



# Kapitel 6

## Verbotene vollständige Graphen

In Kapitel 3 haben wir bereits beobachtet, dass für  $k = 1, 2, 3$  gilt:

$$\mathcal{X}(K_k) = \mathcal{T}_{k-2}, \quad (6.A)$$

das heißt, ein Graph ist genau dann  $K_k$ -frei, wenn er Baumweite höchstens  $k - 2$  hat. Unser erstes Resultat dieses Kapitels besagt, dass (6.A) auch für  $k = 4$  gilt. Für  $k \geq 5$  gilt es allerdings nicht mehr, denn jeder planare Graph ist  $K_5$ -frei, es gibt aber planare Graphen beliebig großer Baumweite, etwa große Gitter.

Das zweite in diesem Kapitel vorgestellte Ergebnis ist ein Struktursatz für  $K_5$ -freie Graphen von Wagner [1964]. Robertson und Seymour ist es gelungen, eine Verallgemeinerung des Wagnerschen Struktursatzes auf  $K_k$ -freie Graphen für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  zu beweisen. Wir werden den Struktursatz von Robertson und Seymour hier vorstellen, aber nicht beweisen.

### 6.1 $K_4$ -freie Graphen

#### (6.1) Graphenklassen.

Sei  $\mathcal{Z}$  die Klasse aller zusammenhängenden Graphen.

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  seien  $\mathcal{Z}_k$  die Klasse aller  $k$ -zusammenhängenden Graphen und  $\mathcal{Z}_k^* := \mathcal{Z}_k \cup \bigcup_{j=1}^k \mathcal{K}_j$ , wobei  $\mathcal{K}_j = \{G \mid G \cong K_j\}$ .

**(6.2) Bemerkung.** Es gilt  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1^*$ .

**(6.3) Lemma (Transitivitätslemma für Baumzerlegungen).** Seien  $C_1, C_2, C_3$  Klassen von Graphen, so dass jeder Graph in  $C_1$  eine Baumzerlegung über  $C_2$  besitzt und jeder Graph in  $C_2$  eine Baumzerlegung über  $C_3$ . Dann besitzt jeder Graph in  $C_1$  eine Baumzerlegung über  $C_3$ .

*Beweis.* Seien  $G \in C_1$  und  $(T, \beta)$  eine Baumzerlegung von  $G$  über  $C_2$ . Für alle  $t \in V(T)$  sei  $(T_t, \beta_t)$  eine Baumzerlegung von  $\tau(t) \in C_2$  über  $C_3$ . OBdA seien die Bäume  $T_t$ , für  $t \in V(T)$ , paarweise disjunkt. Für  $e = tu \in E(T)$  ist  $\beta(t) \cap \beta(u)$  eine Clique in  $\tau(t)$ . Also gibt es nach Lemma (3.18) einen Knoten  $s(t, u) \in V(T_t)$ , so dass  $\beta(t) \cap \beta(u) \subseteq \beta_t(s(t, u))$ .

Wir definieren eine Baumzerlegung  $(T', \beta')$  von  $G$  wie folgt:

- $V(T') := \bigcup_{t \in V(T)} V(T_t)$ ;
- $E(T') := \bigcup_{t \in V(T)} E(T_t) \cup \bigcup_{tu \in E(T)} \{s(t, u), s(u, t)\}$ ;
- $\beta'(t') := \beta_t(t')$  für alle  $t \in V(T)$  und  $t' \in V(T_t)$ .

Es ist leicht zu sehen, dass  $(T', \beta')$  eine Baumzerlegung von  $G$  über  $C_3$  ist. □

**(6.4) Lemma.** Jeder nichtleere Graph  $G$  besitzt eine Baumzerlegung  $(T, \beta)$  über  $\mathcal{Z}$ , so dass für alle  $t \in V(T)$  der Torso  $\tau(t)$  eine Zusammenhangskomponente von  $G$  ist.

*Beweis.* Seien  $G$  ein nichtleerer Graph und  $A_1, \dots, A_m$  die Komponenten von  $G$ . Sei  $T$  ein beliebiger Baum mit  $V(T) := [m]$  und  $\beta : [m] \rightarrow 2^{V(G)}$  definiert durch  $\beta(i) := V(A_i)$ . Dann ist  $(T, \beta)$  eine Baumzerlegung von  $G$  mit den gewünschten Eigenschaften. □

**(6.5) Lemma.** Jeder nichtleere Graph  $G$  besitzt eine Baumzerlegung  $(T, \beta)$  über  $\mathcal{Z}_2^*$ , so dass für alle  $t \in V(T)$  der Torso  $\tau(t)$  ein induzierter Subgraph von  $G$  ist.

*Beweis.* Wir beweisen das Lemma per Induktion über  $|G|$ . Sei  $G$  ein nichtleerer Graph. Wegen Lemma (6.3) und Lemma (6.4) können wir OBdA annehmen, dass  $G$  zusammenhängend ist. Falls  $G \in \mathcal{Z}_2^*$ , so ist die triviale Baumzerlegung von  $G$  eine Zerlegung über  $\mathcal{Z}_2^*$ . Sonst besitzt  $G$  einen Trenner  $\{x\}$ . Seien  $A_1, \dots, A_m$  die Komponenten von  $G - x$ .

Für alle  $i \in m$  sei  $H_i := G[V(A_i) \cup \{x\}]$ . Dann ist  $H_i$  ein induzierter Subgraph von  $G$  der Ordnung  $|H_i| < |G|$ . Nach Induktionsannahme besitzt  $H_i$  eine Baumzerlegung  $(T_i, \beta_i)$  über  $\mathcal{Z}_2^*$ , so dass alle Torsi  $\tau_i(t)$  induzierte Subgraphen von  $H_i$  und damit von  $G$  sind.

OBdA können wir annehmen, dass die Bäume  $T_1, \dots, T_m$  paarweise disjunkt sind. Für alle  $i \in [m]$  sei  $r_i \in V(T_i)$ , so dass  $x \in \beta_i(r_i)$ .

Wir definieren eine Baumzerlegung  $(T, \beta)$  von  $G$  wie folgt:

- $V(T') := \bigcup_{i=1}^m V(T_i) \cup \{r\}$ , wobei  $r \notin \bigcup_{i=1}^m V(T_i) \cup \bigcup_{i=1}^m E(T_i)$  ein neuer Knoten ist;
- $E(T') := \bigcup_{i=1}^m E(T_i) \cup \{\{r, r_i\} \mid i \in [m]\}$ ;
- $\beta(r) := \{x\}$  und  $\beta(t) := \beta_i(t)$  für alle  $i \in [m]$  und  $t \in V(T_i)$ .

Dann ist  $(T, \beta)$  eine Baumzerlegung von  $G$  mit den gewünschten Eigenschaften. □

**(6.6) Bemerkung.** Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph. Man nennt die Torsi einer kleinen Baumzerlegung von  $G$  über  $\mathcal{Z}_2^*$  die *Blöcke* von  $G$ . Sie sind unabhängig von der Zerlegung eindeutig bestimmt.

**(6.7) Lemma.** Jeder Graph  $G$  besitzt eine Baumzerlegung  $(T, \beta)$  über  $\mathcal{Z}_3^*$ , so dass für alle  $t \in V(T)$  der Torso  $\tau(t)$  ein topologischer Minor von  $G$  ist.

*Beweis.* Wir beweisen das Lemma per Induktion über  $|G|$ . Sei  $G$  ein nichtleerer Graph. Wegen Lemma (6.3) und Lemma (6.5) können wir OBdA annehmen, dass  $G \in \mathcal{Z}_2^*$ . Falls  $G \in \mathcal{Z}_3^*$ , so ist triviale Baumzerlegung von  $G$  eine Zerlegung über  $\mathcal{Z}_3^*$ . Sonst besitzt  $G$  einen Trenner  $\{x, y\}$ . Seien  $A_1, \dots, A_m$  die Komponenten von  $G - \{x, y\}$ .

Für alle  $i \in m$  gilt  $N^G(A_i) = \{x, y\}$ , denn sonst wäre  $G$  nicht 2-zusammenhängend. Sei

$$H_i := G[V(A_i) \cup \{x, y\}] + xy.$$

Sei  $j \in [m] \setminus \{i\}$ . Dann gibt es, weil  $A_j$  zusammenhängend ist und  $N^G(A_j) = \{x, y\}$ , einen  $x$ - $y$ -Weg  $Q \subseteq G$  mit  $\overset{\circ}{Q} \subseteq A_j$ . Zieht man im Graphen  $G[A_i \cup \{x, y\}] \cup Q \subseteq G$  den Weg  $Q$  zu einer einzelnen Kante zusammen, so erhält man  $H_i$ . Also gilt  $H_i \leq_T G$ . Weil  $A_j \neq \emptyset$  gilt außerdem  $|H_i| < |G|$ . Nach Induktionsannahme besitzt  $H_i$  eine Baumzerlegung  $(T_i, \beta_i)$  über  $\mathcal{Z}_3^*$ , so dass alle Torsi  $\tau_i(t)$  topologische Minoren von  $H_i$  und damit von  $G$  sind. OBdA können wir annehmen, dass die Bäume  $T_1, \dots, T_m$  paarweise disjunkt sind. Für alle  $i \in [m]$  sei  $r_i \in V(T_i)$ , so dass  $\{x, y\} \subseteq \beta_i(r_i)$ .

Wir definieren eine Baumzerlegung  $(T, \beta)$  von  $G$  wie folgt:

- $V(T') := \bigcup_{i=1}^m V(T_i) \cup \{r\}$ , wobei  $r \notin \bigcup_{i=1}^m V(T_i) \cup \bigcup_{i=1}^m E(T_i)$  ein neuer Knoten ist;
- $E(T') := \bigcup_{i=1}^m E(T_i) \cup \{\{r, r_i\} \mid i \in [m]\}$ ;
- $\beta(r) := \{x, y\}$  und  $\beta(t) := \beta_i(t)$  für alle  $i \in [m]$  und  $t \in V(T_i)$ .

Dann ist  $(T, \beta)$  eine Baumzerlegung von  $G$  mit den gewünschten Eigenschaften. □

**(6.8) Satz.** Ein Graph  $G$  ist genau dann  $K_4$ -frei, wenn  $\text{tw}(G) \leq 2$ .

*Beweis.* „ $\implies$ “: Sei  $G$  ein nichtleerer  $K_4$ -freier Graph, und sei  $(T, \beta)$  eine Baumzerlegung von  $G$  über  $\mathcal{Z}_3^*$ . Falls  $\tau(t) \in \mathcal{Z}_3$  für ein  $t \in V(T)$ , so gilt nach Lemma (2.21):

$$K_4 \leq \tau(t) \leq G.$$

Das widerspricht der  $K_4$ -Freiheit von  $G$ . Also gilt  $\tau(t) \in \mathcal{Z}_3^* \setminus \mathcal{Z}_3 = \{K_1, K_2, K_3\}$  und damit  $|\beta(t)| \leq 3$  für alle  $t \in V(T)$ . Damit ist die Weite von  $(T, \beta)$  höchstens 2.

„ $\impliedby$ “: Trivial. □

## 6.2 $K_5$ -freie Graphen

**(6.9) Der Graph  $L$ .**

$L$  sei der Graph mit  $V(L) := [8]$  und

$$E(L) := \{12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 81, 15, 26, 37, 48\}.$$

(vgl. Abbildung 6.1).  $\mathcal{L}$  sei die Klasse aller Graphen, die zu  $L$  oder einem Subgraph von  $L$  isomorph sind.

**(6.10) Lemma.** Der Graph  $L$  ist kantenmaximal in  $\mathcal{X}(K_5)$ .

*Beweis.* Um eine Ecke des Grades 4 zu erzeugen, muß man mindestens eine Kante in  $L$  zusammenziehen. Um also einen  $K_5$  zu erhalten, müßte man mindestens fünf Kanten zusammenziehen. Danach blieben aber nur noch drei Ecken übrig. Also gilt  $K_5 \not\leq L$ .

Abbildung 6.2 zeigt, dass  $K_5 \leq L + vw$  für alle  $vw \in \binom{V(L)}{2} \setminus E(L)$ . □

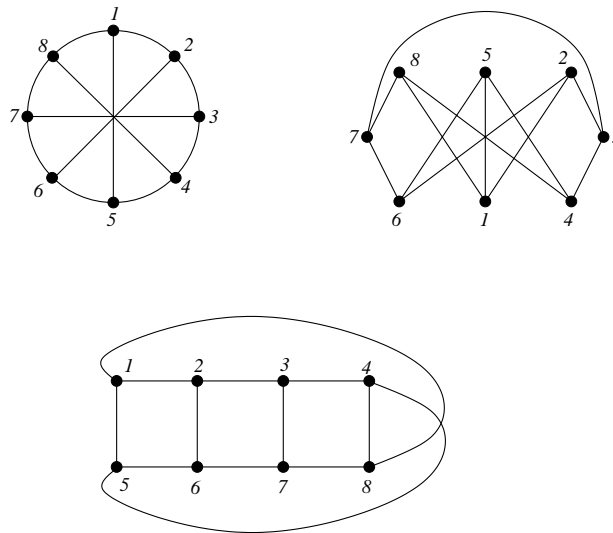


Abbildung 6.1. Dreimal der Graph  $L$

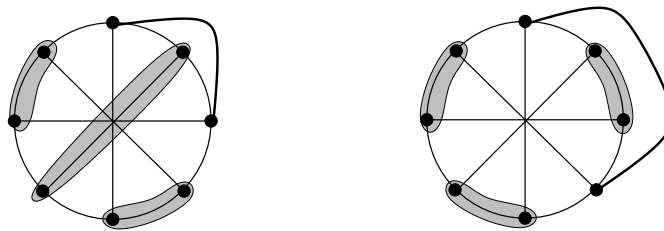


Abbildung 6.2.

**(6.11) Lemma.** *Jeder Graph in  $\mathcal{M}(\mathcal{P} \cup \mathcal{L})$  besitzt eine Baumzerlegung über  $\mathcal{L} \cup \mathcal{P}$ .*

*Beweis.* Übung. □

**(6.12) Satz von Wagner [1964].** *Ein Graph ist genau dann  $K_5$ -frei, wenn er eine Baumzerlegung über  $\mathcal{L} \cup \mathcal{P}$  besitzt.*

**(6.13) Lemma.** *Seien  $G, G_1, G_2$  Graphen mit  $G = G_1 \oplus G_2$  und  $|G_1 \cap G_2| \leq k$ . Sei  $H$  ein Graph, der entweder isomorph zu  $K_{k+1}$  oder  $(k + 1)$ -zusammenhängend ist. Dann gilt*

$$H \leq G \iff (H \leq G_1 \text{ oder } H \leq G_2).$$

*Beweis.* „ $\implies$ “: Es gelte  $H \leq G$ . Sei  $((A_x)_{x \in V(H)}, (P_e)_{e \in E(H)})$  ein Abbild von  $H$  in  $G$  mit  $|P_e| = 1$  für alle  $e \in E(H)$ . Sei  $K := G_1 \cap G_2$ . Weil  $|K| \leq k$ , gibt es ein  $x \in V(H)$  mit  $A_x \cap K = \emptyset$ . Wir wählen so ein  $x \in V(H)$ . Weil  $A_x$  zusammenhängend ist, gilt dann entweder  $A_x \subseteq G_1 \setminus V(K)$  oder  $A_x \subseteq G_2 \setminus V(K)$ , oBdA  $A_x \subseteq G_1 \setminus V(K)$ . Weil  $H = K_{k+1}$  oder  $H$   $(k+1)$ -zusammenhängend gilt dann  $A_y \cap G_1 \neq \emptyset$  für alle  $y \in V(H)$ .

Für alle  $y \in V(H)$  setzen wir  $A'_y := A_y \cap G_1$ . Dann ist  $A_y$  zusammenhängend, denn wenn  $P \subseteq A_y$  ein Weg von  $v \in V(A'_y)$  nach  $v' \in V(A'_y)$  ist, dann liegt dieser Weg ganz in  $G_1$  oder er enthält mindestens zwei Ecken von  $K$ . Nehmen wir an,  $P \not\subseteq G_1$ . Seien  $w$  die erste und  $w'$  die letzte Ecke von  $P$  in  $V(K)$ . Weil  $K$  vollständig ist, gilt  $ww' \in E(K) \subseteq E(G_1)$ , also  $vPww'Pv'$  ein Weg von  $v$  nach  $v'$  in  $A_y \cap G_1 = A'_y$ . Ähnlich kann man zeigen, dass es für alle  $yz \in E(H)$  eine Kante zwischen  $A'_y$  und  $A'_z$  gibt. Also gilt  $H \leq G_1$ .

„ $\Leftarrow$ “: Trivial.

□

**(6.14) Lemma.** Sei  $G$  ein kantenmaximaler Graph in  $\mathcal{X}(K_5)$ , der nicht simplizial zerlegbar ist. Dann ist  $G$  planar oder  $G = L$ .

*Beweis.* OBdA nehmen wir an, dass  $G$  nicht planar ist. Dann gilt  $|G| \geq 5$ .

*Behauptung 1.*  $G$  ist 3-zusammenhängend.

*Beweis.*  $G$  ist 2-zusammenhängend, denn sonst gäbe es eine simpliziale Zerlegung von  $G$ . Angenommen,  $\{x, y\}$  ist ein Trenner von  $G$ . Seien  $A_1, \dots, A_m$  die Komponenten von  $G \setminus \{x, y\}$ . Für alle  $i \in [m]$  sei  $H_i := G[V(A_i) \cup \{x, y\}] + xy$ . Wie im Beweis von Lemma (6.7) sieht man, dass  $H_i \leq G$ . Also gilt  $K_5 \not\leq G$ . Sei  $G_1 := H_1$  und für alle  $i \in [2, m]$  sei  $G_i := G_{i-1} \oplus H_i$ . Dann ist  $G_m := G + xy$ . Nach Lemma (6.13) gilt  $G_i \in \mathcal{X}(K_5)$  für alle  $i \in [m]$ , insbesondere also  $G + xy \in \mathcal{X}(K_5)$ . Wegen der Kantenmaximalität von  $G$  bedeutet dies  $xy \in E(G)$  und damit  $G + xy = G$ . Dann ist aber  $G = G_{m-1} \oplus H_m$ , also ist  $G$  simplizial zerlegbar. Das ist ein *Widerspruch*.  $\lrcorner$

*Behauptung 2.* Für jeden Trenner  $S = \{s_1, s_2, s_3\}$  von  $G$  hat  $G \setminus S$  genau zwei Komponenten, von denen eine die Ordnung 1 hat.

*Beweis.* Sei  $S = \{s_1, s_2, s_3\}$  ein Trenner von  $G$ . Weil  $G$  nicht simplizial zerlegbar ist, ist  $S$

keine Clique in  $G$ , also  $K[S] \not\subseteq G$ . Seien  $A_1, \dots, A_m$  die Komponenten von  $G \setminus S$ . OBdA gelte  $|A_1| \geq |A_2| \geq \dots \geq |A_m|$ . Für alle  $i \in [m]$  sei  $H_i := G[V(A_i) \cup S] \cup K[S]$ .

*Behauptung 3.* Falls  $m \geq 3$ , so gilt  $H_i \leq G$  für alle  $i \in [m]$ .

*Beweis.* Weil  $G$  3-zusammenhängend ist, gilt  $N^G(A_j) = S$  für alle  $j \in [m]$ . Damit sieht man leicht, dass  $K[S] \leq G[V(A_j) \cup V(A_k) \cup S]$  für alle  $j, k \in [m]$  mit  $j \neq k$ . Behauptung 3 folgt.  $\lrcorner$

*Behauptung 4.* Sei  $i \in [m]$ . Falls  $|A_i| \geq 2$ , so gilt  $H_j \leq G$  für alle  $j \in [m] \setminus \{i\}$ .

*Beweis.* Es gelte  $|A_i| \geq 2$ . Sei  $v \in V(A_i) \setminus S$ . Weil  $G$  3-zusammenhängend ist, gibt es in  $G$  kreuzungsfreie Wege  $P_1, P_2, P_3 \subseteq G[V(A_i) \cup S]$  von  $v$  nach  $s_1, s_2$  bzw.  $s_3$ .

*Behauptung 5.* Es gibt  $k, \ell \in [3]$  mit  $k \neq \ell$  und einen Weg  $P \subseteq G$  mit Endecken  $v' \in V(P_k) \setminus \{v\}$ ,  $v'' \in V(P_\ell) \setminus \{v\}$  und  $\overset{\circ}{P} \cap (P_1 \cup P_2 \cup P_3) = \emptyset$ .

*Beweis.* Wir unterscheiden folgende zwei Fälle:

*Fall 1:*  $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3) = \{v, s_1, s_2, s_3\}$ .

Weil  $|A_1 \setminus S| \geq 2$  gibt es ein  $w \in V(A_1) \setminus \{v\}$ . Weil  $G$  3-zusammenhängend ist, gibt es in  $G \setminus \{v\}$  zwei kreuzungsfreie Wege  $Q, Q'$  von  $\{w\}$  nach  $S$ . Wir setzen  $P := Q \cup Q'$ .

*Fall 2:*  $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3) \neq \{v, s_1, s_2, s_3\}$ .

Sei  $w \in V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3) \setminus \{v, s_1, s_2, s_3\}$ . OBdA sei  $w \in V(P_1)$ . Weil  $G$  3-zusammenhängend ist, gibt es in  $G \setminus \{v, s_1\}$  einen Weg  $P$  von  $\{w\}$  nach  $V(P_2) \cup V(P_3)$ .

Damit ist Behauptung 5 bewiesen.  $\lrcorner$

Sei nun  $j \in [m] \setminus \{i\}$ . Wie man in Abbildung 6.3 sieht, gilt  $H_j \leq G$ . Damit ist Behauptung 4 bewiesen.  $\lrcorner$

Um Behauptung 2 zu beweisen, setzen wir  $G_1 := H_1$  und  $G_i := G_{i-1} \oplus H_i$  für alle  $i \in [2, m]$ . Dann ist  $G_m := G \cup K[S]$ . Angenommen, Behauptung 2 ist falsch. Dann folgt aus den Behauptungen 3 und 4, dass  $H_i \leq G$  für alle  $i \in [m]$  und damit  $H_i \in \mathcal{X}(K_5)$ . Nach Lemma (6.13) gilt dann auch  $G_i \in \mathcal{X}(K_5)$ , insbesondere also  $G \cup K[S] \in \mathcal{X}(K_5)$ . Wegen der Kantenmaximalität von  $G$  bedeutet dies  $K[S] \subseteq G$ . Das ist ein *Widerspruch*, und Behauptung 2 ist bewiesen.  $\lrcorner$

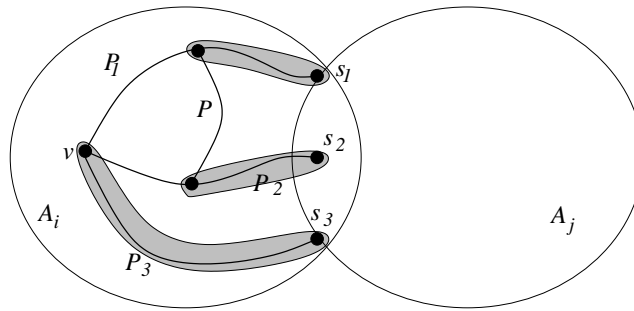


Abbildung 6.3.

*Behauptung 6.*  $L \leq_T G$ .

*Beweis.* Angenommen,  $L \not\leq_T G$ . Weil  $G$  nicht planar ist und  $K_5 \not\leq G$ , gilt nach dem Satz von Kuratowski  $K_{3,3} \leq_T G$ . Sei  $((A_i)_{i \in [6]}, (P_{ij})_{i \in [3], j \in [4,6]})$  ein Abbild von  $K_{3,3}$  in  $G$  mit  $|A_i| = 1$ , etwa  $V(A_i) =: \{v_i\}$ , für alle  $i \in [6]$ . Sei  $H := \bigcup_{i \in [3], j \in [4,6]} P_{ij}$ . Für  $i \in [3]$  sei

$X_i := V(P_{i4} \cup P_{i5} \cup P_{i6}) \setminus \{v_4, v_5, v_6\}$ , und für  $j \in [4, 6]$  sei  $Y_j := V(P_{1j} \cup P_{2j} \cup P_{3j}) \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$ .

Nach Behauptung 2 hat  $G \setminus \{v_1, v_2, v_3\}$  höchstens zwei Zusammenhangskomponenten.

Also gibt es  $j, \ell \in [4, 6]$  mit  $j \neq \ell$  und einen  $Y_j$ - $Y_\ell$ -Weg  $Q$  mit  $V(Q) \cap V(H) = \emptyset$ . Wenn es kein  $q \in [3]$  gibt, so dass die Endecken von  $Q$  in  $V(P_{qj})$  und  $V(P_{q\ell})$  liegen, so gilt  $L \leq_T G$ , wie die zweite Darstellung von  $L$  in Abbildung 6.1 zeigt. Also gibt es solch ein  $q$ . Aus Symmetriegründen gibt es  $i, k \in [3]$  mit  $i \neq k$ , ein  $p \in [4, 6]$  und einen  $X_i$ - $X_k$ -Weg  $P$  mit  $V(P) \cap V(H) = \emptyset$ , so dass die beiden Endecken von  $P$  in  $P_{ip}$  und  $P_{kp}$  liegen.

Eine Reihe von Fallunterscheidungen zeigt jetzt, dass  $K_5 \leq H \cup P \cup Q$  (vgl. Abbildung 6.4). Das ist ein *Widerspruch*. ┘

Sei nun  $((A_x)_{x \in V(L)}, (P_e)_{e \in E(L)})$  ein Abbild von  $L$  in  $G$  mit  $|A_x| = 1$  für alle  $x \in V(L)$ , so dass  $\left| \bigcup_{e \in E(L)} P_e \right|$  minimal ist unter allen solchen Abbildern. Sei  $H := \bigcup_{e \in E(L)} P_e$ . Dann ist  $H$  isomorph zu einer Unterteilung von  $L$ .

*Behauptung 7.*  $G = H$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass  $V(G) = V(H)$ . Angenommen,  $V(G) \neq V(H)$ . Weil  $G$  3-zusammenhängend ist, gibt es eine Komponente  $A$  von  $G \setminus V(H)$  und Kanten  $e, f \in E(L)$  mit  $e \neq f$ , so dass  $N^G(A) \cap V(P_e \setminus P_f) \neq \emptyset$  und  $N^G(A) \cap V(P_e \setminus P_f) \neq \emptyset$ . Wähle eine solche Komponente  $A$  und dazu Kanten  $e = vw, f = xy \in E(L)$ . OBdA gelte  $v \notin \{x, y\}$  und  $x \notin \{v, w\}$ . Dann gilt  $L + vx \leq G$  und damit  $K_5 \leq G$  wegen der

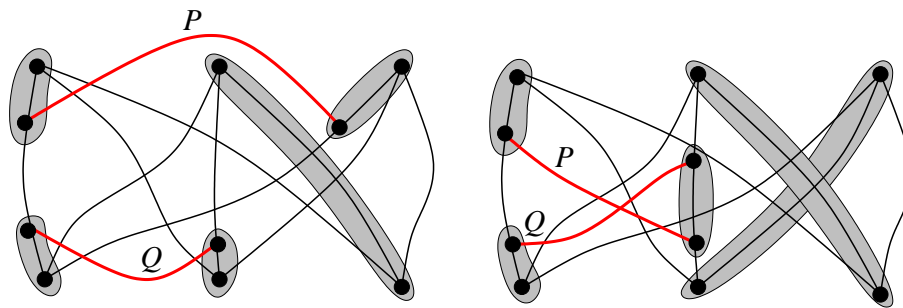


Abbildung 6.4.

Kantenmaximalität von  $L$  in  $\mathcal{X}(K_5)$ . Das ist ein *Widerspruch*.

Wir müssen noch zeigen, dass  $E(G) = E(H)$ . Angenommen,  $E(G) \setminus E(H) \neq \emptyset$ . Sei  $e = vw \in E(G) \setminus E(H)$ . Wenn es ein  $f \in E(L)$  gibt, so dass  $v, w \in V(P_f)$ , so gibt es ein Abbild von  $L$  in  $G$ , das weniger Ecken verwendet, was der Minimalität unseres Abbilds *widerspricht*. Also gibt es  $f, f' \in E(L)$  mit  $v \in V(P_f) \setminus V(P_{f'})$  und  $w \in V(P_{f'}) \setminus V(P_f)$ . Dann gilt aber wieder  $K_5 \leq G$ , ebenfalls ein *Widerspruch*.  $\lrcorner$

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $H \cong L$ . Das ist aber klar, weil  $G = H$

3-zusammenhängend ist, im Gegensatz zu jeder echten Unterteilung von  $L$ .  $\square$

*Beweis des Satzes von Wagner. „ $\implies$ “:* Sei  $G \in \mathcal{X}(K_5)$ , und sei  $G' \supseteq G$  mit  $V(G') = V(G)$  kantenmaximal in  $\mathcal{X}(K_5)$ . Nach Satz (3.70) und Satz (3.73) besitzt  $G'$  dann eine simpliziale Baumzerlegung  $(T, \beta)$ , so dass für alle  $t \in V(T)$  der Graph  $G[\beta(t)]$  nicht weiter simplizial zerlegbar ist.

Sei  $t \in V(T)$ . Weil die Zerlegung  $(T, \beta)$  simplizial ist, gilt  $\tau(t) = G[\beta(t)] \subseteq G$ , also  $\tau(t) \in \mathcal{X}(K_5)$ . Weil  $G'$  kantenmaximal in  $\mathcal{X}(K_5)$  ist, ist auch  $\tau(t)$  kantenmaximal in  $\mathcal{X}(K_5)$ . Nach Lemma (6.14) ist  $\tau(t)$  also planar oder isomorph zu  $L$  und damit in  $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ . Also ist  $(T, \beta)$  eine Baumzerlegung von  $G'$  über  $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ , und weil  $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$  abgeschlossen ist unter Subgraphenbildung, auch eine Baumzerlegung von  $G$  über  $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ .

*„ $\impliedby$ “:* Besitze  $G$  eine Baumzerlegung über  $\mathcal{P} \cup \mathcal{L}$ . Angenommen,  $K_5 \leq G$ . Wegen Korollar (3.80) besitzt dann auch  $K_5$  eine Baumzerlegung über dem Minoreneideal  $\mathcal{M}(\mathcal{P} \cup \mathcal{L})$ . Sei  $(T, \beta)$  eine solche Baumzerlegung. Wegen Lemma (3.18) gibt es ein  $t \in V(T)$ , so dass  $\beta(t) = V(K_5)$  und damit  $\tau(t) = K_5$ . Also

$K_5 \in \mathcal{M}(\mathcal{P} \cup \mathcal{L})$ , ein Widerspruch.

□

## 6.3 Graphen auf Flächen

Flächen sind zusammenhängende topologische Räume, die lokal, also in einer kleinen Umgebung um jeden Punkt, wie eine offene Kreisscheibe aussehen, und die global „abgeschlossen“ sind. Formal sind *Flächen* kompakte zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten. Abbildungen 6.5 und 6.6 zeigen einige Beispiele von Flächen.

Jede Fläche lässt sich wie folgt konstruieren: Man nimmt ein Polygon mit einer geraden Anzahl von Ecken und damit Seiten. Jeder Seite des Polygons gibt man eine Richtung und Farbe, und zwar so, dass jede Farbe genau für zwei Seiten verwendet wird. Dann identifiziert man jeweils die Paare von Seiten gleicher Farbe in der angegebenen Richtung (vgl. Abbildung 6.7).

Eine andere Art, eine neue Fläche  $S'$  aus einer Fläche  $S$  zu gewinnen besteht darin, einen „Henkel anzukleben“ (vgl. Abbildung 6.8(a)): Man löscht aus  $S$  zwei offene Kreisscheiben mit disjunktem Abschluss. Dann nimmt man einen Zylinder und identifiziert die beiden Randkreise des Zylinders mit den Rändern der Kreisscheiben. Genauso kann man an  $S$  eine „Kreuzkappe ankleben“ (vgl. Abbildung 6.8(b)): Dazu löscht man aus  $S$  eine offene Kreisscheibe. Dann nimmt man ein Möbiusband und identifiziert den Rand des Möbiusbandes mit dem Rand der Kreisscheibe. Für alle  $g \in \mathbb{N}_0$  sei  $S_g$  die Fläche, die man aus der Sphäre  $S^2$  erhält, wenn man  $g$  Henkel anklebt. Dann ist  $S_0 = S^2$  die Sphäre,  $S_1$  ist homöomorph zum Torus, und  $S_2$  ist homöomorph zum Doppeltorus. Für alle  $h \in \mathbb{N}$  sei  $N_h$  die Fläche, die man aus der Sphäre erhält, wenn man  $h$  Kreuzkappen anklebt. Dann ist  $N_1$  homöomorph zur projektiven Ebene, und  $N_2$  ist homöomorph zur Kleinschen Flasche.

**(6.15) Klassifikation der Flächen.** *Jede Fläche ist homöomorph zu  $S_g$  für ein  $g \in \mathbb{N}_0$  oder zu  $N_h$  für ein  $h \in \mathbb{N}$ . Ferner sind die Flächen  $S_g$ , für  $g \in \mathbb{N}_0$ , und  $N_h$  für ein  $h \in \mathbb{N}$  paarweise nicht homöomorph zueinander.*

Die Flächen  $S_g$ , für  $g \in \mathbb{N}_0$ , sind *orientierbar*, und sie lassen sich alle in den  $\mathbb{R}^3$  einbetten. Die Flächen  $N_h$ , für  $h \in \mathbb{N}$ , sind *nicht orientierbar* und lassen sich auch nicht (kreuzungsfrei) in den  $\mathbb{R}^3$  einbetten.



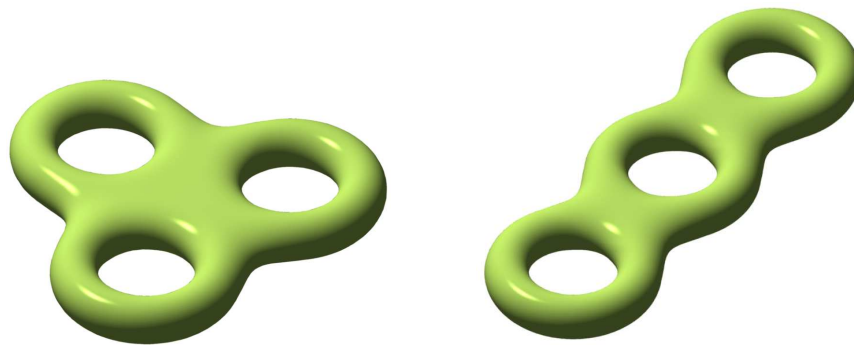
Sphäre  $S_0$



Torus  $S_1$

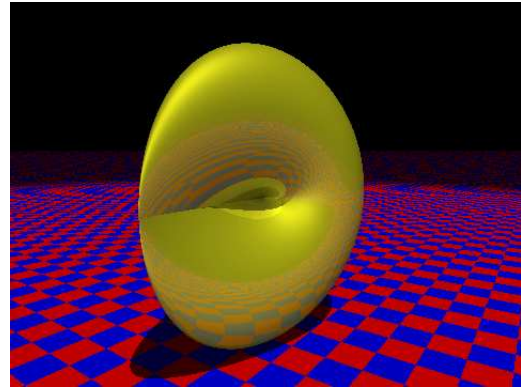
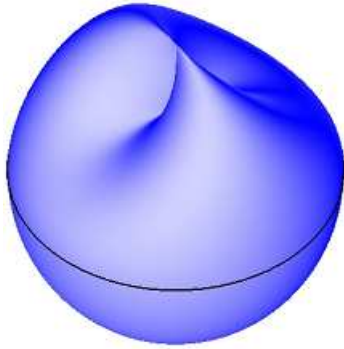


Doppeltorus  $S_2$

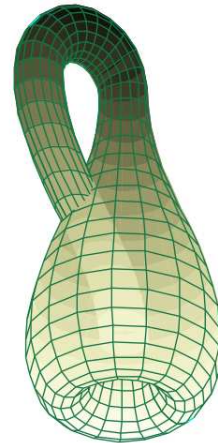
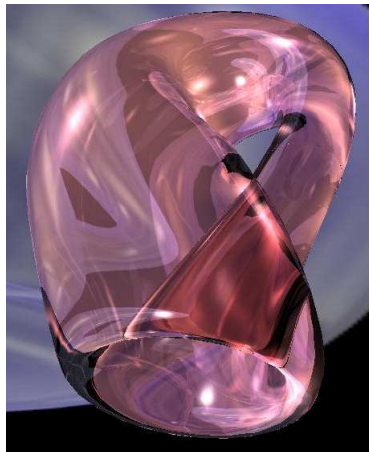


Tripeltorus  $S_3$

**Abbildung 6.5.** Orientierbare Flächen

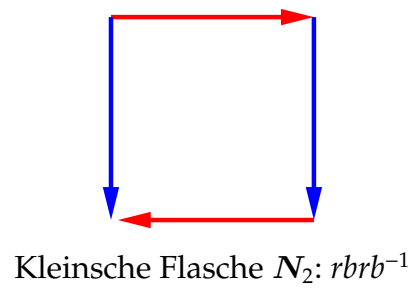
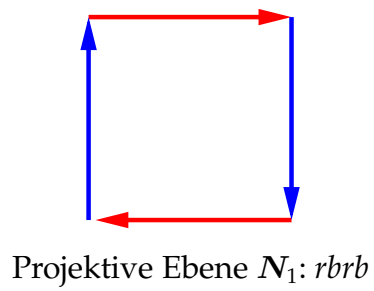
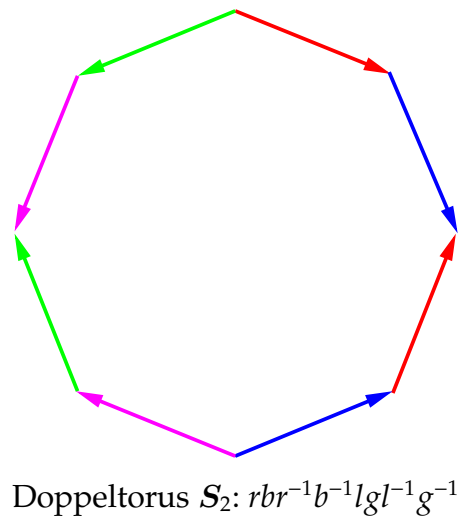
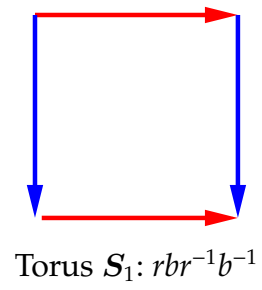
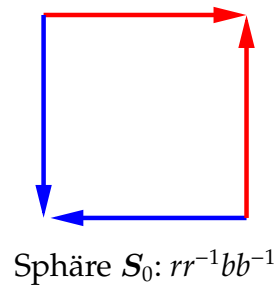


Projektive Ebene  $N_1$

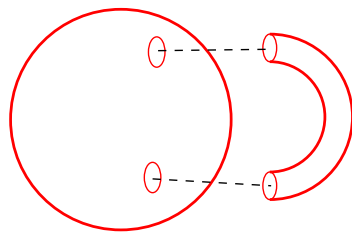


Kleinsche Flasche  $N_2$

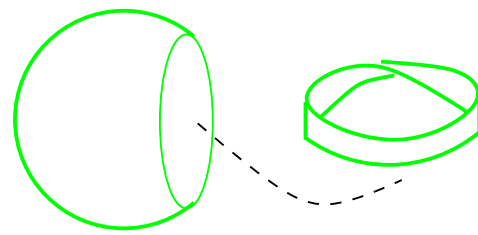
**Abbildung 6.6.** Nichtorientierbare Flächen



**Abbildung 6.7.** Polygondarstellung einiger Flächen



(a) Ankleben eines Henkels



(b) Ankleben einer Kreuzkappe

**Abbildung 6.8.** Konstruktion von Flächen

Die *Euler-Charakteristik* einer Fläche  $S$  ist die Zahl

$$\chi(S) := \begin{cases} 2 - 2g & \text{falls } S \simeq S_g \text{ für ein } g \in \mathbb{N}_0, \\ 2 - h & \text{falls } S \simeq N_h \text{ für ein } h \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**(6.16) Definition.** Sei  $S$  eine Fläche. Ein *in  $S$  eingebetteter Graph* (kurz: *Graph in  $S$* ) ist ein Paar  $G = (V(G), E(G))$ , bestehend aus einer endlichen Menge  $V(G) \subseteq S$ , deren Elemente wir als die *Ecken* von  $G$  bezeichnen, und einer endlichen Menge  $E(G)$  von Kurven in  $S$ , deren Elemente wir als die *Kanten* von  $G$  bezeichnen, so dass gilt:

- (i) Für alle Kanten  $e \in E(G)$  sind beide Endpunkte, aber kein innerer Punkt von  $e$  in  $V(G)$  enthalten.
- (ii) Die Kanten in  $E(G)$  sind paarweise kreuzungsfrei.
- (iii) Für je zwei Ecken  $v, w \in V(G)$  gibt es höchstens eine Kante in  $E(G)$  mit Endpunkten  $v$  und  $w$ .

Wie ein ebener Graph ist ein Graph  $G$  in einer Fläche  $S$  formal kein Graph, aber wir können ihm auf natürliche Weise einen Graphen zuordnen, den wir als den *zu  $G$  gehörigen abstrakten Graphen* bezeichnen. Ist  $G$  ein Graph in  $S$ , so bezeichnen wir mit  $\mathcal{G}$  die Menge  $V(G) \cup \bigcup_{e \in E(G)} e$  bzw. den auf dieser Menge induzierten Unterraum von  $S$ .

**(6.17) Definition.** Sei  $G$  ein Graph in einer Fläche  $S$ . Die *Gebiete* von  $G$  sind die Komponenten von  $S \setminus \mathcal{G}$ . Die Menge aller Gebiete von  $G$  bezeichnen wir mit  $F(G)$ .

**(6.18) Definition.**  $G$  ist *zellulär in  $S$  eingebettet*, wenn alle Gebiete von  $G$  offene Kreisscheiben sind.

Man beachte, dass jeder zusammenhängende ebene Graph zellulär in die Sphäre eingebettet ist. Das ist die Aussage von Lemma (2.6) (4).

**(6.19) Satz.** Sei  $S$  eine Fläche und  $G$  ein zellulär in  $S$  eingebetteter zusammenhängender Graph. Dann gilt

$$|G| - \|G\| + |F(G)| = \chi(S).$$

**(6.20) Definition.** Eine *Einbettung* eines Graphen  $G$  in eine Fläche  $S$  ist ein Isomorphismus von  $G$  auf einen Graphen  $G'$  in  $S$ . Genauer ist eine Einbettung eine Abbildung  $\Pi : V(G) \rightarrow V(G')$ , die ein Isomorphismus von  $G$  auf den zu  $G'$  gehörigen abstrakten Graphen ist.

Die Einbettung  $\Pi$  ist *zellulär*, wenn der Graph  $G'$  zellulär in  $S$  eingebettet ist.

Ist  $\Pi$  eine Einbettung von  $G$  in eine Fläche  $S$ , die  $G$  auf den in  $S$  eingebetteten Graphen  $G'$  abbildet, so bezeichnen wir  $G'$  auch mit  $\Pi(G)$ . Wir setzen  $\Pi$  auf  $E(G)$  fort: Für  $e = vw \in E(G)$  sei  $\Pi(e) \in E(G')$  die Kante mit Endpunkten  $\Pi(v), \Pi(w)$ . Die *Gebiete* von  $\Pi$  sind die Gebiete von  $G'$ ; die Menge aller Gebiete von  $\Pi$  bezeichnen wir mit  $F(\Pi)$ . Die Klasse aller in  $S$  einbettbaren Graphen bezeichnen wir mit  $\mathcal{E}(S)$ . Es gilt also  $\mathcal{E}(S_0) = \mathcal{P}$ . Eine detailliertere Einführung in Flächen findet man in Appendix B von Diestel [2005].

## 6.4 Der Struktursatz für $K_k$ -freie Graphen

Im Folgenden bezeichne  $P_n$  wieder den Weg  $([n], \{i, (i+1) \mid i \in [n-1]\})$ .

**(6.21) Definition.** Sei  $r \in \mathbb{N}_0$ . Ein  $r$ -Ring ist ein Paar  $(G, \vec{v})$ , wobei  $G$  ein Graph ist und  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \in V(G)^n$ , so dass eine Wegzerlegung  $(P_n, \beta)$  von  $G$  der Weite  $r$  existiert mit  $v_i \in \beta(i)$  für alle  $i \in [n]$ .

Ein  $r$ -Ring  $(G, \vec{v})$  ist an einer geschlossenen Kreisscheibe  $D$  *befestigt*, wenn  $V(G) \cap D = V(G) \cap \mathbf{bd}(D) = \{v_1, \dots, v_n\}$ , und die Punkte  $v_1, \dots, v_n$  sind auf der geschlossenen Kurve  $\mathbf{bd}(D)$  zyklisch angeordnet.

Formal sagen wir, dass Punkte  $x_1, \dots, x_n \subseteq C$  auf einer geschlossenen Kurve  $C$  *zyklisch angeordnet* sind, wenn es einen Homöomorphismus  $g : S^1 \rightarrow C$  gibt, so dass  $x_i = g(\cos(2\pi \cdot i/n), \sin(2\pi \cdot i/n))$  für alle  $i \in [n]$ .

**(6.22) Definition.** Seien  $p, q, r \in \mathbb{N}_0$  und  $S$  ein Fläche.

(1) Ein Graph  $G$  ist  $(q, r)$ -fast in  $S$ , wenn es einen Graphen  $G_0$  in  $S$  mit  $G_0 \subseteq G$  (als abstrakter Graph), paarweise disjunkte Graphen  $G_1, \dots, G_q \subseteq G$ , Tupel  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q$  von Ecken von  $G$  und paarweise disjunkte geschlossene Kreisscheiben  $D_1, \dots, D_q \subseteq S$  gibt, so dass gilt:

(i)  $G = G_0 \cup G_1 \cup \dots \cup G_q$ .

(ii) Für alle  $i \in [q]$  gilt  $E(G_0) \cap E(G_i) = \emptyset$  und

$$V(G_0) \cap V(G_i) = G_0 \cap D_i = \{v_{i1}, \dots, v_{in_i}\},$$

wobei  $\vec{v}_i = (v_{i1}, \dots, v_{in_i})$ .

(iii) Für alle  $i \in [q]$  ist  $(G_i, \vec{v}_i)$  ein  $r$ -Ring, der an der Kreisscheibe  $D_i$  befestigt ist.

(2) Ein Graph  $G$  ist  $(p, q, r)$ -fast in  $S$ , wenn es eine Menge  $X \subseteq V(G)$  gibt, so dass  $|X| \leq p$  und der Graph  $G - X$  ist  $(q, r)$ -fast in  $S$ .

(3) Ein Graph  $G$  ist  $(p, q, r)$ -fast einbettbar in  $S$ , wenn  $G$  isomorph ist zu einem Graphen  $G'$ , der  $(p, q, r)$ -fast in  $S$  ist.

(4) Die Klasse aller  $(p, q, r)$ -fast in  $S$  einbettbaren Graphen bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}(S, p, q, r)$ .

Man beachte, dass  $\mathcal{E}(S) = \mathcal{F}(S, 0, 0, 0) = \mathcal{F}(S, 0, 0, r)$  für alle  $r \in \mathbb{N}$ . Außerdem ist  $\mathcal{F}(S_0, 1, 0, 0)$  die Klasse aller Apexgraphen.

**(6.23) Satz (Robertson and Seymour [1986c]).** Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  existieren eine Fläche  $S$  und Zahlen  $p, q, r \in \mathbb{N}_0$ , so dass

$$\mathcal{X}(K_k) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}(S, p, q, r)),$$

das heißt, alle  $K_k$ -freien Graphen besitzen eine Baumzerlegung über der Klasse aller  $(p, q, r)$ -fast in  $S$  einbettbaren Graphen.

Als Fläche  $S$  im vorherigen Satz kann man die Fläche  $N_h$  für das kleinste  $h \in \mathbb{N}_0$ , so dass sich  $K_k$  nicht in  $N_h$  einbetten läßt, wählen.

**(6.24) Korollar.** Für alle Graphen  $H$  existieren eine Fläche  $S$  und Zahlen  $p, q, r \in \mathbb{N}_0$ , so dass

$$\mathcal{X}(H) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}(S, p, q, r)).$$

*Beweis.* Es gilt  $H \leq K_k$  für  $k = |H|$ , also  $\mathcal{X}(H) \subseteq \mathcal{X}(K_k)$ . □