

Kapitel 4

Verbotene Wälder

4.1 Wegweite

(4.1) Definition. Sei G ein Graph.

- (1) Eine *Wegzerlegung* von G ist eine Baumzerlegung (T, β) von G , in der T ein Weg ist.
- (2) Die *Wegweite* von G ist die Zahl

$$\text{pw}(G) := \min \{w(P, \beta) \mid (P, \beta) \text{ Wegzerlegung von } G\}.$$

(4.2) Beobachtungen.

- (1) Für alle Graphen G gilt $\text{tw}(G) \leq \text{pw}(G) \leq |G| - 1$.
- (2) Für alle Graphen G, H mit $H \leq G$ gilt $\text{pw}(H) \leq \text{pw}(G)$.

(4.3) Beispiel. Für alle Wege P mit $E(P) \neq \emptyset$ gilt $\text{pw}(G) = 1$.

(4.4) Beispiel. Für alle Kreise C gilt:

$$\text{pw}(C) = \text{tw}(C) = 2.$$

(4.5) Beispiel. Für $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{pw}(G_{m \times n}) = \text{tw}(G_{m \times n}) = \min\{m, n\}.$$

(4.6) Beispiel. Die *Höhe* $h(T)$ eines Wurzelbaumes $T = (V, E, r)$ ist die Länge des längsten Weges von der Wurzel r zu einem Blatt von T . Die *Höhe* eines Baumes $T = (V, E)$ ist $h(T) := \max \{h((T, V, r)) \mid r \in V\}$.

Dann gilt für alle Bäume T :

$$\text{pw}(T) \leq h(T).$$

(4.7) Notation. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne in diesem Kapitel P_n den Weg der Länge $n - 1$ mit Eckenmenge $V(P_n) := [n]$ und Kantenmenge $E(P_n) := \{\{i, i + 1\} \mid i \in [n - 1]\}$.

4.2 Unsichtbare Räuber

Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}_0$. Das *Räuber und Gendarmen Spiel* auf G mit k Gendarmen und *unsichtbarem Räuber*, $\text{UG}(G, k)$, wird wie das *Räuber und Gendarmen Spiel* mit k Gendarmen (und sichtbarem Räuber) $\text{RG}(G, k)$ gespielt, bloß kann der Spieler GE die aktuelle Position des Räubers nicht sehen. Positionen, Partien des Spiels, und die Gewinnbedingung sind wie beim Spiel $\text{RG}(G, k)$ definiert. *Gewinnstrategien* für die Gendarmen müssen allerdings anders definiert werden:

(4.8) Definition. Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}_0$. Eine *Strategie* für GE im Spiel $\text{UG}(G, k)$ ist eine Tupel

$$(X_0, X_1, \dots, X_n) \in \binom{V(G)}{\leq k}^{n+1}$$

mit $X_0 = \emptyset$, für ein beliebiges $n \geq 0$. Eine Strategie (X_0, X_1, \dots, X_n) ist eine *Gewinnstrategie* für GE, wenn es kein Tupel $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in V(G)^{n+1}$ gibt, so dass für alle $i \in [n]$ gilt:

- (i) es gibt einen Weg von y_{i-1} nach y_i im Graphen $G - (X_{i-1} \cap X_i)$;
- (ii) $y_i \notin X_i$.

Die Bedingung (i) besagt, dass $(X_0, y_0), (X_1, y_1), \dots, (X_n, y_n)$ ein (Anfangsstück einer) Partie des Spiels $\text{UG}(G, k)$ ist. Bedingung (ii) besagt, dass R gewinnt (bzw., dass GE noch nicht gewinnt).

Es gibt für das Spiel $\text{UG}(G, k)$ keinen sinnvollen Begriff einer Gewinnstrategie für R, im Prinzip ist das Spiel nämlich ein Einpersonenspiel.

(4.9) Satz. Für alle Graphen G gilt:

$$\text{pw}(G) + 1 = \min \{k \mid \text{GE hat eine Gewinnstrategie im Spiel } \text{UG}(G, k)\}.$$

Der Beweis des Satzes erfordert einige Vorbereitungen und wird am Ende von Abschnitt 4.2 gegeben.

(4.10) Definition. Seien G ein Graph, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\vec{X} = (X_0, \dots, X_n)$ eine Strategie für GE im Spiel $\text{UG}(G, k)$.

(1) Für alle $i \in [0, n]$ sei der i -te Fluchtraum Y_i induktiv wie folgt definiert:

$$i = 0: Y_0 := V(G).$$

$i - 1 \rightarrow i$: Y_i ist die Menge aller $y \in V(G) \setminus X_i$, so dass ein Weg von y nach Y_{i-1} im Graphen $G \setminus (X_{i-1} \cap X_i)$ existiert.

(2) Die Strategie \vec{X} ist *monoton*, wenn für alle $i \in [n]$ gilt: $Y_i \subseteq Y_{i-1}$.

(4.11) Beobachtungen. Sei $\vec{X} = (X_0, \dots, X_n)$ eine Strategie für GE im Spiel $\text{UG}(G, k)$ und sei $\vec{Y} = (Y_0, \dots, Y_n)$ das zugehörige Tupel der Fluchträume.

(1) Für alle $i \in [n]$ gilt $Y_{i-1} = \emptyset \implies Y_i = \emptyset$.

(2) \vec{X} ist genau dann eine Gewinnstrategie, wenn $Y_n = \emptyset$.

(3) Für alle $i \in [n]$ gilt $Y_{i-1} \setminus X_i \subseteq Y_i$.

(4.12) Lemma. Sei G ein Graph und $k := \text{pw}(G)$. Dann gibt es eine monotone Gewinnstrategie für GE im Spiel $\text{UG}(G, k + 1)$.

Beweis. Sei (P, β) eine Wegzerlegung von G der Weite k . OBdA nehmen wir an, dass $P = P_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $X_0 := \emptyset$ und $X_i := \beta(i)$ für $i \in [n]$. Dann ist $\vec{X} := (X_0, \dots, X_n)$ eine Strategie für GE im Spiel $\text{UG}(G, k)$. Sei $\vec{Y} = (Y_0, \dots, Y_n)$ das zugehörige Tupel der Fluchträume. Es folgt aus Lemma (3.15), dass $Y_i = V(G) \setminus \bigcup_{j=1}^i \beta(j)$. Also ist die Strategie \vec{X} monoton. Außerdem gilt $Y_n = \emptyset$, und damit ist \vec{X} eine Gewinnstrategie. \square

(4.13) Definition. Sei G ein Graph und $X \subseteq V(G)$. Der *Rand* von X in G ist die Menge

$$\partial^G(X) := \{x \in X \mid \exists y \in V(G) \setminus X : xy \in E(G)\}.$$

Normalerweise lassen wir den Index G und die Klammern weg und schreiben einfach ∂X .

(4.14) Beobachtung. Sei G ein Graph und $X \subseteq V(G)$. Dann gilt $\partial X = N(V(G) \setminus X)$.

(4.15) Lemma (Submodularität des Randes). Für alle Graphen G und $X, Y \subseteq V(G)$ gilt:

$$|\partial(X \cap Y)| + |\partial(X \cup Y)| \leq |\partial X| + |\partial Y|.$$

Beweis. Seien $\overset{\circ}{X} := X \setminus \partial X$, $X^c := V(G) \setminus X$ und $\overset{\circ}{Y} := Y \setminus \partial Y$, $Y^c := V(G) \setminus Y$. Es gilt

$$|\partial X| + |\partial Y| = (|\partial X \cap \overset{\circ}{Y}| + |\overset{\circ}{X} \cap \partial Y| + |\partial X \cap \partial Y|) + (|\partial X \cap Y^c| + |X^c \cap \partial Y| + |\partial X \cap \partial Y|). \quad (4.A)$$

Behauptung 1. $\partial(X \cap Y) \subseteq (\partial X \cap \overset{\circ}{Y}) \cup (\overset{\circ}{X} \cap \partial Y) \cup (\partial X \cap \partial Y)$.

Beweis. Sei $v \in \partial(X \cap Y)$ und $w \in N(v) \setminus (X \cap Y)$. Dann gilt

$$w \in X^c \cup Y^c = (X^c \cap Y) \cup (X \cap Y^c) \cup (X^c \cap Y^c).$$

Falls $w \in (X^c \cap Y)$, so $v \in \partial X$. Außerdem $v \in \partial Y \subseteq Y$ und damit

$v \in (\partial X \cap \overset{\circ}{Y}) \cup (\partial X \cap \partial Y)$. Falls $w \in (X \cap Y^c)$, so folgt analog $v \in (\overset{\circ}{X} \cap \partial Y) \cup (\partial X \cap \partial Y)$.

Falls $w \in (X^c \cap Y^c)$, so $v \in (\partial X \cap \partial Y)$. ┘

Behauptung 2. $\partial(X \cup Y) \subseteq (\partial X \cap Y^c) \cup (X^c \cap \partial Y) \cup (\partial X \cap \partial Y)$.

Beweis. Sei $v \in \partial(X \cup Y)$ und $w \in N(v) \setminus (X \cup Y)$. Dann gilt

$$w \in X^c \cap Y^c.$$

Aus $w \in X^c$ folgt $v \in \partial X \cup X^c$, und aus $w \in Y^c$ folgt $v \in \partial Y \cup Y^c$. Also

$$\begin{aligned} v &\in (\partial X \cup X^c) \cap (\partial Y \cup Y^c) \\ &= (\partial X \cap Y^c) \cup (X^c \cap \partial Y) \cup (\partial X \cap \partial Y) \cup (X^c \cap Y^c), \end{aligned}$$

und weil gleichzeitig $v \in \partial(X \cup Y) \subseteq X \cup Y$ und damit $v \notin (X^c \cap Y^c)$ impliziert dies die Behauptung. ┘

Aus (4.A) und den beiden Behauptungen folgt sofort die Submodularität. □

(4.16) Definition. Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und G ein Graph. Eine k -Suche in G ist ein Tupel $\vec{Z} = (Z_0, \dots, Z_n)$ von Teilmengen von $V(G)$, so dass gilt:

- (i) $Z_0 = \emptyset$;
- (ii) $|Z_i \setminus Z_{i-1}| \leq 1$ für alle $i \in [n]$;
- (iii) $|\partial Z_i| \leq k$ für alle $i \in [0, n-1]$.

Die Suche \vec{Z} ist *vollständig*, wenn $Z_n = V(G)$. Die Suche \vec{Z} ist *monoton*, wenn für alle $i \in [n]$ gilt: $Z_{i-1} \subseteq Z_i$.

(4.17) Bemerkung. Man beachte, dass jede k -Suche $\vec{Z} = (Z_0, \dots, Z_n)$ in G auch eine vollständige k -Suche in $G[Z_n]$ ist. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, weil für ein $Z \subseteq Z_n$ möglicherweise $\partial^{G[Z_n]}(Z) \subset \partial^G(Z)$.

(4.18) Lemma. Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Wenn es eine Gewinnstrategie für GE im Spiel $UG(G, k+1)$ gibt, so gibt es eine vollständige k -Suche in G .

Beweis. Es gebe eine Gewinnstrategie für GE im Spiel $UG(G, k+1)$.

Behauptung 1. Es gibt eine Gewinnstrategie (X_0, \dots, X_n) für GE im Spiel $UG(G, k+1)$, die folgenden Bedingungen genügt:

- (i) Für alle $i \in [n]$ gilt entweder $X_i \subset X_{i-1}$ oder $X_{i-1} \subseteq X_i$ und $|X_i \setminus X_{i-1}| = 1$;
- (ii) $X_n = \emptyset$.

Beweis. Sei $\vec{X}' = (X'_0, \dots, X'_n)$ eine Gewinnstrategie für GE im Spiel $UG(G, k+1)$. OBdA können wir annehmen, dass $X'_n = \emptyset$, denn mit \vec{X}' ist auch $(X'_0, \dots, X'_n, \emptyset)$ eine Gewinnstrategie.

Falls die Strategie \vec{X}' nicht der Bedingung (i) genügt, verfahren wir für jedes $i \in [n]$, so dass weder $X'_i \subset X'_{i-1}$ noch $X'_{i-1} \subseteq X'_i$ und $|X'_i \setminus X'_{i-1}| = 1$ gilt, wie folgt:

- Falls $X'_i = X'_{i-1}$, so löschen wir X'_i einfach aus der Strategie.
- Sonst seien $X' := X'_{i-1} \cap X'_i$ und $X'_i \setminus X'_{i-1} = \{x_1, \dots, x_\ell\}$. Wir ersetzen X'_i in \vec{X}' durch die Folge $X', X' \cup \{x_1\}, X' \cup \{x_1, x_2\}, \dots, X'_i$.

Das resultierende Tupel ist eine Gewinnstrategie, die den Bedingungen (i) und (ii) genügt. ┘

Im folgenden sei $\vec{X} = (X_0, \dots, X_n)$ eine Gewinnstrategie für GE im Spiel $UG(G, k + 1)$, die den Bedingungen (i) und (ii) aus Behauptung 1 genügt. Sei $I := \{i \in [0, n] \mid |X_i| < k + 1\}$. Dann gilt $0 \in I$ und $n \in I$, letzteres wegen (ii). Weiterhin gilt wegen (i) für alle $i \in [0, n] \setminus I$, dass $i - 1 \in I$ und $i + 1 \in I$. Sei $I = \{i_0, i_1, \dots, i_m\}$, wobei $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_m = n$.

Sei $\vec{Y} = (Y_0, \dots, Y_n)$ das zu \vec{X} gehörende Tupel der Fluchräume. Für alle $i \in [0, n]$ setzen wir $Z_i := V(G) \setminus Y_i$.

Behauptung 2. $\vec{Z} := (Z_{i_0}, \dots, Z_{i_m})$ ist eine vollständige k -Suche.

Beweis. Es folgt aus der Definition der Fluchräume, dass für alle $i \in [n]$ gilt:

$$\partial Z_i = N(Y_i) \subseteq X_i$$

und damit $|\partial Z_i| \leq k$ für alle $i \in I$. Weil $Y_0 = V(G)$ gilt $Z_0 = \emptyset$, und weil \vec{X} eine Gewinnstrategie ist, gilt $Y_n = \emptyset$ und damit $Z_n = V(G)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $|Z_{i_j} \setminus Z_{i_{j-1}}| \leq 1$ für alle $j \in [m]$. Sei $i = i_j \in I$ für ein $j \in [m]$. Dann gilt entweder $i_{j-1} = i - 1$ oder $i - 1 \notin I$ und $i_{j-1} = i - 2$.

Fall 1: $i_{j-1} = i - 1$ und $X_i \subset X_{i-1}$.

Dann ist $Y_i \supseteq Y_{i-1}$ und damit $Z_i \subseteq Z_{i-1}$. Also $|Z_{i_j} \setminus Z_{i_{j-1}}| = 0$.

Fall 2: $i_{j-1} = i - 1$ und $|X_i \setminus X_{i-1}| = 1$.

Sei $X_i \setminus X_{i-1} = \{x\}$. Wegen Beobachtung (4.11)(3) gilt $Y_i \supseteq Y_{i-1} \setminus X_i = Y_{i-1} \setminus \{x\}$.

Also $Z_i \subseteq Z_{i-1} \cup \{x\}$ und damit $|Z_{i_j} \setminus Z_{i_{j-1}}| \leq 1$.

Fall 3: $i_{j-1} = i - 2$.

Dann gilt $|X_{i-1} \setminus X_{i-2}| = 1$ und $X_i \subset X_{i-1}$. Wie in den Fällen 2 und 1 folgt

$|Z_{i-1} \setminus Z_{i-2}| \leq 1$ und $Z_i \subseteq Z_{i-1}$. Also $|Z_{i_j} \setminus Z_{i_{j-1}}| = |Z_i \setminus Z_{i-2}| \leq 1$. □

(4.19) Lemma. Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Wenn es eine vollständige k -Suche in G gibt, so gibt es eine monotone vollständige k -Suche in G .

Beweis. Für eine vollständige k -Suche $\vec{Z} = (Z_0, \dots, Z_n)$ in G seien

$$r(\vec{Z}) := \sum_{i=0}^n |\partial Z_i|,$$

$$s(\vec{Z}) := \sum_{i=0}^n |Z_i|.$$

Die lexikographische Ordnung auf den Paaren $(r(\vec{Z}), s(\vec{Z}))$ induziert eine partielle Ordnung auf allen vollständigen k -Suchen. Sei nun $\vec{Z} = (Z_0, \dots, Z_n)$ minimal bezüglich dieser Ordnung. Das heißt, für alle vollständigen k -Suchen \vec{Z}' gilt $r(\vec{Z}) \leq r(\vec{Z}')$, und falls $r(\vec{Z}) = r(\vec{Z}')$ so $s(\vec{Z}) \leq s(\vec{Z}')$.

Behauptung 1. Für alle $i \in [n]$ gilt $|\partial(Z_{i-1} \cup Z_i)| \geq |\partial Z_i|$.

Beweis. Angenommen, $|\partial(Z_{i-1} \cup Z_i)| < |\partial Z_i|$. Dann ist

$$\vec{Z}' := (Z_0, \dots, Z_{i-1}, Z_{i-1} \cup Z_i, Z_{i+1}, \dots, Z_n)$$

eine Suche mit $r(\vec{Z}') < r(\vec{Z})$, was der Minimalität von \vec{Z} widerspricht. ┘

Behauptung 2. Für alle $i \in [n]$ gilt $|\partial(Z_{i-1} \cap Z_i)| \leq |\partial Z_{i-1}|$.

Beweis. Wegen der Submodularität des Randes gilt:

$$|\partial(Z_{i-1} \cup Z_i)| + |\partial(Z_{i-1} \cap Z_i)| \leq |\partial Z_{i-1}| + |\partial Z_i|.$$

Daraus ergibt sich Behauptung 2 mit Hilfe von Behauptung 1. ┘

Behauptung 3. Für alle $i \in [n]$ gilt $Z_{i-1} \subseteq Z_i$.

Beweis. Angenommen, $Z_{i-1} \not\subseteq Z_i$. Dann gilt $|Z_{i-1} \cap Z_i| < |Z_{i-1}|$. Sei

$$\vec{Z}' := (Z_0, \dots, Z_{i-2}, Z_{i-1} \cap Z_i, Z_i, Z_{i+1}, \dots, Z_n).$$

Wegen Behauptung 2 ist \vec{Z}' eine vollständige k -Suche. Es gilt $r(\vec{Z}') \leq r(\vec{Z})$ und $s(\vec{Z}') < s(\vec{Z})$, was der Minimalität von \vec{Z} widerspricht. □

(4.20) Lemma. Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Wenn es eine monotone vollständige k -Suche in G gibt, so gilt $\text{pw}(G) \leq k$.

Beweis. Sei $\vec{Z} = (Z_0, \dots, Z_n)$ eine monotone vollständige k -Suche. Sei $\beta : V(P_n) \rightarrow 2^{V(G)}$ definiert durch

$$\beta(i) := \partial Z_{i-1} \cup (Z_i \setminus Z_{i-1})$$

für alle $i \in [n]$. Weil $|\partial Z_{i-1}| \leq k$ und $|Z_i \setminus Z_{i-1}| \leq 1$ gilt $|\beta(i)| \leq k + 1$. Wir zeigen jetzt, dass (P_n, β) eine Wegzerlegung von G ist.

Behauptung 1. Für alle $v \in V(G)$ existiert ein $i \in [n]$ mit $v \in \beta(i)$.

Beweis. Sei $v \in V(G)$. Weil $Z_0 = \emptyset$ und $Z_n = V(G)$ gibt es ein $i \in [n]$, so dass $v \in Z_i \setminus Z_{i-1} \subseteq \beta(i)$. ┘

Behauptung 2. Für alle $i_1, i_2, j \in [n]$ mit $i_1 < j < i_2$ gilt:

$$\beta(i_1) \cap \beta(i_2) \subseteq \beta(j).$$

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass für alle $Z \subseteq Z' \subseteq V(G)$ gilt:

$$Z \cap \partial Z' \subseteq \partial Z. \tag{4.B}$$

Seien nun $i_1, i_2, j \in [n]$ mit $i_1 < j < i_2$. Wegen der Monotonie gilt dann $Z_{i_1-1} \subseteq Z_{i_1} \subseteq Z_{j-1} \subseteq Z_{i_2-1} \subseteq Z_{i_2}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \beta(i_1) \cap \beta(i_2) &\subseteq (Z_{i_1-1} \cup Z_{i_1}) \cap \beta(i_2) \\ &\subseteq Z_{j-1} \cap \beta(i_2) \\ &= Z_{j-1} \cap (\partial Z_{i_2-1} \cup (Z_{i_2} \setminus Z_{i_2-1})) \\ &= Z_{j-1} \cap \partial Z_{i_2-1} && \text{(weil } Z_{j-1} \subseteq Z_{i_2-1}) \\ &\subseteq \partial Z_{j-1} && \text{(wegen (4.B))} \\ &\subseteq \beta(j). \end{aligned}$$

┘

Behauptung 3. Für alle $e \in E(G)$ existiert ein $i \in [n]$ mit $e \subseteq \beta(i)$.

Beweis. Für alle $x \in V(G)$ sei $i(x) := \min\{i \mid x \in Z_i\}$. Sei nun $e = vw \in E(G)$. OBdA gelte $i(v) \leq i(w)$. Sei $i := i(w)$. Dann gilt $w \in Z_i \setminus Z_{i-1} \subseteq \beta(i)$. Falls $i(v) = i$, so gilt $v \in Z_i \setminus Z_{i-1} \subseteq \beta(i)$. Falls $i(v) < i$, so gilt $v \in \partial Z_j$ für alle $j \in [i(v), i-1]$. Insbesondere gilt $v \in \partial Z_{i-1} \subseteq \beta(i)$. In beiden Fällen gilt also $e = \{v, w\} \subseteq \beta(i)$. ┘

Behauptungen 1 und 2 zeigen, dass (P, β) (T1) erfüllt, und Behauptung 3 zeigt, dass (P, β) (T2) erfüllt. Weil P ein Weg ist, ist (P, β) also eine Wegzerlegung von G . Weil $|\beta(i)| \leq k + 1$ für alle $i \in [n]$, ist die Weite dieser Zerlegung höchstens k . □

Beweis von Satz (4.9). Der Satz folgt sofort aus den Lemmata (4.12), (4.18), (4.19), (4.20). □

(4.21) Korollar. Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. Wenn GE eine Gewinnstrategie im Spiel $UG(G, k)$ hat, so hat GE auch eine monotone Gewinnstrategie.

(4.22) Korollar. Sei G ein Graph und $k \in \mathbb{N}_0$. Es gibt genau dann eine vollständige k -Suche in G , wenn $\text{pw}(G) \leq k$.

4.3 Wegweite und verbotene Wälder

In diesem Abschnitt werden wir beweisen, dass ein Graph genau dann "große" Wegweite hat, wenn er „große“ Bäume oder Wälder als Minoren enthält.

(4.23) Definition. Seien $d \in \mathbb{N}$.

- (1) Ein d -ärer Wurzelbaum ist ein Wurzelbaum, in dem jeder Knoten entweder genau d Kinder oder ein Blatt ist, das heißt, keine Kinder hat.
- (2) Ein vollständiger d -ärer Wurzelbaum ist ein d -ärer Wurzelbaum, in dem alle Wege von der Wurzel zu einem Blatt dieselbe Länge haben.
- (3) Ein (vollständiger) d -ärer Baum ist ein Baum T , für den ein $w \in V(T)$ existiert, so dass (T, w) ein (vollständiger) d -ärer Wurzelbaum ist.

Statt 2-är sagen wir *binär* und statt 3-är *ternär*.

(4.24) Satz. Sei $d \geq 3$. Dann hat jeder vollständiger d -äre Baum der Höhe k Wegweite k .

Beweis. Wir haben bereits in Beispiel (4.6) gesehen, dass alle Bäume T der Höhe k Wegweite höchstens k haben.

Weil jeder vollständige d -äre Baum einen vollständigen ternären Baum als Subgraphen enthält, reicht es für die untere Schranke, zu zeigen, dass jeder vollständige ternäre

Baum T der Höhe k Wegweite mindestens k hat. Wir beweisen dies per Induktion über k :

$k = 0$: Ein vollständiger ternärer Baum der Höhe 0 besteht aus einem einzigen Knoten und hat damit Pfadweite 0.

$k \rightarrow k + 1$: Sei T ein vollständiger ternärer Baum der Höhe k und $w \in V(G)$, so dass (T, w) ein vollständiger ternärer Wurzelbaum der Höhe k ist.

Sei (P_n, β) eine Wegzerlegung von T . OBdA seien $\beta(1) \neq \emptyset$ und $\beta(n) \neq \emptyset$. Seien $t \in \beta(1)$ und $u \in \beta(n)$. Nach Lemma (3.14) ist $\beta^{-1}(tTu)$ zusammenhängend, und weil $1, n \in \beta^{-1}(tTu)$ gilt $[n] = V(P_n) = \beta^{-1}(tTu)$.

Seien w_1, w_2, w_3 die Kinder von w in T und T_1, T_2, T_3 die Teilbäume mit Wurzeln w_1, w_2, w_3 . Offensichtlich gibt es ein $j \in [3]$ mit $\{t, u\} \cap V(T_j) = \emptyset$. OBdA gelte $V(T_3) \cap \{t, u\} = \emptyset$. Dann gilt auch $T_3 \cap (tTu) = \emptyset$.

Sei $\beta' : [n] \rightarrow 2^{V(G)}$ definiert durch $\beta'(i) := \beta(i) \cap V(T_3)$. Dann ist (P_n, β') eine Wegzerlegung von T_3 . Nun ist T_3 ein vollständiger ternärer Baum der Höhe k .

Nach Induktionsannahme gilt damit $w(P_n, \beta') \geq k$.

Für alle $i \in [n]$ gilt $\beta(i) \setminus \beta'(i) \neq \emptyset$, weil $\beta(i) \cap V(tTu) \neq \emptyset$ und $\beta'(i) \cap V(tTu) \subseteq V(T_3) \cap V(tTu) = \emptyset$. Also gilt

$$|\beta(i)| > |\beta'(i)| \geq k$$

und damit $w(P_n, \beta) \geq k$. □

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist folgender Satz:

(4.25) Satz. Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und G ein Graph mit $\text{pw}(G) \geq k$. Dann gilt für alle Wälder H mit $|H| \leq k$, dass $H \leq G$.

Beweis.

Behauptung 1. Seien $X, Y \subseteq Z \subseteq V(G)$. Dann ist $\partial(X \cup Y)$ ein ∂Y - ∂Z -Trenner.

Beweis. Sei P ein ∂Y - ∂Z -Weg mit Endecken $y \in \partial Y$ und $z \in \partial Z$. Wir werden zeigen, dass $V(P) \cap \partial(X \cup Y) \neq \emptyset$.

Fall 1: $V(P) \subseteq X \cup Y$.

Dann ist $z \in \partial Z \cap (X \cup Y) \subseteq \partial(X \cup Y)$. Die letzte Inklusion gilt, weil $X \cup Y \subseteq Z$.

Also $z \in V(P) \cap \partial(X \cup Y)$.

Fall 2: $V(P) \not\subseteq X \cup Y$.

Sei $z' \in V(P) \setminus (X \cup Y)$. Dann ist yPz' ein Weg von $X \cup Y$ nach $V(G) \setminus (X \cup Y)$, also gilt $V(yPz') \cap \partial(X \cup Y) \neq \emptyset$. ┘

Sei

$$\mathcal{S} := \{Z \subseteq V(G) \mid \text{es gibt eine } (k-1)\text{-Suche } (Z_0, \dots, Z_n) \text{ in } G \text{ mit } Z_n = Z\}.$$

Man beachte, dass $\emptyset \in \mathcal{S}$ und damit $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Weil $\text{pw}(G) \geq k$, gilt wegen Korollar (4.22), dass $V(G) \notin \mathcal{S}$.

Behauptung 2. Seien $Z \in \mathcal{S}$ und $Y \subseteq Z$, so dass $\ell := |\partial Y| \leq |\partial Z|$ und dass eine Familie von ℓ paarweise disjunkten ∂Y - ∂Z -Wegen existiert. Dann gilt $Y \in \mathcal{S}$.

Beweis. Sei $\vec{Z} := (Z_0, \dots, Z_n)$ eine $(k-1)$ -Suche mit $Z_n = Z$. Für alle $i \in [0, n]$ sei $Y_i := Y \cap Z_i$. Dann gilt $Y_0 = \emptyset$ und $|Y_i \setminus Y_{i-1}| \leq |Z_i \setminus Z_{i-1}| \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Angenommen, $|\partial Y_i| > |\partial Z_i|$ für ein $i \in [0, n]$. Wegen der Submodularität des Randes gilt dann $|\partial(Y \cup Z_i)| < |\partial Y| = \ell$. Wegen Behauptung 1 (mit $X := Z_i$) ist $\partial(Y \cup Z_i)$ ein ∂Y - ∂Z -Trenner. Das widerspricht unserer Annahme, dass es ℓ paarweise disjunkte ∂Y - ∂Z -Wege gibt.

Also gilt $|\partial Y_i| \leq |\partial Z_i| \leq k-1$ für alle $i \in [0, n]$. Dann ist (Y_0, \dots, Y_n) eine $(k-1)$ -Suche, und es gilt $Y = Y_n \in \mathcal{S}$. ┘

Für $i \in [0, k]$ sei

$$\mathcal{S}_i := \{Z \in \mathcal{S} \mid |\partial Z| \leq i\}$$

Dann gilt $\emptyset \in \mathcal{S}_i$ und $V(G) \notin \mathcal{S}_i$.

Behauptung 3. Seien $i \in [0, k-1]$ und $X \in \mathcal{S}_i$. Weiterhin sei $x \in V(G) \setminus X$. Dann gilt $X \cup \{x\} \in \mathcal{S}_{i+1}$.

Beweis. Sei (X_0, \dots, X_n) eine $(k-1)$ -Suche mit $X_n = X$, und sei $X' := X \cup \{x\}$. Es gilt $|X' \setminus X_n| = 1$. Weil $|\partial X_n| = i \leq k-1$ ist (X_0, \dots, X_n, X') eine $(k-1)$ -Suche. Also gilt $X' \in \mathcal{S}$. Weiterhin gilt $\partial X' \subseteq \{x\} \cup \partial X$ und damit $|\partial X'| \leq 1 + |\partial X| \leq i+1$. ┘

Behauptung 4. Seien $i \in [0, k-1]$ und $X \in \mathcal{S}_i$ maximal bezüglich Inklusion. Sei $Z \in \mathcal{S}$ mit $Z \supset X$, und seien $x \in Z \setminus X$ und $X' := X \cup \{x\}$. Dann gibt es eine Familie von $i+1$ disjunkten $\partial X'$ - ∂Z -Wegen P_1, \dots, P_{i+1} mit $V(\overset{\circ}{P}) \subseteq Z \setminus X$.

Beweis. Wegen Behauptung 3 gilt $X' \in \mathcal{S}_{i+1}$, und weil $X' \supset X$ gilt wegen der Maximalität von X außerdem $X' \notin \mathcal{S}_i$ und damit $|\partial X'| = i+1$.

$$\begin{array}{rcl}
X^k & = & X_0^k \cup X_1^k \cup X_2^k \cup \dots \cup X_k^k \\
\cup & & \cup \quad \cup \quad \cup \quad \cup \\
\vdots & & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \\
\cup & & \cup \quad \cup \quad \cup \quad \cup \\
X^2 & = & X_0^2 \cup X_1^2 \cup X_2^2 \\
\cup & & \cup \quad \cup \\
X^1 & = & X_0^1 \cup X_1^1 \\
\cup & & \cup \\
X^0 & = & X_0^0
\end{array}$$

Abbildung 4.1. Die Mengen X^i und X_j^i

Sei S ein minimaler $\partial X'$ - ∂Z -Trenner und $\ell := |S|$. Sei B die Vereinigung aller Komponenten A von $G - S$ mit $V(A) \cap X' \neq \emptyset$. Dann gilt $V(A) \subseteq Z \setminus \partial Z$, denn sonst gäbe es einen $\partial X'$ - ∂Z -Weg in $A \subseteq G - S$.

Jeder S - ∂Z -Trenner ist auch ein $\partial X'$ - ∂Z -Trenner. Wegen der Minimalität von S gibt es also keinen S - ∂Z -Trenner der Ordnung kleiner als ℓ . Nach dem Satz von Menger gibt es damit eine Familie von ℓ -disjunkten S - ∂Z -Wegen. Sei $Y := V(B) \cup S$, dann gilt $\partial Y \subseteq S$. Wegen Behauptung 2 ist $Y \in \mathcal{S}_\ell$. Weil $Y \supset X$ folgt wegen der Maximalität von X , dass $\ell \geq i + 1$.

Weil S ein minimaler $\partial X'$ - ∂Z -Trenner ist, gibt es nach dem Satz von Menger damit eine Familie von $i + 1$ disjunkten $\partial X'$ - ∂Z -Wegen P_1, \dots, P_{i+1} . Weil $X' \subseteq Z$ und $|\partial X'| = i + 1$, gilt $V(\overset{\circ}{P}) \subseteq Z \setminus X$. ┘

Sei H ein Wald mit $|H| = k + 1$. Sei $V(H) = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}\}$, und die Anordnung der Ecken sei so gewählt, dass $|N^H(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}| \leq 1$ für alle $i \in [k + 1]$. Wir definieren für alle $i, j \in [0, k]$ mit $j \leq i$ eine Menge X_j^i , so dass für alle $i \in [0, k]$ folgende Bedingungen erfüllt sind: Sei $X^i := X_1^i \cup \dots \cup X_i^i$ (vgl. Abb 4.1).

- (i) Für alle $j, j' \in [0, i]$ mit $j \neq j'$ gilt $X_j^i \cap X_{j'}^i = \emptyset$.
- (ii) Für alle $j, i' \in [0, i]$ mit $j \leq i' \leq i$ gilt $X_j^{i'} \subseteq X_j^i$.
- (iii) Für alle $j \in [i]$ ist X_j^i zusammenhängend in G .
- (iv) X^i ist maximal bezüglich Inklusion in \mathcal{S}_i .

(v) Für alle $j \in [i]$ gilt $|X_j^i \cap \partial X^i| = 1$.

(vi) Für alle $j, j' \in [i]$ gilt: Wenn $v_j v_{j'} \in E(H)$, so gibt es eine Kante $xx' \in E(G)$ mit $x \in X_j^i$ und $x' \in X_{j'}^i$.

Wir definieren die Mengen per Induktion über i :

$i = 0$: X_0^0 sei maximal bezgl. Inklusion in \mathcal{S}_0 . Offensichtlich sind dann die Bedingungen (i)–(vi) für $i = 0$ erfüllt.

$i \rightarrow i + 1$: Sei $X := X^i$. Für alle $j \in [i]$ sei $x_j^i \in X_j^i \cap \partial X^i = \{x_j^i\}$. So ein x_j^i existiert wegen (v). Weil $X \in \mathcal{S}_i$ gilt $|\partial X| \leq i$ und damit $\partial X = \{x_1^i, \dots, x_i^i\}$.

Weil $V(G) \notin \mathcal{S}$ gilt $X \neq V(G)$. Falls $|N^H(v_{i+1}) \cap \{v_1, \dots, v_i\}| = 1$ sei $j \in [i]$, so dass $v_j v_{i+1} \in E(H)$, und $x \in N^G(x_j^i) \setminus X^i$. Falls $|N^H(v_{i+1}) \cap \{v_1, \dots, v_i\}| = 0$, so sei $x \in V(G) \setminus X$ beliebig. Wegen Behauptung 3 gilt $X' := X \cup \{x\} \in \mathcal{S}_{i+1}$, und weil $X' \supset X$ gilt wegen der Maximalität von X noch $X' \notin \mathcal{S}_i$, also $|\partial X'| = i + 1$.

$$\partial X' = \partial X \cup \{x\} = \{x_1^i, \dots, x_i^i, x\}.$$

Sei $Z \supseteq X'$ maximal in \mathcal{S}_{i+1} . Nach Behauptung 4 gibt es eine Familie P_1, \dots, P_{i+1} von paarweise disjunkten $\partial X' - \partial Z$ -Wegen mit $V(P_j) \subseteq Z \setminus X'$. Wir wählen solche Wege so, dass für $j \in [i]$ die Ecke x_j^i Ecke von P_j in $\partial X'$ ist und dass x Ecke von P_{i+1} in $\partial X'$ ist.

Für alle $j \in [i]$ setzen wir $X_j^{i+1} := X_j^i \cup V(P_j)$. Weiterhin setzen wir $X_{i+1}^{i+1} := V(P_{i+1})$ und $X_0^{i+1} := Z \setminus \bigcup_{j=1}^{i+1} X_j^{i+1}$. Dann ist $X^{i+1} = Z$.

Es ist leicht zu sehen, dass mit diesen Definitionen die Bedingungen (i)–(vi) für $i + 1$ erfüllt sind.

Weil $V(G) \notin \mathcal{S}$ gilt $X^k \neq V(G)$. Falls $|N^H(v_{k+1}) \cap \{v_1, \dots, v_k\}| = 1$ sei $j \in [i]$, so dass $v_j v_{k+1} \in E(H)$, und $x_{k+1} \in X_j^k \cap \partial X^k$. Falls $|N^H(v_{k+1}) \cap \{v_1, \dots, v_k\}| = 0$, so sei $x_{k+1} \in V(G) \setminus X^k$ beliebig.

Für alle $j \in [k]$ setzen wir $X_j := X_j^k$, und wir setzen $X_{k+1} := \{x_{k+1}\}$. Dann sind die Mengen X_1, \dots, X_{k+1} paarweise disjunkt und zusammenhängend. Außerdem gibt es für alle $i, j \in [k + 1]$ mit $e = v_i v_j \in E(H)$ eine Kante von X_i nach X_j . Sei in diesem Fall P_e ein $X_i - X_j$ -Weg der Länge 1. Dann ist

$$\left((G[X_j])_{j \in [k+1]}', (P_e)_{e \in E(H)} \right)$$

ein Abbild von H in G . Also $H \leq G$. □

(4.26) Definition. Eine Klasse C von Graphen hat *beschränkte Wegweite*, wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $G \in C$ gilt: $\text{pw}(G) \leq k$.

(4.27) Korollar. Eine Klasse C hat genau dann *beschränkte Wegweite*, wenn es einen Baum T gibt, so dass $C \subseteq \mathcal{X}(T)$.

(4.28) Korollar. Für alle Graphen H gilt:

$\mathcal{X}(H)$ hat *beschränkte Wegweite* $\iff H$ ist ein Wald.