Kapitel 5

Verbotene planare Graphen

Das Hauptergebnis dieses Kapitels ist ein wichtiger technischer Satz von Robertson und Seymour, der besagt, dass ein Graph genau dann große Baumweite hat, wenn er ein großes Gitter als Minor enthält.

Der hier gegebene Beweis stammt im Wesentlichen von Diestel, Gorbunov, Jensen und Thomassen [1999].

5.1 Der Gittersatz und einige Konsequenzen

(5.1) Gittersatz (Robertson and Seymour [1990a]). *Es gibt eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq 1$ jeder Graph der Baumweite mindestens $f(n)$ ein $(n \times n)$-Gitter als Minor enthält.*

Der Beweis des Satzes verläuft in drei Schritten: Wir führen zwei neue Konfigurationen in Graphen ein, *Gewirre* und *Gewebe*. In Abschnitt 5.2 zeigen wir, dass ein Graph großer Baumweite ein großes Gewirr enthält. In Abschnitt 5.3 zeigen wir, dass ein großes Gewirr ein großes Gewebe enthält. In Abschnitt 5.4 zeigen wir schließlich, dass ein großes Gewebe ein großes Gitter als Minor enthält.

(5.2) Korollar. *Eine Klasse $\mathcal{C}$ hat genau dann beschränkte Baumweite, wenn es ein Gitter H gibt, so dass $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}(H)$.*

(5.3) Satz. *Für jeden planaren Graphen G gibt es ein $n \geq 1$, so dass $G \preceq G_{n,n}$.*

Beweis. Intuitiv liegt das daran, dass wir jeden Graphen in der Weise auf Millimeterpapier zeichnen können, wie das in Abbildung 5.1 angedeutet ist. Es ist

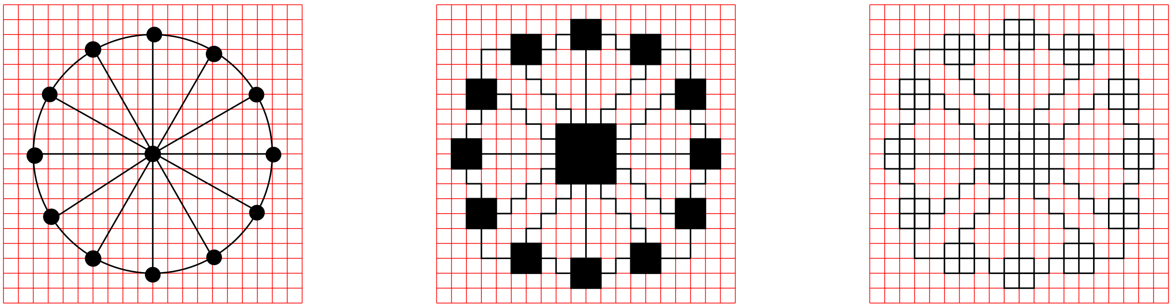

Abbildung 5.1.

mühselig, aber einfach, basierend auf dieser Idee einen Beweis zu führen. □

(5.4) Korollar. *Eine Klasse C hat genau dann beschränkte Baumweite, wenn es einen planaren Graphen H gibt, so dass $C \subseteq \mathcal{X}(H)$.*

(5.5) Korollar. *Für alle Graphen H gilt:*

$$\mathcal{X}(H) \text{ hat beschränkte Baumweite } \iff H \text{ ist planar.}$$

5.2 Gewirre

(5.6) Definition. Seien $k, l \in \mathbb{N}$ und G ein Graph. Ein (k, ℓ)-*Gewirr* in G ist ein Tupel $(X_1, \dots, X_k, Y)$ von disjunkten Teilmengen von $V(G)$, für das gilt:

(1) $X_1, \dots, X_k$ sind zusammenhängend in G.

(2) Für $i, j \in [k]$ mit $i \neq j$ gibt es eine Familie von ℓ paarweise disjunkten Wegen von X_i nach X_j, deren innere Ecken alle in Y liegen.

(5.7) Lemma. *Seien $k, \ell \in \mathbb{N}$ und G ein Graph der Baumweite mindestens $(k+1)\ell - 1$. Dann gibt es in G ein (k, ℓ)-Gewirr.*

Beweis. OBdA sei G zusammenhängend. Wenn nicht, so besitzt G eine Komponente der Baumweite mindestens $(k+1)\ell - 1$, und wir können diese betrachten.

Angenommen, es gibt kein (k, ℓ)-Gewirr in G.

Sei $W \subseteq V(G)$ maximal mit folgenden Eigenschaften:

(1) $G[W]$ besitzt eine Baumzerlegung (T, β) der Weite höchstens $(k+1)\ell - 2$.

(2) Für alle Komponenten A von $G \setminus W$ gilt:

   (a) Es gibt ein $t \in V(T)$ mit $N^G(A) \subseteq \beta(t)$.

   (b) Es gibt zusammenhängende disjunkte Teilmengen $X_1, \ldots, X_k \subseteq V(G) \setminus V(A)$, so dass $N^G(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^k X_i$ und $N^G(A) \cap X_i \leq \ell$ für alle $i \in [k]$.

Man beachte, dass jede k-elementige Teilmenge von G (1) und (2) erfüllt. Also ist W wohldefiniert. Wegen $\mathrm{tw}(G) \geq (k+1)\ell - 1$ gilt $W \neq V(G)$.

Sei A eine Komponente von $G \setminus W$ und $N := N^G(A)$. Sei (T, β) eine Baumzerlegung von $G[W]$ der Weite höchstens $(k+1)\ell - 2$ und $t \in V(T)$ mit $N \subseteq \beta(t)$. Seien $X_1, \ldots, X_k$ gemäß (2b) gewählt. Für $i \in [k]$ sei $N_i := N \cap X_i$. Wegen (2b) bilden dann $N_1, \ldots, N_k$ eine Partition von N, und es gilt $|N_i| \leq \ell$ für alle $i \in [k]$.

Behauptung 1. Für alle $i \in [k]$ gilt $|N_i| = \ell$.

Beweis. Nehmen wir an, dass $|N_i| < \ell$ für ein $i \in [k]$. Falls $N_i \neq \emptyset$, so sei $v \in N_i$ und $w \in V(A)$, so dass $v \in N^G(w)$. Solche v, w existieren, weil $N_i \subseteq N = N^G(A)$. Falls $N_i = \emptyset$, so sei $w \in V(A)$ beliebig. Sei $W' := W \cup \{w\}$.

Ich behaupte, dass W' die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Dies *widerspricht* der Maximalität von W.

Zu (1): Wir erweitern (T, β) zu einer Baumzerlegung (T', β') von $G[W']$, indem wir an t einen Knoten t' mit Beutel $\beta'(t') := N \cup \{w\}$ anhängen. Weil $N \subseteq \beta(t)$ und $N^G(w) \subseteq N$, ist dies eine Baumzerlegung. Weil $w(T, \beta) \leq (k+1)\ell - 2$ und $|N \cup \{w\}| = |N| + 1 = 1 + \sum_{j=1}^k |N_j| \leq 1 + k\ell - 1 = k\ell \leq (k+1)\ell - 1$, ist die Weite der Zerlegung höchstens $(k+1)\ell - 2$.

Zu (2): Sei A' eine Komponente von $G - W'$. Falls $A' \not\subseteq A$, so ist A' auch Komponente von $G - W$, und (2a) und (2b) sind erfüllt. Gelte also $A' \subseteq A$. Dann ist $N^G(A') \subseteq N \cup \{w\} = \beta'(t')$. Also gilt (2a). Sei

$$X_i' := \begin{cases} X_i \cup \{w\} & \text{falls } N_i \neq \emptyset, \\ \{w\} & \text{falls } N_i = \emptyset \end{cases}$$

und $X'_j := X_j$ für $j \in [k] \setminus \{i\}$. Dann sind die Mengen $X'_1, \dots, X'_k$ disjunkt und zusammenhängend, und es gilt $N^G(A') \subseteq N \cup \{w\} = \bigcup_{j=1}^k N_j \cup \{w\} \subseteq \bigcup_{j=1}^k X'_j$. Außerdem gilt $|N^G(A') \cap X'_i| \subseteq |N_i \cup \{w\}| \leq \ell$, weil $|N_i| < \ell$, und $|N^G(A') \cap X'_j| \leq |N^G(A) \cap X_j| \leq \ell$ für $j \in [k] \setminus \{i\}$. Also gilt (2b). ⌟

Weil G kein (k, ℓ)-Gewirr enthält, gibt es $i, j \in [k]$ mit $i \neq j$, so dass es keine Familie von ℓ paarweise disjunkten Wege von X_i nach X_j gibt, deren innere Ecken alle in A liegen. Sei $B := G[V(A) \cup N_i \cup N_j]$. Nach dem Satz von Menger gibt es in B einen N_i-N_j-Trenner S mit $|S| < \ell$. Sei S ein minimaler N_i-N_j-Trenner in B und $m := |S|$. Dann gilt $S \cap V(A) = \emptyset$, denn $|N_i| = |N_j| = \ell > m$, und für alle $v \in N_i, w \in N_j$ gibt es einen Weg von v nach w mit inneren Ecken in $V(A)$.

Sei $W'' := W \cup S$. Dann gilt $W \subset W''$ und $W'' \setminus W \subseteq V(A)$. Ich behaupte, dass W'' die Bedingungen (1) und (2) erfüllt. Dies *widerspricht* der Maximalität von W.

Zu (1): Wir erweitern (T, β) zu einer Baumzerlegung (T'', β'') von $G[W'']$, indem wir an t einen Knoten t'' mit Beutel $\beta''(t'') := N \cup S$ anhängen. Weil $|\beta''(t'')| = |N \cup S| \leq k \cdot \ell + m \leq k \cdot \ell + \ell - 1 \leq (k+1)\ell - 1$, ist die Weite (T'', β'') höchstens $(k+1)\ell - 2$.

Zu (2): Sei A'' eine Komponente von $G - W''$. Falls $A'' \nsubseteq A$, so ist A'' auch Komponente von $G - W$, und (2a) und (2b) sind erfüllt. Nehmen wir also an, dass $A'' \subseteq A$. Dann ist $N'' := N^G(A'') \subseteq \beta''(t'')$. Also gilt (2a).
Weil S ein N_i-N_j-Trenner in B ist, gilt $N'' \cap N_i = \emptyset$ oder $N'' \cap N_j = \emptyset$. Nehmen wir an, $N'' \cap N_i = \emptyset$. Dann ist $N'' \subseteq S \cup \bigcup_{j \in [k] \setminus \{i\}} N_j$. Wegen der Minimalität von S gibt es in $B - V(A'')$ eine Familie von m paarweise disjunkten N_i-S-Wegen. Sei X''_i die Vereinigung von X_i mit diesen Wegen und $X''_j := X_j$ für $j \in [k] \setminus \{i\}$. Dann sind die X''_j, für $1 \leq j \leq k$, zusammenhängend und paarweise disjunkt. Ferner gilt $N'' \subseteq S \cup \bigcup_{j \in [k] \setminus \{i\}} X_j \subseteq \bigcup_{j=1}^k X''_j$. Schließlich gilt $|N'' \cap X''_i| \leq |S| = m < \ell$ und $|N'' \cap X''_j| \leq |N \cap X_j| \leq \ell$. Also gilt (2b). □

5.3 Gewebe

(5.8) Lemma. *Sei G ein bipartiter Graph mit Bipartition (X, Y). Seien $k := |X|, \ell := |Y|$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq k, n \leq \ell$, so dass*

$$\|G\| \leq \frac{(k-m)(\ell-n)}{n}. \tag{5.A}$$

Dann existieren $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ mit $|X'| = m$ und $|Y'| = n$, so dass $X' \cup Y'$ eine unabhängige Menge in G ist.

Beweis. Wegen (5.A) gibt es weniger als $(\ell - n)$ Ecken $y \in Y$ mit $d^G(y) > \frac{(k-m)}{n}$. Sei $Y' \subseteq Y$ mit $|Y'| = n$ und $d^G(y) \leq \frac{(k-m)}{n}$ für alle $y \in Y'$.

Dann gilt $|N^G(Y')| \leq (k - m)$, es gibt also ein $X' \subseteq X$ mit $|X'| = m$ und $X' \cap N^G(Y') = \emptyset$. □

(5.9) Definition. Sei P ein Weg. Eine *Segmentierung von P* ist ein Tupel $(P_1, \ldots, P_m)$ von paarweise disjunkten Teilwegen von P, so dass $V(P) = V(P_1) \cup \ldots \cup V(P_m)$ und dass für alle $i \in [m-1]$ die Wege P_i und P_{i+1} einander in P berühren, d.h., die Endecke von P_i ist in P adjazent zur Anfangsecke von P_{i+1}.

(5.10) Definition. Seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(1) Ein *(m, n)-Prägewebe* ist ein Paar $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ von Familien von paarweise disjunkten Wegen (in G) mit $|\mathcal{H}| = m$, $|\mathcal{V}| = n$ und $P \cap Q \neq \emptyset$ für alle $P \in \mathcal{H}$, $Q \in \mathcal{V}$.

(2) Ein *(m, n)-Gewebe* ist ein (m, n)-Prägewebe $(\mathcal{H}, \{P_1, \ldots, P_n\})$, in dem jeder Pfad $Q \in \mathcal{H}$ eine Segmentierung $(Q_1, \ldots, Q_n)$ besitzt, so dass für alle $i \in [n]$ gilt:

$$Q \cap P_i \subseteq Q_i.$$

(5.11) Lemma. *Seien $k, \ell, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n^2$ und $\ell \geq n^{8\binom{k}{2}(n+2)}$. Sei G ein Graph, der ein (k, ℓ)-Gewirr enthält.*

Dann gilt entweder $K_k \preceq G$ oder G enthält ein $(n^2 - 1, n^{2n+2})$-Gewebe.

Beweis. Sei $h := \binom{k}{2}$, und sei $\sigma : [h] \to \binom{[k]}{2}$ eine bijektive Abbildung. Ungeordnete Paare $\{i, j\} \in \binom{[k]}{2}$ bezeichnen wir im Folgenden in der Regel kurz mit ij.

OBdA nehmen wir an, dass $\ell = n^{8h(n+2)}$. Wir setzen $m := n^{4(n+2)}$ und definieren $f : \{1, \ldots, h\} \to \mathbb{N}$ und $g : \{1, \ldots, h-1\} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(p) := \frac{\ell}{m^{2p}} = n^{8(n+2)(h-p)},$$

$$g(p) := \frac{f(p)}{m}.$$

Sei $(X_1, \ldots, X_k, Y)$ ein (k, ℓ)-Gewirr in G. Für $q \in [h]$ mit $\sigma(q) = ij$ sei $\mathcal{P}_q$ eine Familie von ℓ paarweise disjunkten X_i-X_j-Wegen.

Sei nun $p^* \in [0, h]$ maximal mit folgender Eigenschaft:
Für $p \in [p^*]$ und $q \in [h]$ mit $\sigma(q) = ij$ existiert eine Familie $\mathcal{P}_q^p$ von paarweise disjunkten X_i-X_j-Wegen, so dass die folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Falls $q < p$, so ist $\mathcal{P}_q^p = \{P\}$ für einen Weg P, der disjunkt ist zu allen $Q \in \bigcup_{q' \in [h] \setminus \{q\}} \mathcal{P}_{q'}^p$.

(ii) Falls $q = p$, so gilt $|\mathcal{P}_q^p| = f(p)$.

(iii) Falls $q > p$, so gilt $|\mathcal{P}_q^p| = g(p)$. Weiterhin gibt es für alle

$$e \in \bigcup_{P \in \mathcal{P}_q^p} E(P) \setminus \bigcup_{P' \in \mathcal{P}_p^p} E(P')$$

im Graphen $\bigcup \mathcal{P}_q^p \cup \bigcup \mathcal{P}_p^p \setminus e$ keine $g(p)$ disjunkten X_i-X_j-Wege.

Behauptung 1. Falls $p^* = h$, so gilt $K_k \preceq G$.

Beweis. Es gelte $p^* = h$. Für $p := p^*$ geben (i) und (ii) eine Familie von paarweise disjunkten X_i-X_j-Wegen P_{ij} für alle $ij \in \binom{[k]}{2}$. Dann ist $\left((G[X_i])_{i \in [k]}, (P_{ij})_{ij \in \binom{[k]}{2}}\right)$ ein Modell von K_k in G. ⌟

Im Folgenden nehmen wir an, dass $p^* < h$.

Behauptung 2. $p^* \geq 1$.

Beweis. Wir wählen zunächst ein beliebiges $\mathcal{P}_1^1 \subseteq \mathcal{P}_1$ mit $|\mathcal{P}_1^1| = f(1) \leq \ell$. Anschließend wählen wir für $q \in [2, h]$ mit $\sigma(q) = ij$ im Graphen $\bigcup \mathcal{P}_1^1 \cup \mathcal{P}_q$ eine Familie $\mathcal{P}_q^1$ von $g(1) \leq \ell$ paarweise disjunkten X_i-X_j-Wegen, die die Bedingung (iii) erfüllt. Damit haben wir (i)-(iii) für $p = 1$ erfüllt. ⌟

Behauptung 3. Für alle $P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}$ gibt es ein $q \in [p^* + 1, h]$, so dass P zu weniger als $\frac{g(p^*)}{m}$ der Wege in $\mathcal{P}_q^{p^*}$ disjunkt ist.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}$, so dass für alle $q > p^*$ der Weg P zu mindestens $\frac{g(p^*)}{m} = f(p^* + 1) \geq g(p^* + 1)$ der Wege in $\mathcal{P}_q^{p^*}$ disjunkt ist. Dann wählen wir einen solchen Weg P und definieren Mengen $\mathcal{P}_q^{p^*+1}$ für $q \in [h]$ wie folgt:

- Für $1 \le q < p^*$ setzen wir $\mathcal{P}_q^{p^*+1} := X_q^{p^*}$.
- Wir setzen $\mathcal{P}_{p^*}^{p^*+1} := \{P\}$.
- Wir wählen ein $\mathcal{P}_{p^*+1}^{p^*+1} \subseteq \mathcal{P}_{p^*+1}^{p^*}$ mit $|\mathcal{P}_{p^*+1}^{p^*+1}| = f(p^*+1)$, so dass P zu allen Wegen in $\mathcal{P}_{p^*+1}^{p^*+1}$ disjunkt ist.
- Für $p^*+1 < q \le h$ mit $\sigma(q) = ij$ wählen wir zunächst eine Familie $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_q^{p^*}$ mit $|\mathcal{Q}| = g(p^*+1)$, so dass P zu allen Wegen in $\mathcal{Q}$ disjunkt ist. Dann wählen wir eine Familie $\mathcal{P}_q^{p^*+1}$ von $g(p^*+1)$ paarweise disjunkten X_i-X_j-Wegen im Graphen $\bigcup \mathcal{Q} \cup \bigcup \mathcal{P}_{p^*+1}^{p^*+1}$, die Bedingung (iii) genügt.

Damit sind die Bedingungen auch für p^*+1 erfüllt, was der Maximalität von p^* *widerspricht*. ⌟

Behauptung 4. Es gibt ein $q \in [p^*+1, h]$ und ein $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}$ mit $|\mathcal{P}| = \frac{f(p^*)}{h}$, so dass alle $P \in \mathcal{P}$ zu weniger als $\frac{g(p^*)}{m}$ der Wege in $\mathcal{P}_q^{p^*}$ disjunkt sind.

Beweis. Für alle $P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}$ sei $q(P) \in [p^*+1, h]$, so dass P zu weniger als $\frac{g(p^*)}{m}$ der Wege in $\mathcal{P}_{q(P)}^{p^*}$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es dann ein $q \in [p^*+1, h]$, so dass $q = q(P)$ für mehr als

$$\frac{\mathcal{P}_{p^*}^{p^*}}{h - p^*} \ge \frac{f(p^*)}{h}.$$

Wir wählen so ein q und setzen $\mathcal{P} := \left\{P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*} \;\middle|\; q(P) = q\right\}$. ⌟

Im Folgenden halten wir gemäß Behauptung 4 gewählte $q \in [p^*+1, h]$ und $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}$ fest. Außerdem setzen wir $\mathcal{Q} := \mathcal{P}_q^{p^*}$.

Behauptung 5. Es gibt $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Q}$ und $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}$, so dass $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ ein $\left(n^2, \left\lceil \frac{f(p^*)}{2h} \right\rceil\right)$-Prägewebe ist.

Beweis. Wir betrachten den bipartiten Graphen H mit Bipartition $(\mathcal{Q}, \mathcal{P})$, in dem zwei Ecken (Wege in G) adjazent sind, wenn sie disjunkt sind.

Weil jeder Weg in $\mathcal{P}$ zu weniger als $\frac{g(p^*)}{m}$ Wegen in $\mathcal{Q}$ disjunkt ist, gilt

$$\begin{aligned} ||H|| &\le |\mathcal{P}| \cdot \frac{g(p^*)}{m} \\ &\le \frac{\lfloor |\mathcal{P}|/2 \rfloor}{n^2} \cdot \frac{3g(p^*)}{n^{2(n+2)}} \\ &\le \frac{(|\mathcal{P}| - \lceil |\mathcal{P}|/2 \rceil) \cdot (g(p^*) - n^2)}{n^2}. \end{aligned}$$

Nach Lemma (5.8) gibt es damit ein $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}$ mit $|\mathcal{V}| \geq \lceil |\mathcal{P}|/2 \rceil = \left\lceil \frac{f(p^*)}{2h} \right\rceil$ und ein $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{P}$ mit $|\mathcal{H}| = n^2$, so dass $\mathcal{H} \cup \mathcal{V}$ unabhängig in H ist. Das bedeutet aber gerade, dass $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ ein Prägewebe ist. ⌟

Im Folgenden seien $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{Q}$, $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{P}$, so dass $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ ein $\left(n^2, \left\lceil \frac{f(p^*)}{2h} \right\rceil\right)$-Prägewebe ist. Sei

$$r := \frac{\sqrt{m}}{k} = \frac{n^{2n+4}}{k} \geq n^{2n+2}.$$

Dann gilt $|\mathcal{V}| \geq r^2 g(p^*)$.

Behauptung 6. Sei $Q \in \mathcal{H}$. Dann gibt es eine Segmentierung $(Q_1, \ldots, Q_r)$ von Q und für alle $i \in [r]$ ein $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}$, so dass gilt:

(1) $|\mathcal{V}_i| \geq r \cdot g(p^*)$.

(2) Für alle $P \in \mathcal{V}_i$ gilt $P \cap Q_i \neq \emptyset$ and $P \cap Q_j = \emptyset$ für alle $j \in [1, i-1]$.

(3) Für alle Kanten $e \in E(Q) \setminus \bigcup_{i=1}^{r} E(Q_i)$, die die Segmente trennen, gilt $e \notin \bigcup_{P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}} E(P)$.

Beweis. Wir halten eine Anfangsecke v_1 von Q fest und durchlaufen den Weg ausgehend von dieser Ecke. Sei $P_1, \ldots, P_{|Q|}$ eine Aufzählung der Wege in $\mathcal{V}$ in der Reihenfolge, in der sie Q schneiden. Für $i \in [|\mathcal{Q}|]$ sei v_i' die erste Ecke von Q in $V(Q \cap P_i)$, und für $i < r$ sei v_{i+1} die erste Ecke auf Q nach v_i, die nicht mehr in $V(Q \cap P_i)$ liegt. Schließlich sei für $i < r$ w_i die Ecke vor v_{i+1}, und w_r sei die Endecke von Q. Für alle $i \in [r]$ gilt dann $w_i \in V(P_i)$ und damit $w_i \notin V(P)$ für alle $P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*} \setminus \{P_i\}$, denn die Wege in $\mathcal{P}_{p^*}^{p^*}$ sind paarweise disjunkt. Weil außerdem $v_{i+1} \notin V(P_i)$, gilt für die Kante $\{w_i, v_{i+1}\} \in E(Q)$, dass $e_i \notin E(P)$ für alle $P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}$. Man beachte, dass für $i \in [2]$ der Weg P_i das Segment $v_1 Q w_{i-1}$ nicht schneidet, denn v_i' ist die erste Ecke von Q in $V(Q \cap P_i)$.

Für alle $i \in [r]$ seien nun $j(i) := (i-1) \cdot r \cdot g(p^*)$, $x_i := v_{j(i)+1}$, $y_i := w_{j(i+1)}$, $Q_i := x_i Q y_i$, und $\mathcal{V}_i := \{Q_{j(i)+1}, \ldots, Q_{j(i+1)}\}$. Dann erfüllen die Q_i und $\mathcal{V}_i$ die Bedingungen (1)–(3). ⌟

Wir halten nun ein beliebiges $Q^0 \in \mathcal{H}$ fest und wählen eine Segmentierung $(Q_1^0, \ldots, Q_r^0)$ von Q^0 und Mengen $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_r \subseteq \mathcal{V}$ gemäß Behauptung 6. Für alle $i \in [r-1]$ sei $e_i \in E(Q^0)$ die Kante zwischen Q_i^0 und Q_{i+1}^0. Wegen Behauptung 6(3) gilt $e_i \notin \bigcup_{P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}} E(P)$.

Sei $\sigma(q) = ij$. Dann ist $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_q^{p^*}$ eine Familie von X_i-X_j-Wegen. Wegen (iii) und dem Satz von Menger gibt es für jede Kante $e \in \bigcup_{Q \in \mathcal{P}_q^*} E(Q) \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}} E(P)$ einen X_i-X_j-Trenner

$S(e)$ im Graphen $\bigcup \mathcal{P}_q^{p^*} \cup \bigcup \mathcal{P}_{p^*}^{p^*} \setminus e$ der Ordnung $|S(e)| < g(p^*)$. Insbesondere gilt dies für die Kanten $e_s \in E(Q^0) \setminus \bigcup_{P \in \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}} E(P)$ für $s \in [r-1]$. Sei

$$S := \bigcup_{s=1}^{r-1} S(e_s).$$

Dann gilt $|S| < r \cdot g(p^*)$. Also gibt es für alle $i \in [r]$ mindestens einen Weg $P_i \in \mathcal{V}_i$ mit $V(P_i) \cap S = \emptyset$. Wir wählen solche Wege $P_1, \ldots, P_r$ und setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{H}' &:= \mathcal{H} \setminus \{Q^0\} \\ \mathcal{V}' &:= \{P_1, \ldots, P_r\}. \end{aligned}$$

Behauptung 7. $(\mathcal{H}', \mathcal{V}')$ ist ein $(n^2 - 1, r)$-Gewebe.

Beweis. Weil $\mathcal{H}'$ eine Familie von $g(p^*) - 1$ paarweise disjunkten X_i-X_j-Wegen ist, enthält für alle $s \in [r-1]$ der X_i-X_j-Trenner $S_s := S(e_s)$ der Ordnung $|S_s| < g(p^*)$ genau eine Ecke von jedem der Wege in $\mathcal{H}'$.

Sei $Q \in \mathcal{H}'$. Für alle $s \in [r-1]$ sei $y_s \in S_s \cap V(Q)$, und es sei x_{s+1} der Nachfolger von y_s auf Q. Ferner sei $x_1 \in X_i$ der Anfangs- und $y_r \in X_j$ der Endpunkt von Q. Für $s \in [r]$ sei $Q_i := x_i Q y_i$. Dann ist $(Q_1, \ldots, Q_r)$ eine Segmentierung von Q. Wir zeigen, dass für alle $s \in [r]$ gilt:

$$Q \cap P_s \subseteq Q_s.$$

Sei $s \in [r]$. Wir beobachten zunächst, dass es keine $t, t' \in [r]$ mit $t < t'$ geben kann, so dass $P_s \cap Q_t \neq \emptyset$ und $P_s \cap Q_{t'} \neq \emptyset$, denn sonst gäbe es einen X_i-X_j-Weg $R \subseteq Q \cup P_s$ mit $V(R) \cap S_t = \emptyset$. Weil $P_s \cap Q \neq \emptyset$, gibt es also genau ein $t \in [r]$, so dass $P_s \cap Q_t \neq \emptyset$. Wir zeigen, dass $t = s$. Weil $P_s \cap Q^0 \neq \emptyset$ und $P_s \cap Q \neq \emptyset$ gibt es ein Segment $P' \subseteq P_s$ mit Endecken $v \in V(Q_t)$ und $w \in V(Q_s^0)$. Falls $s < t$, so ist erhält man einen X_i-X_j-Weg im Graphen $(Q_0 \cup Q \cup P_s) \setminus e_s \subseteq \left(\bigcup \mathcal{P}_q^{p^*} \cup \bigcup \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}\right) \setminus e_s$, der S_s nicht schneidet. Falls $s > t$, so ist erhält man einen X_i-X_j-Weg im Graphen $(Q_0 \cup Q \cup P_s) \setminus e_t \subseteq \left(\bigcup \mathcal{P}_q^{p^*} \cup \bigcup \mathcal{P}_{p^*}^{p^*}\right) \setminus e_s$, der S_t nicht schneidet. Beides ist unmöglich also gilt $s = t$. $\square$

5.4 Gitter

(5.12) Definition. Sei $n \geq 1$ und T ein Baum. Ein n-Tupel $(t_1, \ldots, t_n) \in V(T)^n$ heißt *gut*, wenn gilt:

(i) Die Knoten $t_1, \dots, t_n$ sind paarweise verschieden.

(ii) Für alle $i \in [n-1]$ enthält der Weg $t_i T t_{i+1}$ keinen der Knoten t_j für $j \in [n] \setminus \{i, i+1\}$.

(5.13) Lemma. *Sei $n \geq 1$. Jeder Baum der Ordnung mindestens $n(n-1)$ enthält ein gutes n-Tupel.*

Beweis. Entweder, T hat mindestens n Blätter, und diese bilden in beliebiger Reihenfolge ein gutes Tupel.

Oder dies ist nicht der Fall. Dann wählen wir einen inneren Knoten r und betrachten alle Wege von r zu den Blättern. Weil es höchstens $(n-1)$ solche Wege gibt, enthält mindestens einer von ihnen n Knoten. Diese bilden in der Reihenfolge, in der sie auf dem Weg auftauchen, ein gutes Tupel. □

(5.14) Lemma. *Seien $n \geq 1$ und G ein Graph, der ein (n^2-1, n^{2n+2})-Gewebe enthält. Dann gilt $G_{n,n} \preceq G$.*

Beweis. Seien $k := n^2 - 1$ und $\ell := n^{2n+2}$. Sei $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$ ein (k, ℓ)-Gewebe in G. Sei $\mathcal{H} = \{P_1, \dots, P_k\}$ und $\mathcal{V} = \{Q_1, \dots, Q_\ell\}$. Für alle $i \in [k]$ sei $(P_{i1}, \dots, P_{i\ell})$ eine Segmentierung von P_i, so dass für alle $j \in [\ell]$ gilt: $P_i \cap Q_j \subseteq P_{ij}$. Sei G' der Minor von G, der durch Kontraktion der Segmente Q_{ij} zu Ecken v_{ij} entsteht. Seien $P'_1, \dots, P'_k$ die Wege in G', die aus $P_1, \dots, P_k$ entstanden sind, und $Q'_1, \dots, Q'_\ell$ die zusammenhängenden Teilgraphen von G', die aus $Q_1, \dots, Q_\ell$ entstanden sind. OBdA gelte dann $G' = \bigcup_{i=1}^k P'_i \cup \bigcup_{j=1}^\ell Q'_j$ und

$$V(Q'_j) = \{v_{1j}, \dots, v_{kj}\}$$

für alle $j \in [\ell]$. Ist dies nämlich nicht der Fall, so können wir zu einem Minoren von G' mit diesen Eigenschaften übergehen.

Für $j \in [\ell]$ sei T_j ein spannender Baum von Q'_j. Wegen Lemma (5.13) enthält jeder Baum T_j ein gutes Tupel $(v_{i_{j1}j}, \dots, v_{i_{jn}j})$. Dann gibt es eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, l\}$ mit

$$|J| = n(n-1) \leq n^2 = \frac{n^{2n+2}}{n^{2n}} \leq \frac{\ell}{k^n},$$

so dass für alle $j, j' \in J$ gilt:

$$(i_{j1}, \dots, i_{jn}) = (i_{j'1}, \dots, i_{j'n}).$$

OBdA sei $J = \{1, \dots, n^2\}$ und $(i_{j1}, \dots, i_{jn}) = (1, \dots, n)$ für $1 \leq j \leq n^2$.

Für alle $i \in [n-1]$, $j \in [n^2]$ sei $Y^i_j := v_{ij} T_j v_{(i+1)j}$. Sei

$$H' := \bigcup_{i=1}^{n} P'_i \cup \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{n-1} Y^i_{(j-1)(n-1)+i}.$$

Sei H'' der Graph, der aus H' durch Kontraktion der Wegstücke

$$v_{i((j-1)(n-1)+1)} \dots v_{i((j-1)(n-1)+n-1)}$$

(von P'_i), für alle $i \in [n]$, $j \in [n]$, entsteht.

Ziehen wir in H'' noch die Wege Y^i_j zu Kanten zusammen, so erhalten wir ein $(n \times n)$-Gitter. □

Beweis des Gittersatzes (5.1). Für $n \geq 1$ setzen wir $k := n^2$, $\ell := n^{8\binom{k}{2}\cdot(n+2)}$ und $f(n) := (k+1) \cdot \ell - 1$.

Sei G ein Graph mit $\operatorname{tw}(G) \geq f(n)$. Nach Lemma (5.7) enthält G ein (k, ℓ)-Gewirr, nach Lemma (5.11) damit entweder einen K_k-Minor oder ein (n^2-1, n^{2n+2})-Gewebe. Im ersten Fall sind wir fertig, weil $G_{n,n}$ isomorph zu einem Subgraphen von K_k ist, im zweiten wegen Lemma (5.14). □