konstantensymbole Zahlen wie $0, 1$.
- Die Stelligkeit eines Relations- oder Funktionsymbols deuten wir häufig an, indem wir sie unter das Symbol schreiben.

Beispiel 1.2. Die Notation $\underset{2}{R}$ deutet an, dass R ein 2-stelliges Relationssymbol ist.

Strukturen

Definition 1.3. Eine *σ-Struktur* $\mathcal{A}$ besteht aus:

- einer nicht-leeren Menge A, dem *Träger* von $\mathcal{A}$,
- je einer k-stelligen Relation $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^k$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$,
- je einer k-stelligen Funktion $f^{\mathcal{A}} : A^k \to A$ für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$,
- je einem Element $c^{\mathcal{A}} \in A$ für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$.

Notation.

- Strukturen bezeichnen wir mit kalligraphischen Großbuchstaben, etwa $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{G}$ und ihre Träger mit den entsprechenden lateinischen Großbuchstaben, etwa A, B, G.
- Wir beschreiben σ-Strukturen oft in Tupelschreibweise, etwa $\mathcal{A} = \left(A, (S^{\mathcal{A}})_{S \in \sigma}\right)$ oder, falls $\sigma = \{S_1, \ldots, S_n\}$ endlich, $\mathcal{A} = \left(A, S_1^{\mathcal{A}}, \ldots, S_n^{\mathcal{A}}\right)$

Beispiel: Das Standardmodell der Arithmetik

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ bezeichnet die Menge der *natürlichen Zahlen*.

Definition 1.4. Sei $\sigma_{\text{Ar}} := \{\leq, +, \times, 0, 1\}$, wobei $\leq$ ein zweistelliges Relationssymbol ist, $+, \times$ zweistellige Funktionssymbole und $0, 1$ Konstantensymbole.
Das *Standardmodell der Arithmetik* ist die σ_{Ar}-Struktur

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}}),$$

wobei $\leq^{\mathcal{N}}$, $+^{\mathcal{N}}$ und $\times^{\mathcal{N}}$ die natürliche Ordnung, Addition bzw. Multiplikation auf $\mathbb{N}$ sind und $0^{\mathcal{N}} := 0, 1^{\mathcal{N}} := 1$.

Zweistellige Relationen

Definition 1.5. Sei A eine Menge und $R \subseteq A^2$ eine 2-stellige Relation auf A.

1. R ist *reflexiv*, wenn für alle $a \in A$ gilt: aRa.
2. R ist *symmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: $aRb \implies bRa$.
3. R ist *antisymmetrisch*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt:
$$aRb \text{ und } bRa \implies a = b.$$
4. R ist *konnex*, wenn für alle $a, b \in A$ gilt: aRb oder bRa.
5. R ist *transitiv*, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt:
$$aRb \text{ und } bRc \implies aRc.$$

Ordnungen

Definition 1.6. Sei A eine Menge und $R \subseteq A^2$ eine 2-stellige Relation auf A.

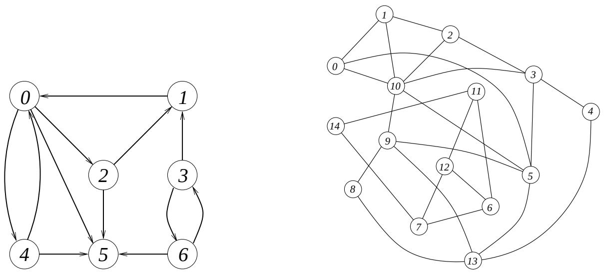
1. R ist eine *Präordnung*, wenn R reflexiv und transitiv ist.
2. R ist eine *partielle Ordnung*, wenn R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist.
3. R ist eine *lineare Ordnung*, wenn R reflexiv, transitiv, antisymmetrisch und konnex ist.

Definition 1.7. Sei $\sigma_{\text{Ord}} := \{\leq\}$, wobei $\leq$ ein 2-stelliges Relationssymbol ist.
Eine *(Prä-, partielle, lineare) Ordnungsstruktur* ist eine σ_{Ord}-Struktur $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$, wobei $\leq^{\mathcal{A}}$ eine (Prä-, partielle, lineare) Ordnung auf A ist.

Graphen

Definition 1.8. Sei $\sigma_{\text{Graph}} := \{E\}$, wobei E ein 2-stelliges Relationssymbol ist.
Ein *gerichteter Graph* (kurz: *Digraph*) ist eine σ_{Graph}-Struktur $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$ mit irreflexivem $E^{\mathcal{G}}$.
Ein *Graph* ist eine σ_{Graph}-Struktur $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$ mit irreflexivem und symmetrischem $E^{\mathcal{G}}$.

Beispiel 1.9. Ein Digraph und ein Graph.



Zweistellige Funktionen

Definition 1.10. Sei A eine Menge und $f : A^2 \to A$ eine zweistellige Funktion auf A.

1. f ist *assoziativ*, wenn für alle $a, b, c \in A$:
$$f(f(a,b),c) = f(a, f(b,c)).$$

2. f ist *kommutativ*, wenn für alle $a, b \in A$:
$$f(a,b) = f(b,a).$$

Halbgruppen, Monoide und Gruppen

Definition 1.11. Sei $\sigma_{\text{Gr}} := \{\circ\}$, wobei $\circ$ ein zweistelliges Funktionssymbol ist. Sei $\mathcal{G} = (G, \circ^{\mathcal{G}})$ eine σ_{Gr}-Struktur.

1. $\mathcal{G}$ ist eine *Halbgruppe*, wenn $\circ^{\mathcal{G}}$ assoziativ ist.

2. $\mathcal{G}$ ist ein *Monoid*, wenn $\mathcal{G}$ eine Halbgruppe ist und ein neutrales Element besitzt, d.h., es gibt ein $e \in G$, so dass für alle $g \in G$ gilt:
$$e \circ^{\mathcal{G}} g = g \circ^{\mathcal{G}} e = g.$$

3. $\mathcal{G}$ ist eine *Gruppe*, wenn $\mathcal{G}$ ein Monoid ist und wenn jedes Element ein *Inverses* besitzt, d.h., für alle $g \in G$ existiert ein $g' \in G$, so dass
$$g \circ^{\mathcal{G}} g' = e,$$
wobei e ein neutrales Element ist.

Isomorphismen

Definition 1.12. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen. Ein *Isomorphismus* von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine Abbildung $I : A \to B$ mit folgenden Eigenschaften:

1. I ist bijektiv.
2. Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:
$$(a_1, \ldots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \iff \big(I(a_1), \ldots, I(a_k)\big) \in R^{\mathcal{B}}.$$
3. Für alle $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und alle k-Tupel $(a_1, \ldots, a_k) \in A^k$ gilt:
$$I\big(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_k)\big) = f^{\mathcal{B}}\big(I(a_1), \ldots, I(a_k)\big).$$
4. Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ gilt:
$$I\big(c^{\mathcal{A}}\big) = c^{\mathcal{B}}.$$

Eigenschaften von Isomorphismen

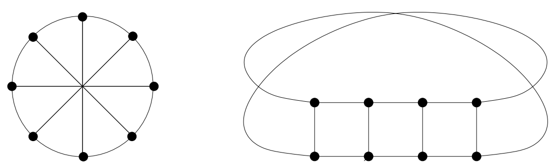
Notation. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen. Wir schreiben $I : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$, um anzudeuten, dass I ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist.

Lemma 1.13. *Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ σ-Strukturen und $I : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$. Dann gilt*
$$I^{-1} : \mathcal{B} \cong \mathcal{A}.$$

Isomorphie

Definition 1.14. Zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind *isomorph* (wir schreiben: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$), wenn es einen Isomorphismus von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ gibt.

Beispiel 1.15. Die beiden Graphen

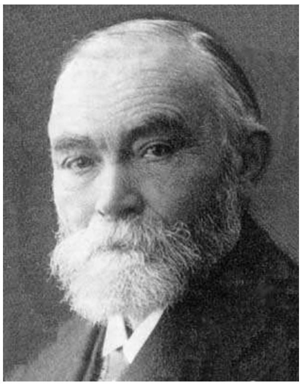


sind isomorph.

Isomorphie als Äquivalenzrelation

Satz 1.16. *Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Klasse aller σ-Strukturen.*

1.2 Die Logik der ersten Stufe



Gottlob Frege (1848-1925)

Das Alphabet

Definition 1.17. *Individuenvariablen* haben die Gestalt v_i, wobei $i \in \mathbb{N}$. Die Menge aller Individuenvariablen bezeichnen wir mit Var.

Definition 1.18. Sei σ eine Symbolmenge. Das Alphabet A_σ der Sprache der ersten Stufe über σ besteht aus:

- den Individuenvariablen in Var,
- den Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$,
- den *Quantoren* $\exists$ (dem *Existenzquantor*) und $\forall$ (dem *Allquantor*),
- den Klammern $($, $)$,
- dem *Gleichheitssymbol* $\doteq$,
- den Symbolen in σ.

Terme

Definition 1.19. Sei σ eine Symbolmenge. Die Menge $T_\sigma \subseteq A_\sigma^*$ aller *σ-Terme* ist durch folgende Grammatik gegeben:

$$T ::= \; x \mid c \mid f \underbrace{T \ldots T}_{k \text{ mal}}$$

für alle $x \in$ Var, alle Konstantensymbole $c \in \sigma$, alle $k \geq 1$ und k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$.

Achtung
Wir setzen keine Klammern in Termen, ebensowenig in atomaren Formeln.

Formeln

Definition 1.20. Sei σ eine Symbolmenge. Die Menge $L_\sigma \subseteq A_\sigma^*$ aller σ-Formeln ist durch folgende Grammatik gegeben:

$$\begin{aligned} L ::= {} & t_1 \doteq t_2 \mid Rt_1 \dots t_k \\ & \mid \neg L \mid (L \wedge L) \mid (L \vee L) \\ & \mid \exists x\ L \mid \forall x\ L \end{aligned}$$

(für alle $x \in$ Var, $k \geq 1$, $R \in \sigma$ k-stellig, $t_1, t_2, \dots, t_k \in T_\sigma$).
Alle Formeln der Gestalt $t_1 \doteq t_2$ und $Rt_1 \dots t_k$ nennen wir atomare Formeln.
L_σ nennen wir die zur Symbolmenge σ gehörende *Sprache der ersten Stufe* (oder *Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe*).

Weitere Junktoren

Notation. Verum ($\top$), Falsum ($\bot$), Implikation ($\to$) und Biimplikation ($\leftrightarrow$) sind nicht in unserer Sprache enthalten.
Wir verwenden aber folgende Abkürzungen:

- $\top$ steht für $\forall v_0\, v_0 \doteq v_0$.
- $\bot$ steht für $\exists v_0\, \neg v_0 \doteq v_0$.
- $(\varphi \to \psi)$ steht für $(\neg\varphi \vee \psi)$.
- $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ steht für $(\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$.

Notation

- Statt mit $v_0, v_1, \dots$ bezeichnen wir Variablen auch mit $x, y, z, \dots$ und Varianten wie $x', y_1, \dots$.
- Formeln bezeichnen wir in der Regel mit griechischen Kleinbuchstaben (φ, ψ, χ) und Formelmengen mit griechischen Großbuchstaben (Φ, Ψ).
- Bezüglich Klammerung verwenden wir folgende Bindungsregeln:
  1. $\neg$ bindet stärker als alle anderen Junktoren.
  2. $\wedge$ und $\vee$ binden stärker als $\to$ und $\leftrightarrow$.
  3. Die äußeren Klammern einer Formel lassen wir normalerweise weg. Also $\varphi \wedge \psi \to \chi$ statt $((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$
  4. Für gewisse zweistellige Funktionssymbole wie $+, \times \in \sigma_{\text{Ar}}$ und gewisse zweistellige Relationssymbole wie $\leq \in \sigma_{\text{Ord}}$ verwenden wir *Infix-* statt *Präfixschreibweise*. Dabei setzen wir auf natürliche Weise Klammern, um die eindeutige Lesbarkeit zu gewährleisten.

Subformeln

Definition 1.21. Für jede σ-Formel $\varphi \in L_\sigma$ definieren wir die Menge $\mathrm{sub}(\varphi) \subseteq L_\sigma$ aller *Subformeln von φ* wie folgt rekursiv:

- Ist φ eine atomare Formel, so ist $\mathrm{sub}(\varphi) := \{\varphi\}$.
- Ist $\varphi = \neg\psi$ für ein $\psi \in L_\sigma$, so ist
$$\mathrm{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \mathrm{sub}(\psi).$$
- Ist $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ oder $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ für $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$, so ist
$$\mathrm{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \mathrm{sub}(\psi_1) \cup \mathrm{sub}(\psi_2)$$
- Ist $\varphi = \exists x\, \psi$ oder $\varphi = \forall x\, \psi$ für ein $\psi \in L_\sigma$ und ein $x \in \mathrm{Var}$, so ist
$$\mathrm{sub}(\varphi) := \{\varphi\} \cup \mathrm{sub}(\psi)$$

Variablen in Termen

Definition 1.22. Für jeden σ-Term $t \in T_\sigma$ definieren wir die Menge $\mathrm{var}(t) \subseteq \mathrm{Var}$ der *Variablen von t* wie folgt:

- Für $x \in \mathrm{Var}$ ist $\mathrm{var}(x) := \{x\}$.
- Für Konstantensymbole $c \in \sigma$ ist $\mathrm{var}(c) := \emptyset$.
- Ist $t = ft_1 \ldots t_k$ für ein k-stelliges Funktionssymbol $f \in \sigma$ und Terme $t_1, \ldots, t_k$, so ist
$$\mathrm{var}(t) := \mathrm{var}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{var}(t_k).$$

Freie Variablen

Definition 1.23. Für jede σ-Formel $\varphi \in L_\sigma$ definieren wir die Menge $\mathrm{frei}(\varphi) \subseteq \mathrm{Var}$ aller *freien Variablen von φ* wie folgt rekursiv:

- Ist $\varphi = t_1 \doteq t_2$ für $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so ist $\mathrm{frei}(\varphi) := \mathrm{var}(t_1) \cup \mathrm{var}(t_2)$.
- Ist $\varphi = Rt_1 \ldots t_k$ für ein $R \in \sigma$ und $t_1, \ldots, t_k \in T_\sigma$, so ist
$$\mathrm{frei}(\varphi) := \mathrm{var}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{var}(t_k)$$
- Ist $\varphi = \neg\psi$ für ein $\psi \in L_\sigma$, so ist $\mathrm{frei}(\varphi) := \mathrm{frei}(\psi)$.
- Ist $\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2)$ oder $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$ für $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$, so ist
$$\mathrm{frei}(\varphi) := \mathrm{frei}(\psi_1) \cup \mathrm{frei}(\psi_2).$$
- Ist $\varphi = \exists x\, \psi$ oder $\varphi = \forall x\, \psi$ für ein $\psi \in L_\sigma$ und ein $x \in \mathrm{Var}$, so ist
$$\mathrm{frei}(\varphi) := \mathrm{frei}(\psi) \setminus \{x\}.$$

Sätze

Definition 1.24. Ein σ-Satz ist eine σ-Formel φ mit $\text{frei}(\varphi) = \emptyset$. Die Menge aller σ-Sätze bezeichnen wir mit S_σ.

Belegungen und Interpretationen

Definition 1.25.
1. Eine *Belegung* in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\beta : D \to A$ mit $D = \text{def}(\beta) \subseteq \text{Var}$.

   β ist *passend* zu einer σ-Formel φ, oder eine Belegung *für* φ, wenn $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{def}(\beta)$.

2. Eine *σ-Interpretation* ist ein Paar $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ bestehend aus einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ und einer Belegung β in $\mathcal{A}$.

   $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ ist *passend* zu einer σ-Formel φ, oder eine Interpretation *für* φ, wenn β passend zu φ ist.

Definition 1.26.
1. Sind β eine Belegung in einer σ-Struktur $\mathcal{A}$, $x \in \text{Var}$ und $a \in A$, so sei $\beta\frac{a}{x}$ die Belegung mit $\text{def}(\beta\frac{a}{x}) := \text{def}(\beta) \cup \{x\}$, die definiert ist durch

$$\beta\tfrac{a}{x}(y) := \begin{cases} a & \text{falls } y = x, \\ \beta(y) & \text{sonst} \end{cases}$$

   für alle $y \in \text{def}(\beta\frac{a}{x})$.

2. Sind $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation, $x \in \text{Var}$ und $a \in A$, so sei

$$\mathcal{I}\tfrac{a}{x} := \big(\mathcal{A}, \beta\tfrac{a}{x}\big)$$

Auswertung von Termen

Definition 1.27. Rekursiv über den Aufbau von T_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jedem σ-Term $t \in T_\sigma$ und jeder σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ für t einen Wert $[\![t]\!]^{\mathcal{I}} \in A$ zuordnet:

- Für alle $x \in \text{Var}$ sei $[\![x]\!]^{\mathcal{I}} := \beta(x)$.
- Für alle Konstantensymbole $c \in \sigma$ sei $[\![c]\!]^{\mathcal{I}} := c^{\mathcal{A}}$.
- Für alle $k \geq 1$, k-stelligen Funktionssymbole $f \in \sigma$ und Terme $t_1, \ldots, t_k$ sei

$$[\![ft_1 \ldots t_k]\!]^{\mathcal{I}} := f^{\mathcal{A}}\big([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \ldots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\big).$$

Auswertung von Formeln

Definition 1.28. Rekursiv über den Aufbau von L_σ definieren wir eine Funktion $[\![\cdot]\!]^{\cdot}$, die jeder σ-Formel $\varphi \in L_\sigma$ und jeder σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ für φ einen Wert $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} \in \{0,1\}$ zuordnet:

- Für alle $t_1, t_2 \in T_\sigma$ sei

$$[\![t_1 \doteq t_2]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![t_1]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathcal{I}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für alle $k \geq 1$, alle k-stelligen Relationssymbole $R \in \sigma$ und alle Terme $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$ sei

$$[\![Rt_1 \dots t_k]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } \left([\![t_1]\!]^{\mathcal{I}}, \dots, [\![t_k]\!]^{\mathcal{I}}\right) \in R^{\mathcal{A}}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für alle $\varphi \in L_\sigma$ sei

$$[\![\neg\varphi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für alle $\varphi, \psi \in L_\sigma$ sei

$$[\![\varphi \vee \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ oder } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1 \text{ und } [\![\psi]\!]^{\mathcal{I}} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für alle $x \in \text{Var}$ und $\varphi \in L_\sigma$ sei

$$[\![\exists x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls es ein } a \in A \text{ gibt, so dass } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$[\![\forall x\, \varphi]\!]^{\mathcal{I}} := \begin{cases} 1 & \text{falls für alle } a \in A \text{ gilt: } [\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}\frac{a}{x}} = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Alfred Tarski (1902-1983)

Erfüllbarkeit

Definition 1.29. Sei φ eine σ-Formel.

1. Eine σ-Interpretation $\mathcal{I}$ *erfüllt* φ (oder ist *Modell* von φ, wir schreiben $\mathcal{I} \models \varphi$), wenn $\mathcal{I}$ passend zu φ ist und $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{I}} = 1$.
2. φ ist *erfüllbar*, wenn es eine σ-Interpretation gibt, die φ erfüllt. Sonst ist φ *unerfüllbar*.
3. φ ist *allgemeingültig*, wenn jede zu φ passende σ-Interpretation φ erfüllt.

Erfüllbarkeit von Formelmengen

Definition 1.30. Sei $\Phi \subseteq L_\sigma$ eine Menge von σ-Formeln.

1. Eine Interpretation $\mathcal{I}$ ist *passend* zu Φ, wenn $\mathcal{I}$ passend zu allen $\varphi \in \Phi$ ist.
2. Eine Interpretation $\mathcal{I}$ *erfüllt* Φ (oder ist *Modell* von Φ, wir schreiben $\mathcal{I} \models \Phi$), wenn $\mathcal{I}$ passend zu Φ ist und $\mathcal{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.
3. Φ ist *erfüllbar*, wenn es eine Interpretation gibt, die Φ erfüllt. Sonst ist Φ *unerfüllbar*.

Das Koinzidenzlemma

Definition 1.31. Für $i = 1, 2$ sei $\mathcal{I}_i = (\mathcal{A}_i, \beta_i)$ eine σ_i-Interpretation, so dass $A_1 = A_2$.

1. $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$) *stimmen auf einen Symbol s überein*, wenn $s \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ und $s^{\mathcal{A}_1} = s^{\mathcal{A}_2}$.
2. $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ (bzw. β_1 und β_2) *stimmen auf einer Variablen x überein*, wenn $x \in \mathrm{def}(\beta_1) \cap \mathrm{def}(\beta_2)$ und $\beta_1(x) = \beta_2(x)$.

Lemma 1.32. *Seien $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ Symbolmengen mit $\sigma \subseteq \sigma_1 \cap \sigma_2$, und für $i = 1, 2$ sei $\mathcal{I}_i = (\mathcal{A}_i, \beta_i)$ eine σ_i-Interpretation.*

1. *Sei $t \in T_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in t vorkommenden Symbolen und Variablen übereinstimmen. Dann gilt $[\![t]\!]^{\mathcal{I}_1} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}_2}$.*
2. *Sei $\varphi \in L_\sigma$, so dass $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ auf allen in φ vorkommenden Symbolen und auf allen freien Variablen von φ übereinstimmen. Dann gilt*

$$\mathcal{I}_1 \models \varphi \iff \mathcal{I}_2 \models \varphi.$$

Notation

- Sei φ eine σ-Formel mit frei$(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

  Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation und, für $1 \leq i \leq n$, sei $a_i := \beta(x_i)$. Wir schreiben auch
  $$\mathcal{A} \models \varphi\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \cdots, \tfrac{a_n}{x_n}\right] \text{ anstatt } \mathcal{I} \models \varphi.$$
  Diese Schreibweise ist zulässig, weil nach dem Koinzidenzlemma für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}' = (\mathcal{A}, \beta')$ mit $\beta'(x_i) = a_i$ für $1 \leq i \leq n$ gilt:
  $$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I}' \models \varphi.$$

- Um die Notation weiter zu vereinfachen, schreiben wir auch $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ für σ-Formeln φ mit frei$(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$ und dann
  $$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ anstatt } \mathcal{A} \models \varphi\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \cdots, \tfrac{a_n}{x_n}\right].$$

- Für σ-Sätze φ schließlich schreiben wir einfach $\mathcal{A} \models \varphi$.

- Ähnliche Schreibweisen verwenden wir für Terme:

  Sei $t(x_1, \ldots, x_n)$ ein σ-Term mit var$(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

  Sei $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation und, für $1 \leq i \leq n$ sei $a_i := \beta(x_i)$. Dann schreiben wir
  $$t^{\mathcal{A}}\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \cdots, \tfrac{a_n}{x_n}\right] \text{ oder } t^{\mathcal{A}}[a_1, \ldots, a_n] \text{ anstatt } [\![t]\!]^{\mathcal{I}}.$$

Bemerkung 1.33. Wegen des Koinzidenzlemmas können wir einerseits immer annehmen, dass Belegungen „minimal“ sind, d.h., ihr Defininitionsbereich enthält gerade alle freien Variablen einer Formel oder eines Terms, andererseits können wir aber auch annehmen, dass Belegungen „maximal“ sind, d.h., ihr Defininitionsbereich enthält alle Variablen.
Beides wird gelegentlich nützlich sein.

Redukte und Expansionen

Definition 1.34. Seien σ, τ Symbolmengen mit $\tau \subseteq \sigma$.

1. Das *τ-Redukt* einer σ-Struktur $\mathcal{A}$ ist die τ-Struktur $\mathcal{A}|_\tau$ mit Träger $A' = A$, die mit $\mathcal{A}$ auf allen Symbolen in τ übereinstimmt.

2. Eine σ-Expansion einer τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A}|_\tau = \mathcal{B}$.

Beispiel 1.35. Das $\{\leq, +, 0\}$-Redukt
$$\mathcal{N}|_{\{\leq,+,0\}} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}})$$
des Standardmodells $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \leq^{\mathcal{N}}, +^{\mathcal{N}}, \times^{\mathcal{N}}, 0^{\mathcal{N}}, 1^{\mathcal{N}})$ der Arithmetik bezeichnet man als das Standardmodell der Presburger Arithmetik.

Beispiel: Digraphen und Graphen
Symbolmenge $\sigma_{\text{Graph}} = \{\underset{2}{E}\}$. Sei $\mathcal{G} = (G, E^{\mathcal{G}})$ eine σ_{Graph}-Struktur.

1. $\mathcal{G}$ ist ein Digraph gdw
$$\mathcal{G} \models \forall x \neg Exx.$$

2. $\mathcal{G}$ ist ein Graph gdw
$$\mathcal{G} \models \forall x \neg Exx \wedge \forall x \forall y (Exy \to Eyx).$$

3. Für $a, b \in G$: Es gibt einen Weg der Länge 3 von a nach b gdw
$$\mathcal{G} \models \exists z_1 \exists z_2 \big(Exz_1 \wedge Ez_1z_2 \wedge Ez_2y\big) \frac{ab}{xy}$$

4. $\mathcal{G}$ hat *Durchmesser* ≤ 3, d.h., zwischen je zwei Ecken von $\mathcal{G}$ gibt es einen Weg der Länge ≤ 3, gdw
$$\mathcal{G} \models \forall x \forall y \Big(\exists z_1 \exists z_2 \big(Exz_1 \wedge Ez_1z_2 \wedge Ez_2y\big) \\ \vee \exists z \big(Exz \wedge Ezy\big)\Big)$$

Beispiel: Arithmetik
$\sigma_{\text{Ar}} := \{\leq, +, \times, 0, 1\}$.
Die intuitive Bedeutung der folgenden Formeln bezieht sich auf die feste σ_{Ar}-Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$:

Beispiele 1.36.

1. „x teilt y“
$$\varphi_{\text{div}}(x, y) := \exists z \; x \times z \doteq y.$$

2. „$x - y = z$“
$$\varphi_{-}(x, y, z) := y + z \doteq x$$

3. „$x \equiv y \pmod z$“
$$\varphi_{\equiv}(x, y, z) := \exists w \underbrace{\Big(\underbrace{\big(\underbrace{x + w \doteq y}_{\text{„}y - x = w\text{“}} \vee \underbrace{y + w \doteq x}_{\text{„}x - y = w\text{“}}\big)}_{\text{„}|x-y| = w\text{“}} \wedge \underbrace{\exists v \; z \times v \doteq w}_{\text{„}z | w\text{“}} \Big)}_{\text{„}z \mid |x-y|\text{“}}$$

4. „x ist Primzahl.“
$$\varphi_{\text{prim}}(x) := \neg x \doteq 1 \;\wedge\; \forall y \big(\exists z \; y \times z \doteq x \to (y \doteq 1 \vee y \doteq x)\big)$$

5. „Es gibt unendlich viele Primzahlen.“
$$\forall y \exists x \big(y \leq x \wedge \varphi_{\text{prim}}(x)\big)$$

Das Isomorphielemma

Lemma 1.37. *Seien φ ein σ-Satz und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ isomorphe σ-Strukturen. Dann gilt*

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$

Eine andere Sichtweise auf Definierbarkeit

Definition 1.38. Für alle σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in L_\sigma$ sei

$$\varphi(\mathcal{A}) := \{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}.$$

Achtung

Die Relation $\varphi(\mathcal{A})$ hängt nicht nur von der Formel φ ab, sondern auch vom Tupel $(x_1, \dots, x_n) \in \mathrm{Var}^n$. Wenn wir also die Notation $\varphi(\mathcal{A})$ verwenden, müssen wir immer vorher angeben, auf welche Variablen sie sich bezieht.

Rekursive Beschreibung von $\varphi(\mathcal{A})$

Satz 1.39. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur und $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in L_\sigma$. Dann gilt*

- *Falls $\varphi = Rt_1 \dots t_k$ für ein $R \in \sigma$ und Terme $t_1, \dots, t_k \in T_\sigma$, so*

$$\varphi(\mathcal{A}) = \Big\{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \;\Big|\; \text{ex. } b_1, \dots, b_k \in A : b_i = t_i^{\mathcal{A}}\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \cdots, \tfrac{a_n}{x_n}\right] \text{ für } 1 \le i \le k \text{ und } (b_1, \dots, b_k) \in R^{\mathcal{A}}\Big\}$$

- *Falls $\varphi = t_1 \doteq t_2$ für Terme $t_1, t_2 \in T_\sigma$, so*

$$\varphi(\mathcal{A}) = \Big\{(a_1, \dots, a_n) \in A^n \;\Big|\; \text{ex. } b_1, b_2 \in A : b_i = t_i^{\mathcal{A}}\left[\tfrac{a_1}{x_1}, \cdots, \tfrac{a_n}{x_n}\right] \text{ für } 1 \le i \le 2 \text{ und } b_1 = b_2\Big\}$$

- Falls $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \neg\psi(x_1, \dots, x_n)$, so

$$\varphi(\mathcal{A}) = A^n \setminus \psi(\mathcal{A}).$$

- Falls $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \psi_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_\ell}) \vee \psi_2(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$, so

$$\varphi(\mathcal{A}) = \Big\{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \;\Big|\; (a_{i_1}, \ldots, a_{i_\ell}) \in \psi_1(\mathcal{A}) \text{ oder } (a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}) \in \psi_2(\mathcal{A})\Big\}.$$

  Entsprechend für $\wedge$.

- Falls $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \exists x_{n+1}\ \psi(x_1, \ldots, x_{n+1})$, so

$$\varphi(\mathcal{A}) = \Big\{(a_1, \ldots, a_n) \in A^n \;\Big|\; \text{ex. } a_{n+1} \in A :\ (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \psi(\mathcal{A})\Big\}.$$

  Entsprechend für $\forall$.

1.3 Äquivalenz, Normalformen und Folgerungen

Äquivalenz

Definition 1.40. Zwei σ-Formeln φ und ψ sind *äquivalent* (wir schreiben $\varphi \equiv \psi$), wenn für alle σ-Interpretationen $\mathcal{I}$ für φ und ψ gilt:

$$\mathcal{I} \models \varphi \iff \mathcal{I} \models \psi.$$

Beobachtung 1.41. *Für alle σ-Formeln φ, ψ gilt:*

$$\varphi \equiv \psi \iff \varphi \leftrightarrow \psi \text{ ist allgemeingültig}$$

Das Ersetzungslemma (intuitiv)

Lemma 1.42. *Sei φ eine σ-Formel. Ersetzt man in φ eine Subformel ψ durch eine zu ψ äquivalente σ-Formel, so erhält man eine zu φ äquivalente σ-Formel.*

Substitution

Ziel
„Sinnvolles“ Ersetzen von Variablen durch Terme.

Beispiel 1.43. Ersetzen wir in der σ_{Ar}-Formel $\exists y\ y \times y \doteq x + x$ die Variable x durch den σ_{Ar}-Term $(1 + 1)$, so erhalten wir die Formel

$$\exists y\ y \times y \doteq (1 + 1) + (1 + 1).$$

Achtung

Bei einem „sinnvollen“ Substitutionsbegriff sollte sicher das Ersetzen einer Variablen durch eine andere Variable (also ein einfaches Umbenennen einer Variablen) die Bedeutung einer Formel nicht wesentlich verändern.
Das bedeutet, dass man vorsichtig sein muss, wie folgende Beispiele zeigen:

Beispiele 1.44. Sei $\varphi := \exists y \; y \times y \doteq x + x \in L_{\text{Ar}}$.

1. Ersetzt man in φ die (gebundene) Variable y durch x, so erhält man die σ_{Ar}-Formel $\exists x \; x \times x \doteq x + x$, die eine völlig andere Bedeutung hat als φ.

   Deswegen sollte man nur freie Variablen substituieren.

2. Ersetzt man in φ die (freie) Variable x durch y, so erhält man die σ_{Ar}-Formel $\exists y \; y \times y \doteq y + y$, die wieder eine andere Bedeutung hat als φ.

   Man muss deswegen aufpassen, dass es keine Konflikte mit gebundenen Variablen gibt.

Der formale Substitutionsbegriff

Definition 1.45.
1. Eine *σ-Substitution* ist eine Abbildung $S : D \to T_\sigma$, wobei $D = \text{def}(S) \subseteq \text{Var}$ endlich ist.

2. Für eine σ-Substitution S sei $\text{var}(S)$ die Menge aller Variablen, die in einem Term im Bild von S vorkommen, das heißt,

$$\text{var}(S) := \bigcup_{x \in \text{def}(S)} \text{var}(S(x)).$$

Substitution in Termen

Definition 1.46. Sei S eine σ-Substitution. Induktiv über den Aufbau von $t \in T_\sigma$ definieren wir den Term tS, der aus t durch *Anwenden* der Substitution S entsteht:

- Ist $t = x$ für ein $x \in \text{Var}$, so ist

$$tS := \begin{cases} S(x) & \text{falls } x \in \text{def}(S), \\ x & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Ist $t = c$ für ein Konstantensymbol $c \in \sigma$, so ist $tS := c$.

- Ist $t = ft_1 \dots t_k$ für ein k-stelliges Funktionssymbol $f \in \sigma$ und σ-Terme $t_1, \dots, t_k$, so ist

$$tS := f\, t_1 S \dots t_k S.$$

Substitution in Formeln

Definition 1.47. Induktiv über den Aufbau von $\varphi \in L_\sigma$ definieren für alle σ-Substitutionen S eine Formel φS, die aus φ durch *Anwenden* der Substitution S entsteht:

- Ist $\varphi = Rt_1 \dots t_k$ für ein k-stelliges Relationssymbol $R \in \sigma$ und σ-Terme $t_1, \dots, t_k$, so ist
$$\varphi S := R\, t_1 S \dots t_k S.$$
- Ist $\varphi = t_1 \doteq t_2$ für σ-Terme t_1, t_2, so ist
$$\varphi S := t_1 S \doteq t_2 S.$$
- Ist $\varphi = \neg\psi$ für eine σ-Formel ψ, so ist $\varphi S := \neg\ \psi S$.
- Ist $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ für $\psi_1, \psi_2 \in L_\sigma$, so ist $\varphi S := \psi_1 S\ \vee\ \psi_2 S$.
- Entsprechend $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$.
- Ist $\varphi = \exists x\ \psi$ für eine Variable x und eine σ-Formel ψ, so ist $\varphi S := \exists y\ \psi S'$, wobei
$$\begin{cases} y := x \text{ und } S' := S|_{\text{def}(S)\setminus\{x\}}, \text{ falls } x \notin \text{var}(S), \\ y \text{ die in der Aufzählung } v_0, v_1, v_2, \dots \text{ von Var erste Variable,} \\ \quad \text{die nicht in frei}(\varphi) \cup \text{var}(S) \text{ vorkommt,} \\ \quad \text{und } S' := S|_{\text{def}(S)\setminus\{x\}} \cup \{(x,y)\}, \\ \quad \text{falls } x \in \text{var}(S). \end{cases}$$
- Ist $\varphi = \forall x\ \psi$ für eine Variable x und eine σ-Formel ψ, so ist $\varphi S := \forall y\ \psi S'$, wobei y und S' wie im Existenzquantorenfall definiert sind.

Notation

- Wir schreiben σ-Substitutionen S mit $\text{def}(S) = \{x_1, \dots, x_n\}$ und $t_i = S(x_i)$ für $1 \le i \le n$ auch in der Form
$$\left(\tfrac{t_1}{x_1}, \dots, \tfrac{t_n}{x_n}\right).$$
Insbesondere schreiben wir für σ-Formeln φ auch
$$\varphi\left(\tfrac{t_1}{x_1}, \dots, \tfrac{t_n}{x_n}\right) \quad \text{anstatt} \quad \varphi S.$$
Statt $\varphi\left(\frac{t}{x}\right)$ schreiben wir auch $\varphi\frac{t}{x}$.
- Für eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ und Terme $t_1, \dots, t_n$ schreiben wir auch
$$\varphi(t_1, \dots, t_n) \quad \text{anstatt} \quad \varphi\left(\tfrac{t_1}{x_1}, \dots, \tfrac{t_n}{x_n}\right).$$
- Entsprechende Schreibweisen verwenden wir für Terme.

Anwenden von Substitutionen auf Interpretationen

Definition 1.48. Für jede σ-Substitution S und σ-Interpretation $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ mit $\text{var}(S) \subseteq \text{def}(\beta)$ sei

$$\mathcal{I}S := (\mathcal{A}, \beta S),$$

wobei $\beta S : \text{def}(\beta) \cup \text{def}(S) \to A$ definiert ist durch

$$\beta S(x) := \begin{cases} [\![S(x)]\!]^{\mathcal{I}} & \text{falls } x \in \text{def}(S), \\ \beta(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das Substitutionslemma

Lemma 1.49. *Seien S eine σ-Substitution und $\mathcal{I} = (\mathcal{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation mit* $\text{var}(S) \subseteq \text{def}(\beta)$.

1. *Für alle σ-Terme t mit* $\text{var}(t) \subseteq \text{def}(\beta) \cup \text{def}(S)$ *gilt:*

$$[\![tS]\!]^{\mathcal{I}} = [\![t]\!]^{\mathcal{I}S}.$$

2. *Für alle σ-Formeln φ mit* $\text{frei}(\varphi) \subseteq \text{def}(\beta) \cup \text{def}(S)$ *gilt:*

$$\mathcal{I} \models \varphi S \iff \mathcal{I}S \models \varphi.$$

Der Beweis wird durch Induktion über den Aufbau der Terme und Formeln geführt, siehe [EFT] S.58–60.

Korollar 1.50. *Sei S eine σ-Substitution.*
Dann gilt für alle σ-Formeln φ, ψ:

$$\varphi \equiv \psi \implies \varphi S \equiv \psi S.$$

Aussagenlogische Äquivalenzen

Definition 1.51. Für eine aussagenlogische Formel α, aussagenlogische Variablen $X_1, \ldots, X_n$ und σ-Formeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_\sigma$ sei

$$\alpha\left(\frac{\varphi_1}{X_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{X_n}\right)$$

die σ-Formel, die aus α entsteht, indem man, für $1 \leq i \leq n$, jede Subformel X_i durch φ_i ersetzt.

Lemma 1.52. *Seien α_1, α_2 aussagenlogische Formeln mit* $\text{var}(\alpha_i) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$ *und $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_\sigma$ σ-Formeln.*
Dann gilt

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \implies \alpha_1\left(\frac{\varphi_1}{X_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{X_n}\right) \equiv \alpha_2\left(\frac{\varphi_1}{X_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{X_n}\right)$$

Äquivalenzen mit Quantoren

Lemma 1.53. *Seien $\varphi, \psi \in L_\sigma$ und $x \in \mathrm{Var}$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

1.
$$\neg\exists x\ \varphi \equiv \forall x\ \neg\varphi, \qquad \neg\forall x\ \varphi \equiv \exists x\ \neg\varphi.$$

2. *Falls $x \notin \mathrm{frei}(\varphi)$:*
$$\begin{aligned} \varphi \vee \exists x\ \psi &\equiv \exists x\ (\varphi \vee \psi), & \varphi \wedge \forall x\ \psi &\equiv \forall x\ (\varphi \wedge \psi),\\ \varphi \wedge \exists x\ \psi &\equiv \exists x\ (\varphi \wedge \psi), & \varphi \vee \forall x\ \psi &\equiv \forall x\ (\varphi \vee \psi). \end{aligned}$$

Umbenennen gebundener Variablen

Lemma 1.54. *Seien φ eine σ-Formel und x, y Variablen, so dass y nicht frei in φ vorkommt. Dann gilt*
$$\exists x\ \varphi \equiv \exists y\ \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big), \qquad \forall x\ \varphi \equiv \forall y\ \varphi\Big(\frac{y}{x}\Big)$$

Adäquatheit

Definition 1.55. Sei $\tau \subseteq \{\exists, \forall, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \top, \bot\}$.

1. $L_\sigma(\tau)$ ist die Menge aller σ-Formeln, die nur aus Variablen, Klammern, dem Gleichheitssymbol $\doteq$, den Symbolen in σ, und den Junktoren und Quantoren in τ aufgebaut sind.

2. τ ist *adäquat für L_σ*, wenn jede σ-Formel äquivalent zu einer σ-Formel in $L_\sigma(\tau)$ ist.

Satz 1.56. *Sei $\tau \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \top, \bot\}$ eine aussagenlogisch adäquate Menge von Junktoren. Dann sind $\tau \cup \{\exists\}$ und $\tau \cup \{\forall\}$ adäquat für L_σ.*

Korollar 1.57. *Die Menge $\{\exists, \neg, \wedge\}$ ist adäquat.*

Quantorenrang

Definition 1.58. Die Funktion $\mathrm{qr} : L_\sigma \longrightarrow \mathbb{N}$ sei rekursiv wie folgt definiert:

- Für atomare φ ist $\mathrm{qr}(\varphi) := 0$.
- Ist $\varphi = \neg\psi$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \mathrm{qr}(\psi)$.
- Ist $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$ oder $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \max\{\mathrm{qr}(\psi_1), \mathrm{qr}(\psi_2)$.
- Ist $\varphi = \exists x\ \psi$ oder $\varphi = \forall x\ \psi$, so ist $\mathrm{qr}(\varphi) := \mathrm{qr}(\psi) + 1$.

Wir bezeichnen $\mathrm{qr}(\varphi)$ als den *Quantorenrang* von φ.
Eine σ-Formel φ mit $\mathrm{qr}(\varphi) = 0$ nennen wir *quantorenfrei*.

Pränexe Normalform

Definition 1.59. Eine σ-Formel ist in *pränexer Normalform*, wenn sie die Form

$$Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \, \varphi$$

hat, wobei $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\exists, \forall\}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{Var}$ und φ quantorenfrei.

Satz 1.60. *Jede σ-Formel ist äquivalent zu einer σ-Formel in pränexer Normalform.*

Die Folgerungsbeziehung

Definition 1.61. Seien $\Phi \subseteq L_\sigma$ und $\psi \in L_\sigma$. Dann *folgt* ψ aus Φ (wir schreiben: $\Phi \models \psi$), wenn für jede zu Φ und ψ passende σ-Interpretation $\mathcal{I}$ gilt:

$$\mathcal{I} \models \Phi \implies \mathcal{I} \models \psi.$$

Notation
Statt $\emptyset \models \varphi$ schreiben wir $\models \varphi$.

Lemma 1.62. 1. *Für alle $\Phi \subseteq L_\sigma$ und $\psi \in L_\sigma$ gilt:*

$$\Phi \models \psi \iff \Phi \cup \{\neg\psi\} \text{ ist unerfüllbar}.$$

2. *Für alle $\varphi \in L_\sigma$ gilt:*

$$\models \varphi \iff \varphi \text{ ist allgemeingültig}.$$

Beispiel

„Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.“

Formalisierung des Arguments in der Logik der ersten Stufe:

- Symbolmenge
$$\sigma_{\text{Sokrates}} := \{\underset{1}{M}, \underset{1}{S}, s\}.$$
- Aus $\forall x(Mx \to Sx)$ und Ms folgt Ss.

Lemma 1.63. *Seien $\varphi, \psi \in L_\sigma$ und $t \in T_\sigma$.*
Dann gilt:

$$\left\{\forall x(\varphi \to \psi),\ \varphi\left(\tfrac{t}{x}\right)\right\} \models \psi\left(\tfrac{t}{x}\right)$$

Also ist das Argument „Wenn alle Menschen sterblich sind, und wenn Sokrates ein Mensch ist, dann ist Sokrates sterblich“ korrekt.

1.4 Beweisbarkeit

Kalküle

Definition 1.64. Sei A eine beliebige Menge.

1. Eine Ableitungsregel über A hat die Gestalt

$$\frac{a_1 \quad \cdots \quad a_n}{b},$$

   wobei $n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n, b \in A$.

   Wir bezeichnen $a_1, \ldots, a_n$ als die Voraussetzungen der Regel und b als die Konsequenz.

   Ableitungsregeln ohne Voraussetzungen (also mit $n = 0$) bezeichnen wir als Axiome.

2. Ein Kalkül über A ist eine Menge von Ableitungsregeln über A.

Ableitbare Elemente

Definition 1.65. Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge A.

1. Die Menge $B \subseteq A$ aller in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente ist rekursiv wie folgt definiert:

   (i) Für alle Axiome $\frac{}{b}$ in $\mathfrak{K}$ ist $b \in B$.

   (ii) Für alle Ableitungsregeln $\dfrac{a_1, \ldots, a_n}{b}$ in $\mathfrak{K}$ gilt:

   $$\text{Wenn } a_1, \ldots, a_n \in B, \text{ dann } b \in B.$$

   B ist also die bezüglich Mengeninklusion kleinste Menge, die die Abschlusseigenschaften (i) und (ii) hat.

2. Sei $V \subseteq A$ eine Menge von Voraussetzungen. Die Menge $B \subseteq A$ aller aus V in $\mathfrak{K}$ ableitbaren Elemente ist die bezüglich Mengeninklusion kleinste Menge, die V enthält und die Abschlusseigenschaften (i) und (ii) hat.

Bemerkung 1.66. Kalküle sind also nichts anderes als rekursive Definitionen.

Ableitungen

Definition 1.67. Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge A, und seien $V \subseteq A$, $a \in A$.

1. Eine Ableitung von a aus V in $\mathfrak{K}$ ist eine endliche Folge $(a_1, \ldots, a_\ell) \in A^\ell$, für ein $\ell \geq 1$, so dass $a_\ell = a$ und für $1 \leq i \leq \ell$:

   - $a_i \in V$ oder

- $\mathfrak{A}$ enthält eine Ableitungsregel $\frac{b_1 \cdots b_n}{c}$, so dass $b_1, \ldots, b_n \in \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$ und $c = a_i$.

2. Eine Ableitung von a in $\mathfrak{K}$ ist eine Ableitung von a aus $\emptyset$ in $\mathfrak{K}$.

Lemma 1.68. *Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül über einer Menge A, und seien $V \subseteq A$, $a \in A$.*
Dann ist a genau dann (aus V) in $\mathfrak{K}$ ableitbar, wenn es eine Ableitung von a (aus V) in $\mathfrak{K}$ gibt.

Ein Beweiskalkül für die Logik der ersten Stufe

Im folgenden sei σ eine feste Symbolmenge.
Der Kalkül $\mathfrak{H}$ über L_σ besteht aus folgenden Axiomen und Ableitungsregeln:

Axiome

- Aussagenlogische Tautologien:

$$\overline{\alpha\left(\frac{\varphi_1}{X_1}, \ldots, \frac{\varphi_n}{X_n}\right)}$$

für alle allgemeingültigen aussagenlogischen Formeln $\alpha \in \mathrm{AL}$ mit $\mathrm{var}(\alpha) = \{X_1, \ldots, X_n\}$ und alle $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in L_\sigma$.

- Quantorenaxiome:

$$\overline{\exists x \varphi \leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi}$$

für alle $\varphi \in L_\sigma$ und $x \in \mathrm{Var}$,

$$\overline{\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall x \psi)}$$

für alle $\varphi, \psi \in L_\sigma$ und $x \in \mathrm{Var} \setminus \mathrm{frei}(\varphi)$,

$$\overline{\forall x\, \varphi \rightarrow \varphi\left(\frac{t}{x}\right)}$$

für alle $\varphi \in L_\sigma$, $t \in T_\sigma$ und $x \in \mathrm{Var}$.

- Gleichheitsaxiome:

$$\overline{t \doteq t}$$

für alle $t \in T_\sigma$,

$$\overline{t \doteq u \rightarrow u \doteq t}$$

für alle $t, u \in T_\sigma$,

$$\overline{t \doteq u \wedge u \doteq v \rightarrow t \doteq v}$$

für alle $t, u, v \in T_\sigma$,

$$\overline{t \doteq u \rightarrow \left(\varphi\left(\frac{t}{x}\right) \rightarrow \varphi\left(\frac{u}{x}\right)\right)}$$

für alle $\varphi \in L_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$ und $t, u \in T_\sigma$.

Ableitungsregeln:

- Modus Ponens:
$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$$
für alle $\varphi, \psi \in L_\sigma$.
- Generalisierung:
$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}$$
für alle $\varphi \in L_\sigma$ und $x \in \mathrm{Var}$.

Beweisbarkeit und Widerspruchsfreiheit

Definition 1.69. Seien $\Phi \subseteq L_\sigma$ und $\psi \in L_\sigma$.

1. ψ ist beweisbar aus Φ (im Kalkül $\mathfrak{H}$) (wir schreiben: $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$), wenn ein Ableitung von ψ aus Φ in $\mathfrak{H}$ existiert.
2. Φ ist widerspruchsvoll (bezgl. $\mathfrak{H}$), wenn es eine Formel $\psi \in L_\sigma$ gibt, so dass $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \psi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \neg\psi$. Sonst ist Φ widerspruchsfrei (bezgl. $\mathfrak{H}$).

Der Vollständigkeitssatz für $\mathfrak{H}$

Satz 1.70. *1. Sei $\Phi \subseteq S_\sigma$. Dann gilt*
$$\Phi \textit{ widerspruchsfrei} \iff \Phi \textit{ erfüllbar}.$$

2. Seien $\Phi \subseteq S_\sigma$ und $\psi \in S_\sigma$. Dann gilt
$$\Phi \vdash_{\mathfrak{H}} \psi \iff \Phi \models \psi.$$

Literaturhinweise

Die Grundbegriffe der Logik der ersten Stufe finden sich etwa in [Ebbinghaus et al., 1996], Kap. I–III.

Lehrbücher

[Ebbinghaus et al., 1996] H.-D. Ebbinghaus, J. Flum, und W. Thomas. *Einführung in die mathematische Logik*. Spektrum Akademischer Verlag, 4. Auflage, 1996.

Eine wichtige Originalarbeit

[Tarski, 1936] A. Tarski. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philosophica*, 1, 1936.