Kapitel 7

Wohlquasiordnungen

7.1 Wohlquasiordnungen

(7.1) Definition. Sei X eine Menge.

(1) Eine *Quasiordnung* auf X ist eine reflexive transitive 2-stellige Relation auf X.

Im Folgenden sei $\lesssim \subseteq X^2$ eine Quasiordnung auf X und
$\prec := \{(x, y) \in X^2 \mid x \lesssim y \text{ und } y \not\lesssim x\}$. Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen von X.

(1) $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine *strikt absteigende Folge*, wenn für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $x_{i+1} \prec x_i$.

(2) $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine *Antikette*, wenn für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$ gilt: $x_i \not\lesssim x_j$ und $x_j \not\lesssim x_i$.

(3) $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist *gut*, wenn es $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i < j$ gibt, so dass $x_i \lesssim x_j$.
$(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ is *schlecht*, wenn $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ nicht gut ist.

(4) Die Quasiordnung $\lesssim$ ist eine *Wohlquasiordnung (WQO)*, wenn es bezüglich $\lesssim$ weder eine unendliche Antikette noch eine unendliche strikt absteigende Folge gibt.

(7.2) Notation. In diesem Kapitel sei für alle $n \geq 3$

$$C_n := \Big([n], \Big\{\{i, i+1\} \;\Big|\; i \in [n]\Big\} \cup \Big\{\{n, 1\}\Big\}\Big)$$

der „natürliche" Kreis der Länge n.

(7.3) Beispiel. Die Relationen $\subseteq, \preceq, \preceq_T$ sind Quasiordnungen.

Die Subgraphrelation $\subseteq$ ist keine Wohlquasiordnung, weil etwa die Folge $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Antikette ist.

(7.4) Beobachtung. Sei $\lesssim$ eine Quasiordnung. Dann ist jede unendliche strikt absteigende Folge oder Antikette schlecht.

(7.5) Lemma. *Eine Quasiordnung $\lesssim$ ist genau dann eine WQO, wenn es keine bezgl. $\lesssim$ schlechte Folge gibt.*

Im Beweis des Lemmas verwenden wir ohne Beweis folgenden kombinatorischen Satz:

(7.6) Satz von Ramsey. *Seien $k, \ell \in \mathbb{N}$ und $F : \binom{\mathbb{N}}{k} \to [\ell]$. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$, so daß F auf $\binom{M}{k}$ konstant ist.*

Beweis von Lemma 7.5. „$\Longleftarrow$“: Trivial.

„$\Longrightarrow$“: Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Für alle $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ gilt entweder $x_i \lesssim x_j$ oder $x_j < x_i$ oder $(x_i \not\lesssim x_j$ und $x_j \not\lesssim x_i)$. Nach dem Satz von Ramsey (7.6) gibt es eine unendliche Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$, so daß entweder $x_i \lesssim x_j$ für alle $i < j \in M$ oder $x_j < x_i$ für alle $i < j \in M$ oder $(x_i \not\lesssim x_j$ und $x_j \not\lesssim x_i)$ für alle $i < j \in M$ gilt. Weil es bezgl. $\lesssim$ keine unendlichen absteigenden Folgen oder Antiketten gibt, bleibt nur die Möglichkeit $x_i \lesssim x_j$ für alle $i < j \in M$. Also ist die Folge $(x_i)_{i\geq 1}$ gut. □

Aus dem Beweis ergibt sich noch folgendes Korollar:

(7.7) Korollar. *Sei $\lesssim$ eine Quasiordnung auf einer Menge X. Dann besitzt jede Folge $(x_i)_{i\geq 1}$ in X eine unendliche, bezgl. $\lesssim$ aufsteigende Teilfolge.*

(7.8) Definition. Sei $\lesssim$ eine Quasiordnung auf einer Menge X.

(1) Ein $\lesssim$-Ideal ist eine bezgl. $\lesssim$ nach unten abgeschlossene Menge, d.h., eine Menge $Y \subseteq X$, so dass für alle $y \in Y$ und $x \in X$ aus $x \preceq y$ auch $x \in Y$ folgt.

(2) Ein $\lesssim$-Ideal Y ist *endlich begrenzt*, wenn es $x_1, \ldots, x_n \in X$ gibt, so dass

$$Y = \{y \in X \mid x_i \not\lesssim y \text{ für alle } i \in [n]\}.$$

(7.9) Lemma. *Sei $\lesssim$ eine Quasiordnung auf einer Menge X. Dann ist $\lesssim$ genau dann eine WQO, wenn jedes $\lesssim$-Ideal endlich begrenzt ist.*

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei $\leq$ eine WQO auf X. *Angenommen*, Y ist ein $\lesssim$-Ideal ist, das nicht endlich begrenzt ist. Dann gibt es für alle $x_1, \ldots, x_n \in X \setminus Y$ entweder ein $y \in Y$ und ein $i, 1 \leq i \leq n$, so daß $x_i \lesssim y$ oder ein $x_{n+1} \in X \setminus Y$, so daß $x_i \not\lesssim x_{n+1}$ für alle $i \in [n]$. Der erste Fall kann aber nie eintreten, da $x_i \notin Y$ und da Y ein $\lesssim$-Ideal ist. Mittels des zweiten Falles können wir eine schlechte Folge konstruieren. das ist ein *Widerspruch*.

„$\Longleftarrow$“: Sei jedes $\lesssim$-Ideal endlich begrenzt. Sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Wir zeigen, dass $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gut ist. Betrachte das Ideal $Y := \left\{y \in X \;\middle|\; x_i \not\lesssim y \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\right\}$. Wähle $z_1, \ldots, z_n \in X$, so daß $Y = \left\{y \;\middle|\; z_i \not\lesssim y \text{ für alle } i \in [n]\right\}$. Für alle $i \in [n]$ existiert dann ein $k_i \in \mathbb{N}$, so daß $x_{k_i} \lesssim z_i$, denn sonst wäre $z_i \in Y$. Sei $k \geq \max\{k_1, \ldots, k_n\}$. Dann existiert ein $i \in [n]$, so daß $z_i \lesssim x_k$, denn sonst wäre $x_k \in Y$. Also gilt $x_{k_i} \lesssim x_k$ und die Folge $(x_i)_{i\geq 1}$ ist gut. □

(7.10) Korollar. *Der Minorensatz* (1.15) *ist äquivalent zur Aussage, daß die Minorenrelation $\leq$ auf der Klasse aller Graphen eine WQO ist.*

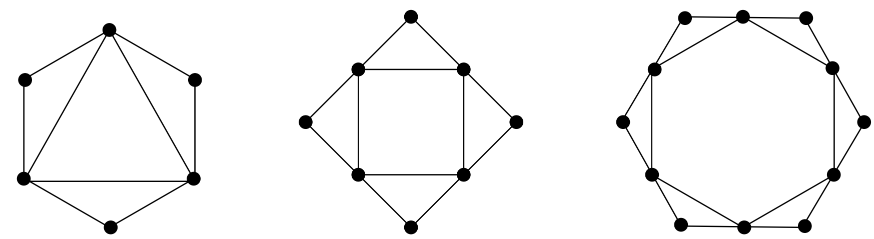

Abbildung 7.1. Die Graphen D_3, D_4 und D_6

(7.11) Beispiel. Die topologische Minorenrelation $\leq_T$ ist keine WQO auf der Klasse aller Graphen.

Um das zu sehen, definieren wir Graphen D_n, für $n \geq 3$: D_n ist der Graph, der aus einem Kreis C_n entsteht, wenn man jede Kante zu einem Dreieck erweitert. Formal definieren wir D_n durch:

$$\begin{aligned}V^{D_n} :=& \{1,\dots,n\} \times \{1,2\},\\ E^{D_n} :=& \Big\{(1,i)(1,j) \;\Big|\; 1 \le i \le n, i-j \equiv 1 \pmod{n}\Big\}\\ &\cup \Big\{(1,i)(2,i) \;\Big|\; 1 \le i \le n\Big\}\\ &\cup \Big\{(1,i)(2,j) \;\Big|\; 1 \le i \le n, i-j \equiv 1 \pmod{n}\Big\}\end{aligned}$$

(vgl. Abb. 7.1). Es ist leicht zu sehen, daß die Graphen D_n, für $n \ge 1$, eine unendliche Antikette bezgl. $\le_T$ bilden.

(7.12) Korollar. *Die topologische Minorenrelation $\le_T$ ist eine WQO auf der Klasse aller Graphen G mit Maximalgrad $\Delta(G) \le 3$.*

Beweis. Folgt aus Lemma 1.25 und dem Minorensatz. □

(7.13) Lemma. *Sei C ein Minorenideal.*

Dann ist die Klasse C genau dann bezüglich $\le$ endlich begrenzt, wenn sie bezüglich $\le_T$ endlich begrenzt ist.

Wir beweisen dieses Lemma ohne Verwendung des Minorensatzes. Die Rückrichtung ist natürlich trivial, wenn wir den Minorensatz annehmen.

Beweis. „$\Longrightarrow$“: Sei C bezüglich $\le$ endlich begrenzt. Sei

$$\mathcal{H} := \{H \mid H \notin C, \text{ für alle } G \prec_T H \text{ gilt } G \in C\}.$$

Behauptung 1. Für alle $I \notin C$ gibt es nur endlich viele $H \in \mathcal{H}$, so daß $I \le H$.

Beweis. Sei $I \notin C$ und $H \in \mathcal{H}$ mit $I \le H$. Weil alle $H' \prec_T H$ und damit auch alle ihre Minoren in C enthalten sind, geht I aus H allein durch eine Folge von Kontraktionen von Kanten vw hervor, bei denen sowohl v als auch w Grad ≥ 3 haben. Genauer gibt es eine Folge

$$H = I_1 \ge I_2 \ge \cdots \ge I_\ell = I$$

und, für $i \in [\ell - 1]$, Kanten $e_i = v_i w_i \in E^{I_i}$, so daß $I_{i+1} = I_i/e_i$ und $d^{I_i}(v_i), d^{I_i}(w_i) \ge 3$.

Sei $f(G) := \sum_{v \in V^G} 2^{d^G(v)}$. Dann gilt $f(I_i) \leq f(I_{i+1})$ für alle $i \in [\ell - 1]$, also $f(H) \leq f(I)$. Es gibt aber nur endlich viele H mit $f(H) \leq f(I)$. ⌟

Weil C bezgl. $\leq$ endlich begrenzt ist, existieren $I_1, \ldots, I_m$, so daß $C = \mathcal{X}(\{I_1, \ldots, I_m\})$. Für $i \in [m]$ sei $\mathcal{H}_i := \{H \in \mathcal{H} \mid I_i \leq H\}$. Wegen Behauptung 1 ist $\mathcal{H}_i$ bis auf Isomorphie endlich.

Behauptung 2.

$$C = \mathcal{X}_T\Big(\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{H}_i\Big).$$

Beweis.

„⊆“: Sei $G \in C$. *Angenommen*, es gibt ein $i \in [m]$ und ein $H \in \mathcal{H}_i$, so daß $H \leq_T G$. Dann gilt auch $H \leq G$, und weil C ein Minorenideal ist gilt $H \in C$ und damit auch $I_i \in C$. *Widerspruch*.

„⊇“: Sei umgekehrt an, $G \notin C$. Dann existiert ein $H \in \mathcal{H}$ mit $H \leq_T G$. Weil $H \notin C$ existiert ein $i \in [m]$, so daß $I_i \leq H$. Also gilt $H \in \mathcal{H}_i$. ⌟

„$\Longleftarrow$“: Sei C bezzgl. $\leq_T$ endlich begrenzt, etwa

$$C = \mathcal{X}_T(\{H_1, \ldots, H_m\}).$$

Behauptung 3.

$$C = \mathcal{X}(\{H_1, \ldots, H_m\}).$$

Beweis.

„⊆“: Sei $G \in C$. *Angenommen*, $H_i \leq G$ für ein $i \in [m]$. Dann gilt $H_i \in C$, weil C ein Minorenideal ist. *Widerspruch*.

„⊇“: Trivial, denn $H_i \not\leq G$ impliziert $H_i \not\leq_T G$. □

7.2 Der Satz von Kruskal

Für eine Menge X bezeichne $\binom{X}{<\omega}$ die Menge aller endlichen Teilmengen von X.

(7.14) Lemma (Higman [1952]). *Sei $\lesssim$ eine WQO auf einer Menge X. Sei $\lesssim^*$ wie folgt auf $\binom{X}{<\omega}$ definiert:*

$$Y \lesssim^* Z \;:\Longleftrightarrow\; \exists h : Y \to Z \text{ injektiv } \forall y \in Y : \; y \lesssim h(y)$$

(für $Y, Z \in \binom{X}{<\omega}$).

Dann ist $\lesssim^*$ eine WQO.

Beweis. Angenommen, $\lesssim^*$ ist keine WQO. Dann gibt es eine schlechte Folge bezgl. $\lesssim$. Wir definieren induktiv eine *minimale schlechte Folge* $(Y_i)_{i\geq 1}$: Nehmen wir an, $Y_1, \ldots, Y_{i-1}$ sind schon definiert, und zwar so, daß es eine schlechte Folge gibt, in der $(Y_j)_{1\leq j\leq i-1}$ ein Anfangstück ist. Dann wählen wir ein Y_i minimaler Mächtigkeit, so daß $(Y_j)_{1\leq j\leq i}$ Anfangstück einer schlechten Folge ist.

Dann ist $(Y_i)_{i\geq 1}$ in der Tat eine schlechte Folge, und es gilt $Y_i \neq \emptyset$ für alle $i \geq 1$.

Für $i \geq 1$ sei $y_i \in Y_i$ und $Z_i := Y_i \setminus \{y_i\}$. Da $\lesssim$ eine Wohlquasiordnung ist, besitzt die Folge $(y_i)_{i\geq 1}$ eine unendliche aufsteigende Teilfolge $(y_{k_i})_{i\geq 1}$ für geeignete $k_1 < k_2 < \cdots$.

Ich behaupte, daß die Folge $(Z_{k_i})_{i\geq 1}$ gut bezgl. $\lesssim^*$ ist. Nach Definition von Y_{k_1} ist die Folge

$$Y_1, \ldots, Y_{k_1-1}, Z_{k_1}, Z_{k_2}, \ldots$$

gut, besitzt also ein gutes Paar (l, m). Weil $(Y_i)_{i\geq 1}$ schlecht ist und $Z_{k_i} \subset Y_{k_i}$ und damit $Z_{k_i} \lesssim^* Y_{k_i}$, gilt $m > l \geq k_1$. Also ist (l, m) auch ein gutes Paar für $(Z_{k_i})_{i\geq 1}$.

Aber $Z_l \lesssim^* Z_m$ und $y_l \lesssim y_m$ implizieren $Y_l \lesssim^* Y_m$. Damit ist (l, m) auch ein gutes Paar für die schlechte Folge $(Y_i)_{i\geq 1}$ - ein Widerspruch. □

Sei $T = (V(T), E(T), r(T))$ ein Wurzelbaum. Es sei daran erinnert, dass wir mit $\trianglelefteq^T$ die "VorfahreRelation auf $V(T)$ bezeichnen, die eine partielle Ordnung auf $V(T)$ mit eindeutigem minimalen Element $r(T)$ ist. Für ein $s \in V(T)$ sei T_s der Wurzelbaum

$$\left(\{t \in V(T) \mid s \trianglelefteq^T t\}, E(T) \cap \binom{\{t \in V(T) \mid s \trianglelefteq^T t\}}{2}, s\right).$$

Für $s, t \in V(T)$ sei $s \wedge^T t$ das bezüglich $\trianglelefteq^T$ maximale u mit $u \trianglelefteq^T s$ und $u \trianglelefteq^T t$. Wir definieren eine Quasiordnung $\lesssim$ auf der Klasse aller Wurzelbäume durch

$$T \lesssim T' \;:\Longleftrightarrow\; \exists h : V(T) \to V(T') \forall s, t \in V(T) : \; h(s \wedge^T t) = h(s) \wedge^{T'} h(t).$$

Wir schreiben für ein solches h auch $h : T \precsim T'$.

(7.15) Lemma. *$\precsim$ ist eine WQO auf der Klasse aller Wurzelbäume.*

Beweis. Nehmen wir an, die Behauptung ist falsch. Wir konstruieren wieder eine minimale schlechte Folge $(T_i)_{i\geq 1}$. *Angenommen*, $T^1, \ldots, T^{i-1}$ sind schon definiert, und zwar so, daß es eine schlechte Folge gibt, von der $(T^j)_{j\in[i-1]}$ ein Anfangstück ist. Dann wählen wir ein T^i minimaler Höhe, so daß $(T^j)_{j\in[i]}$ Anfangstück einer schlechten Folge ist.

OBdA können wir annehmen, daß die Mengen $V(T^i)$ für $i \in \mathbb{N}_0$ paarweise disjunkt sind. Für $i \geq 1$ sei

$$\mathcal{S}^i := \left\{ T^i_t \;\middle|\; t \text{ Kind von } r(T^i) \right\}.$$

Sei $\mathcal{S} := \bigcup_{i\geq 1} \mathcal{S}^i$.

Behauptung. Die Einschränkung von $\precsim$ auf $\mathcal{S}$ ist eine WQO.

Beweis. Angenommen, $(S^i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0}$ ist eine schlechte Folge. Für alle $i \in [n]$ sei $k_i \in \mathbb{N}_0$, so dass $S^i \in \mathcal{S}_{k_i}$. Wegen der Minimalität der Folge $(T^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ ist dann

$$T^1, \ldots, T^{k_1-1}, S^1, S^2, \ldots$$

eine gute Folge. Weil die Folgen $(T^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und $(S^i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ beide schlecht sind, gibt es ein $j \in [1, k_1 - 1]$ und ein $i \in \mathbb{N}_0$, so dass $T^j \precsim S^i$. Dann gilt auch $T^j \precsim T^{k_i}$. Das ist ein *Widerspruch.* ⌟

Nach Lemma (7.14) ist damit auch $\precsim^*$ eine WQO von $\binom{\mathcal{S}}{<\omega}$.

Dann besitzt die Folge $(\mathcal{S}_i)_{i\geq 1}$ ein gutes Paar (i, j). Es ist leicht zu sehen, daß aus $\mathcal{S}_i \precsim^* \mathcal{S}_j$ auch $T_i \precsim T_j$ folgt. *Widerspruch.* □

(7.16) Korollar (Kruskal [1960]). *Die Einschränkungen von $\leq_T$ und $\leq$ auf die Klasse aller Bäume sind WQOen.*

Beweis. $T \precsim T'$ impliziert sowohl $(V(T), E(T)) \leq_T (V(T'), E(T'))$ als auch $(V(T), E(T)) \leq (V(T'), E(T'))$. □

7.3 WQO auf Graphen beschränkter Baumweite

(7.17) Satz (Robertson and Seymour [1990a]). *Sei $k \geq 1$. Die Einschränkung der Minorenrelation $\preceq$ auf die Klasse aller Graphen der Baumweite höchstens k ist eine WQO.*