

Kapitel 8

Eine Verallgemeinerung des Satzes von Kuratowski

In diesem Kapitel beweisen wir (ohne Verwendung des Graphminorensatzes), daß für jede Fläche S die Klasse aller in S einbettbaren Graphen durch endlich viele verbotenen Minoren oder topologische Minoren charakterisierbar ist.

Der hier gegebene Beweis ist von Thomassen [1997].

8.1 Die Charakteristik eines Graphen

Es ist klar, dass sich jeder Graph in eine Fläche einbetten läßt, beispielsweise in die Fläche $S_{\|G\|}$.

(8.1) Definition. Sei G ein Graph.

(1) Die *Euler-Charakteristik* von G ist die Zahl

$$\chi(G) := \max\{\chi(S) \mid G \text{ einbettbar in } S\}.$$

(2) Ein Einbettung Π von G in eine Fläche S ist *minimal*, wenn $\chi(G) = \chi(S)$.

(8.2) Lemma. Sei Π eine Einbettung eines zusammenhängenden Graphen G in eine Fläche S , die nicht zellulär ist. Dann gibt es eine zelluläre Einbettung Π' von G in eine Fläche S' mit $|F(\Pi')| \geq |F(\Pi)|$ und $\chi(S') > \chi(S)$.

(Ohne Beweis)

(8.3) Korollar. Jede minimale Einbettung eines Graphen ist zellulär.

(8.4) Korollar. Für jede Einbettung Π eines zusammenhängenden Graphen G gilt

$$|G| - \|G\| + |F(\Pi)| \leq \chi(G).$$

Beweis. Sei Π eine Einbettung von G in eine Fläche S und sei Π' eine zelluläre Einbettung von G in eine Fläche S' mit $|F(\Pi')| \geq |F(\Pi)|$. Dann gilt

$$|G| - \|G\| + |F(\Pi)| \leq |G| - \|G\| + |F(\Pi')| = \chi(S') \leq \chi(G).$$

Die Gleichung in der Mitte gilt wegen Satz (6.19). □

(8.5) Lemma. Seien G_1, \dots, G_n die Zusammenhangskomponenten eines Graphen G . Dann gilt

$$\chi(G) = \sum_{i=1}^n \chi(G_i) - 2(n-1).$$

(Ohne Beweis.)

(8.6) Lemma. Seien G, G_1, G_2 Graphen mit $G = G_1 \cup G_2$ und $|G_1 \cap G_2| = 1$, und sei G_2 nicht planar. Dann gilt

$$\chi(G_1) > \chi(G).$$

Beweis. Weil $G_1 \subseteq G$ gilt $\chi(G_1) \geq \chi(G)$.

Angenommen, daß $\chi(G_1) = \chi(G)$. Sei Π eine minimale Einbettung von G in eine Fläche S . Dann ist die Restriktion $\Pi_1 := \Pi|_{G_1}$ von Π auf G_1 zellulär, denn sonst würde nach Lemma (8.2) eine Einbettung Π' von G_1 in eine Fläche S' mit $\chi(S') > \chi(S)$ existieren. Dann wäre $\chi(G_1) \geq \chi(S') > \chi(S) = \chi(G)$.

Sei $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\}$. G_2 enthält mindestens eine Zusammenhangskomponente A , die nicht planar ist. Sei $f \in F(\Pi_1)$ mit $\Pi(A) \subseteq f \cup \{\Pi(x)\}$. Weil Π_1 zellulär, ist f homöomorph zu einer Kreisscheibe, also ist A planar - ein Widerspruch. □

(8.7) Lemma. Seien G_1, G_2 disjunkte zusammenhängende Graphen, und sei G_2 nicht planar. Seien $v, w \in V(G_1)$, $e = xy \in E(G_2)$, und sei

$$G = (G_1 \cup G_2) \setminus e + xv + yw.$$

Dann gilt $\chi(G_1) > \chi(G)$.

Beweis. Ist $G_2 - e$ nicht zusammenhängend, so ist schon eine Zusammenhangskomponente A von $G_2 - e$ nicht planar. Sagen wir, $x \in A$. Nach Lemma (8.6) gilt dann $\chi(G) \leq \chi(G_1 \cup A + xv) < \chi(G_1)$.

Nehmen wir also an, daß $G_2 - e$ zusammenhängend ist. *Angenommen*, $\chi(G_1) \leq \chi(G)$. Sei Π eine minimale Einbettung von G in eine Fläche S . Dann ist $\Pi|_{G_1} := \Pi|_{G_1}$ zellulär, denn sonst würde nach Lemma (8.2) eine Einbettung Π' von G_1 in eine Fläche S' mit $\chi(S') > \chi(S)$ existieren. Dann wäre $\chi(G_1) \geq \chi(S') > \chi(S) = \chi(G)$.

Weil G_2 zusammenhängend ist, liegen v und w auf dem Rand eines Gebietes $f \in F(\Pi_1)$. Weil f homöomorph zu einer Kreisscheibe ist und damit der Rand von f zusammenhängend, läßt sich die Einbettung Π zu einer Einbettung Π' von $G + e$ erweitern, in der die Kurve $\Pi'(e)$ entlang des Randes von f verläuft. Dann ist aber $\Pi'|_{G_2}$ eine planare Einbettung von G_2 , ein *Widerspruch*. □

8.2 Mauern

(8.8) Definition. Seien $m, n \geq 1$.

(1) Die *elementare* (m, n) -Mauer ist der Graph $M_{m,n}$ mit

$$V(M_{m,n}) := ([m] \times [2n]) \setminus \begin{cases} \{(1, 2n), (m, 1)\} & \text{falls } m \text{ ungerade,} \\ \{(1, 2n), (m, 2m)\} & \text{falls } m \text{ gerade,} \end{cases}$$

$$E(M_{m,n}) := \left\{ (i, j)(i', j') \mid \begin{array}{l} (i = i' \text{ und } j' = j + 1) \\ \text{oder } (i \text{ ungerade und } j \text{ ungerade und } i' = i + 1 \text{ und } j = j') \\ \text{oder } (i \text{ gerade und } j \text{ gerade und } i' = i + 1 \text{ und } j = j') \end{array} \right\}$$

(vgl. Abb. 8.1).

(2) Eine (m, n) -Mauer ist ein Graph, der isomorph zu einer Unterteilung von $M_{m,n}$ ist.

(8.9) Beobachtung. Für alle $m, n \geq 1$ gilt

$$G_{m,n} \leq M_{m,n} \subseteq G_{2m,n}.$$

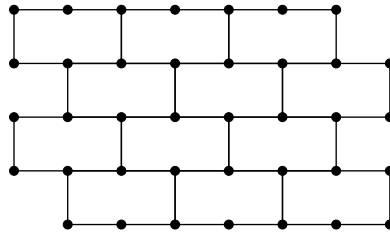


Abbildung 8.1. Die elementare Mauer $M_{4,5}$

Aus dem Gittersatz (5.1), Lemma (1.25) unter $\Delta(M_{m,n}) \leq 3$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ folgt dann sofort:

(8.10) Lemma. *Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq 1$ jeder Graph der Baumweite mindestens $f(n)$ eine (n, n) -Mauer als Subgraph enthält.*

8.3 Der Hauptsatz

(8.11) Satz (Robertson and Seymour [1990b]). *Sei S ein Fläche. Dann gibt es Graphen G_1, \dots, G_m , so daß*

$$\mathcal{E}_S = \mathcal{X}(\{G_1, \dots, G_m\}).$$

Lemma (7.13) zeigt, daß daraus folgt:

(8.12) Korollar. *Sei S ein Fläche. Dann gibt es Graphen G_1, \dots, G_m , so daß*

$$\mathcal{E}_S = \mathcal{X}_T(\{G_1, \dots, G_m\}).$$

(8.13) Definition. Sei S ein Fläche. Ein Graph G ist eine S -Obstruktion, wenn G nicht in S einbettbar ist, aber für alle $e \in E(G)$ der Graph $G \setminus e$ in S einbettbar ist.

Um den Satz zu beweisen, zeigen wir folgendes:

(8.14) Mauerlemma. *Für jede Fläche S gibt es ein $h := h(S)$, so daß keine zusammenhängende S -Obstruktion eine (h, h) -Mauer enthält.*

Beweis von Satz (8.11) aus dem Mauerlemma. Sei S eine Fläche und

$$h := \max \{h(S') \mid S' \text{ Fläche mit } \chi(S') \geq \chi(S)\},$$

wobei $h(S')$ gemäß Lemma (8.14) gewählt ist. Sei $k \in \mathbb{N}$, so daß jeder Graph der Baumweite größer als k eine (h, h) -Mauer enthält. Sei

$$C := \mathcal{E}_S \cap \mathcal{X}(M_{h,h}) = \{G \in \mathcal{E}_S \mid M_{h,h} \not\leq G\}.$$

C ist ein Minoreniideal und enthält nur Graphen der Baumweite höchstens k . Nach Satz (7.21) und Lemma (7.9) gibt es Graphen G_1, \dots, G_m , so daß

$$C = \mathcal{X}(\{G_1, \dots, G_m\}).$$

Behauptung 1. Es gibt ein $i \in [m]$, so daß $M_{h,h} \cong G_i$.

Beweis. Angenommen, $M_{h,h} \not\cong G_i$ für alle $i \in [m]$. Weil $M_{h,h} \notin C$, gibt es ein $i \in [m]$ mit $G_i \leq M_{h,h}$ und $M_{h,h} \not\leq G_i$. Weil $M_{h,h}$ aber planar ist, folgt $G_i \in C$, ein Widerspruch. \lrcorner

Im folgenden nehmen wir OBdA an, daß $G_m = M_{h,h}$ und $M_{h,h} \not\leq G_j$ für alle $j \in [m-1]$.

Behauptung 2. Für alle Graphen G gilt:

$$G \text{ einbettbar in } S \iff G_i \not\leq G \text{ für alle } i \in [m-1].$$

Beweis.

„ \implies “: Sei G einbettbar in S . Angenommen, $G_i \leq G$ für ein $i \in [m-1]$. Dann ist auch G_i einbettbar in S . Weil $M_{h,h} \not\leq G_i$ gilt damit $G_i \in C$, ein Widerspruch.

„ \impliedby “: Sei G nicht einbettbar in S . Wir zeigen, dass es ein $i \in [m-1]$ gibt, so daß $G_i \leq G$. Sei $H \subseteq G$ eine S -Obstruktion. Dann gilt $H \notin C$, also existiert ein $i \in [m]$, so daß $G_i \leq H$.

Angenommen, $G_m = M_{h,h} \leq H$. Dann gibt es eine Zusammenhangskomponente A von H , so daß $M_{h,h} \leq A$. Weil H eine S -Obstruktion gilt $\chi(H) < \chi(H - e)$ für alle $e \in E(H)$. Wegen Lemma (8.6) gilt dann auch $\chi(A - e) > \chi(A)$ für alle $e \in E(A)$.

Also ist A eine zusammenhängende S' -Obstruktion für eine Fläche S' mit $\chi(S') \geq \chi(S)$. Weil $h \geq h(S')$ gilt dann wegen Lemma (8.14) $M_{h,h} \not\leq A$.

Widerspruch.

Also gilt $G_i \leq H \leq G$ für ein $i \in [m-1]$. \lrcorner

Aus Behauptung 2 folgt direkt $\mathcal{E}_S = \mathcal{X}(\{G_1, \dots, G_{m-1}\})$. \square

8.4 Beweis des Mauerlemmas

Sei M eine (m, n) -Mauer. Der *Rand* von M ist der Kreis $Rd(M) \subseteq M$, der dem äußeren Kreis der Mauer $M_{m,n}$ entspricht (vgl. Abb. 8.2(a)). Ein *Ziegel* von M ist ein Kreis in M , der einem der „Bausteine“ der Mauer entspricht (vgl. Abb. 8.2(b)).

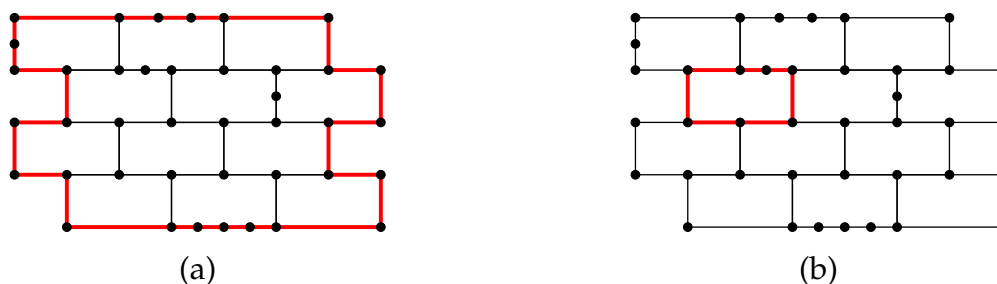


Abbildung 8.2. Rand und Ziegel einer Mauer

Sei nun $M \subseteq G$. Ein *Anbau* an M (in G) ist ein Subgraph von G , der entweder nur aus einer einzigen Kante mit beiden Endpunkten in M und mindestens einem Endpunkt in $M \setminus Rd(M)$ besteht, oder von der Gestalt $G[A \cup N^G(A)]$ für eine Zusammenhangskomponente A von $G \setminus M$ mit $N^G(A) \setminus Rd(M) \neq \emptyset$ ist. Sei $\mathcal{A}(M, G)$ die Menge aller Anbauten an M in G . Wir sagen, daß M *flach* in G liegt, wenn der Graph

$$M^* := M \cup \bigcup_{A \in \mathcal{A}(M, G)} A.$$

planar ist.

(8.15) Lemma. Sei $h \geq 1$ und G ein Graph. Ferner sei $M \subseteq G$ eine (h, h) -Mauer, die flach in G liegt.

Dann gibt es für jeden Anbau $A \in \mathcal{A}(M, G)$ einen Ziegel Z von M , so daß $A \cap M \subseteq Z$.

Beweis. Für $h \leq 2$ gibt es keine Anhänge, und für $h \geq 3$ zeigt Abb. 8.3 wie ein Anbau (hier nur aus einer Kante bestehend), für den die Behauptung nicht erfüllt ist, einen $K_{3,3}$ -Minor erzwingt. □

(8.16) Lemma. Für alle $h \in \mathbb{N}_0$ und alle Flächen S gibt es ein $h' \in \mathbb{N}_0$, so daß folgendes gilt: Ist $G \in \mathcal{E}_S$ und $M' \subseteq G$ eine (h', h') -Mauer, so gibt es eine (h, h) -Mauer $M \subseteq M'$, die flach in G liegt.

Dann gilt $H_i \cap M_j^* = \emptyset$, weil H_i zusammenhängend ist und wegen (i) mindestens eine Ecke von $H \setminus H_j$ enthält. Sei P ein Weg von H_i nach M_j in H , der kein $M_k \not\subseteq H_i$ für $k \neq j$ schneidet, ein solcher Weg existiert wegen (8.A). Wir setzen $H_{i+1} := H_i \cup M_j^* \cup P$. Weil M_j^* nicht planar ist, gilt dann wegen Lemma (8.6) $\chi(H_{i+1}) < \chi(H_i) \leq 2 - (i - 1)$, daraus folgt (ii). Außerdem gilt $\{k \mid H_{i+1} \cap M_k \neq \emptyset\} = \{j\} \cup \{k \mid H_i \cap M_k \neq \emptyset\}$, daraus folgt (i).

Fall 2: Es gibt einen Anbau an M_j in G , der eine Ecke von $M' \setminus M_j$ enthält.

Sei $A \in \mathcal{A}(M_j, G)$ ein solcher Anbau. Dann gibt es einen Weg $P \subseteq A$ von einer Ecke $x \in V(H_j \setminus Rd(H_j))$ zu einer Ecke $y \in V(H \setminus H_i)$ mit $\overset{\circ}{P} \cap H = \emptyset$. Wegen (8.A) gibt einen Weg Q von y zu einer Ecke $z \in Rd(H_j)$, die nicht im gleichen Ziegel von H_j wie x liegt, so dass Q höchstens einen der Graphen in

$$\{M_k \mid k \in [\ell] - \{j\}, \text{ so dass } M_k \cap H_i = \emptyset\}$$

schneidet. Dann ist wegen Lemma (8.15) der Graph $M_j \cup P \cup Q$ nicht planar.

Fall 2a: $(M_j \cup P \cup Q) \cap H_i \neq \emptyset$.

Wir setzen $H_{i+1} := H_j \cup M_j \cup P \cup Q$. Falls $|(M_j \cup P \cup Q) \cap H_i| = 1$, so gilt $\chi(H_{i+1}) < \chi(H_i)$ wegen Lemma (8.6). Falls $|(M_j \cup P \cup Q) \cap H_i| \geq 2$, so gilt $\chi(H_{i+1}) < \chi(H_i)$ wegen Lemma (8.7). Das impliziert (ii). Außerdem gilt

$$\{k \mid H_{i+1} \cap M_k \neq \emptyset\} = \{j\} \cup \{k \mid H_i \cap M_k \neq \emptyset\} \cup \{k \mid Q \cap M_k \neq \emptyset\},$$

und weil Q höchstens ein M_k mit $k \neq j$ und $M_k \cap H_i = \emptyset$ schneidet folgt (i).

Fall 2b: $(M_j \cup P \cup Q) \cap H_i = \emptyset$.

Wir wählen einen Weg R von H_i nach $M_j \cup P \cup Q$ in H , der kein M_k mit $k \neq j$ und $M_k \cap H_i = \emptyset$ schneidet, und setzen $H_{i+1} := H_i \cup R \cup M_j \cup P \cup Q$. Weil $M_j \cup P \cup Q$ nicht planar ist, gilt dann wegen Lemma (8.6) $\chi(H_{i+1}) < \chi(H_i) \leq 2 - (i - 1)$, daraus folgt (ii). (i) folgt wie in Fall 2a. \square

Beweis des Mauerlemmas (8.14). Sei S eine Fläche. Sei $\ell := 3 - \chi(S)$ und $h := 2\ell + 5$. Dann können wir in jeder (h, h) -Mauer wie in Abb. 8.4 eine Kante e_0 und disjunkte konzentrische Kreise C_1, \dots, C_ℓ wählen, die $Rd(M_{h,h})$ nicht schneiden.

Wir wählen h' so groß, daß jeder Graph G mit $\chi(G) \geq \chi(S) - 2$, der eine (h', h') -Mauer enthält, auch eine (h, h) -Mauer enthält, die flach in G liegt. Sei jetzt G eine

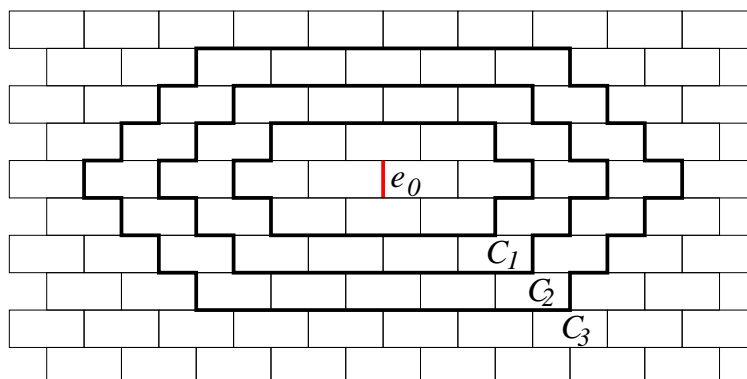


Abbildung 8.4. Die Kante e_0 und die Kreise C_1, C_2, C_3 in $M_{11,11}$

zusammenhängende S -Obstruktion. Dann gilt $\chi(S) > \chi(G) \geq \chi(S) - 2$, denn durch Löschen einer Kante erhöht sich die Charakteristik eines Graphen höchstens um 2.

Angenommen, G enthält eine (h', h') -Mauer. Dann enthält G eine (h, h) -Mauer M , die flach in G liegt. Wir wählen eine Kante $e_0 \in E(M)$ und Kreise C_1, \dots, C_ℓ wie in Abb. 8.4.

Sei $G' := G - e_0$. Dann ist G' in S einbettbar. OBdA können wir annehmen, dass G' in S eingebettet ist. Für alle $i \in [\ell]$ sei I_i die Komponente von $G \setminus C_i$, die das „Innere“ von $M \setminus C_i$ enthält und X_i die Komponente, die das „Äußere“ enthält. Weil M flach in G liegt, gilt $I_i \cap X_i = \emptyset$ (wegen Lemma (8.15)). Außerdem gilt

$$G = X_i \cup I_i \cup C_i \cup \{A \mid A \text{ Anbau an } H \text{ mit } N^G(A) \subseteq V^{C_i}\}.$$

Sei $U_i \subseteq S$ eine offene Umgebung von C_i mit $U_i \cap G \setminus C_i = \emptyset$.

Sei $S_0 := S$. Für alle $i \in [\ell]$ sei R_i die Zusammenhangskomponente von $S_{i-1} \setminus U_i$, die X_i enthält, und S_i die Fläche, die aus R_i entsteht, wenn man eine geschlossene Kreisscheibe auf das Loch klebt. Dann gilt $\chi(S) \leq \chi(S_1) \dots \leq \chi(S_\ell)$. Es gibt mindestens ein $i \in [\ell]$, so daß C_i in S_{i-1} eine Kreisscheibe berandet, denn sonst wäre

$$\chi(S_\ell) \geq \chi(S) + \ell = 3,$$

ein Widerspruch. Sei im Folgenden i so gewählt, daß C_i in S_{i-1} eine Kreisscheibe berandet. Wir werden zeigen, daß G bereits in S_{i-1} einbettbar ist. Das führt wegen

$$\chi(G) < \chi(G - e_0) = \chi(S) \leq \chi(S_{i-1})$$

zum Widerspruch.

Man beachte zunächst, daß die Einbettung von G in \mathcal{S} eine Einbettung von $G[X_i \cup V(C_i)]$ in \mathcal{S}_{i-1} induziert, bei der C_i ein Gebiet $g \subseteq \mathcal{S}_{i-1}$ berandet, das homöomorph zu einer Kreisscheibe ist.

Sei Π^* eine Einbettung des Graphen M^* in die Sphäre \mathcal{S}_0 . Es ist leicht zu sehen, daß Π^* eine Einbettung von $G[V(C_i) \cup V(I_i)]$ in eine geschlossene Kreisscheibe D^* induziert, deren Rand $\Pi^*(C_i)$ ist. Wir können die Kreisscheibe D^* homöomorph auf die geschlossene Kreisscheibe $bd(g) \subseteq \mathcal{S}_{i-1}$ abbilden, das $\Pi^*(C_i)$ isomorph auf C_i abgebildet wird. Damit erhalten wir die gewünschte Einbettung von G in \mathcal{S}_{i-1} . \square