Kapitel 3

Baumzerlegungen

3.1 Definitionen und einfache Eigenschaften

(3.1) Definition. Eine *Baumzerlegung* eines Graphen G ist ein Paar (T, β), wobei T ein Baum ist und $\beta : V(T) \to 2^{V(G)}$, so dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(T1) Für alle $v \in V(G)$ ist die Menge

$$\left\{t \in V(T) \;\middle|\; v \in \beta(t)\right\}$$

zusammenhängend in T. Insbesondere ist die Menge nichtleer.

(T2) Für alle $e \in E(G)$ existiert ein $t \in V(T)$, so dass $e \subseteq \beta(t)$.

Die Mengen $\beta(t)$ für $t \in V(T)$ nennen wir die *Beutel* der Zerlegung (T, β).

(3.2) Beobachtungen.

(1) Bedingung (T1) ist äquivalent zu den beiden folgenden Bedingungen:

(T1-a) Für alle $v \in V(G)$ existiert ein $t \in V(T)$, so dass $v \in \beta(t)$.

(T1-b) Für alle $s, t, u \in V(T)$ mit $t \in V(sTu)$ gilt: $\beta(s) \cap \beta(u) \subseteq \beta(t)$.

(2) Ist (T, β) eine Baumzerlegung von G, so gilt

$$G = \bigcup_{t \in V(T)} G\big[\beta(t)\big].$$

(3.3) Beispiel (Baumzerlegung).

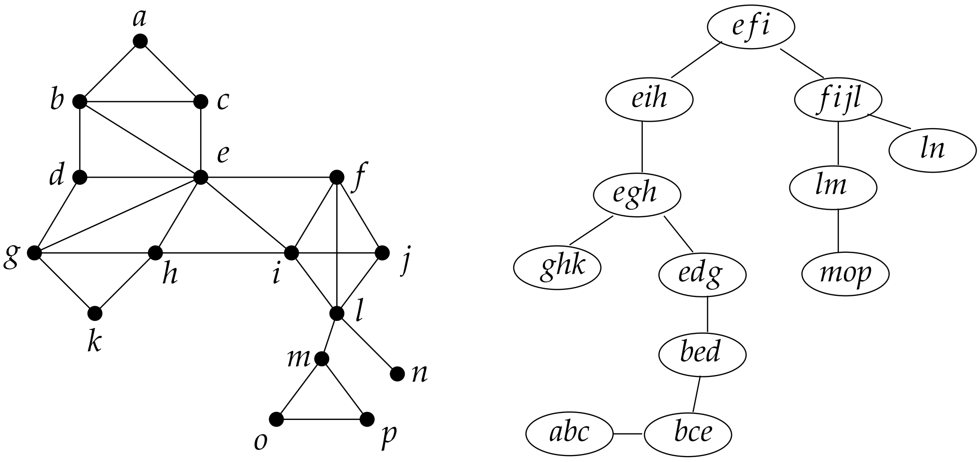

Abbildung 3.1. Baum und zwei mögliche Baumzerlegungen

(3.4) Beispiel (Bäume).

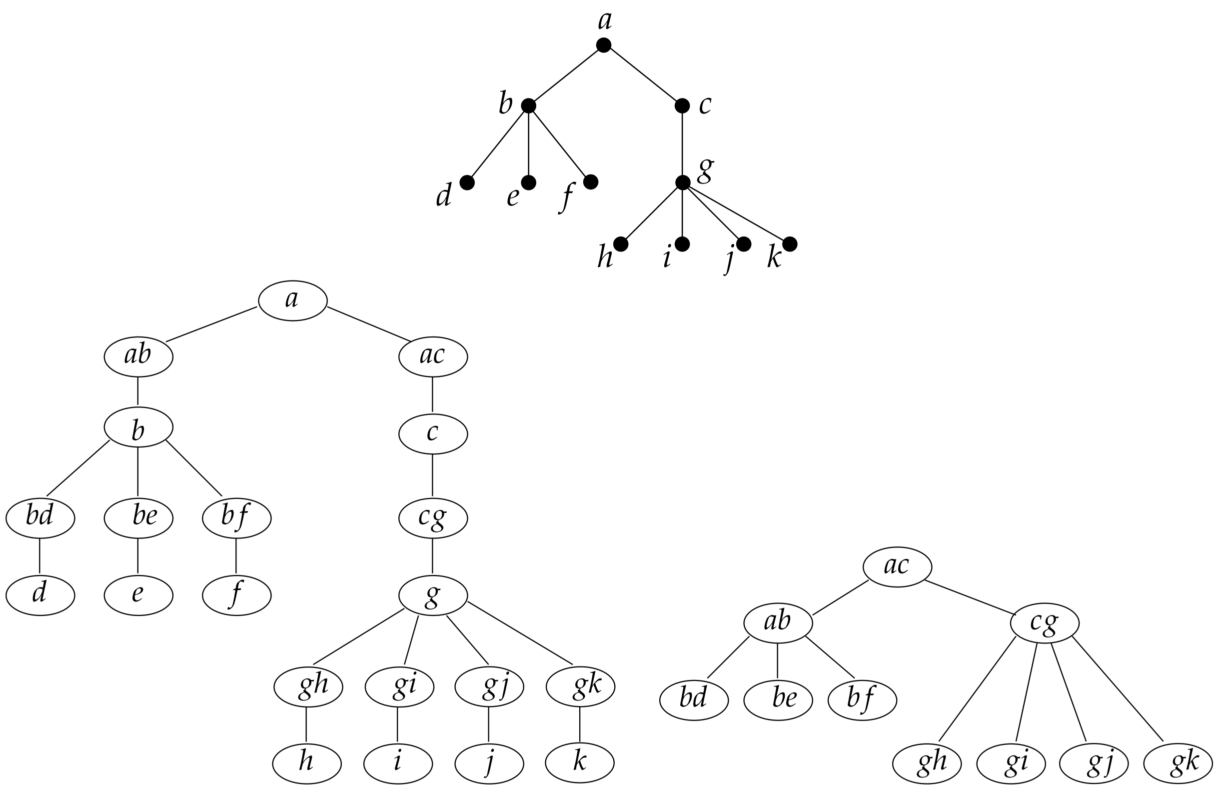

Abbildung 3.2. Baum und zwei mögliche Baumzerlegungen

(3.5) Beispiel (Zusammenhangskomponenten).

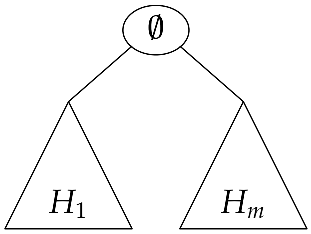

Abbildung 3.3. Baumzerlegung eines Graphen G mit Komponenten $H_1, \dots, H_m$

(3.6) Beispiel (Kreise).

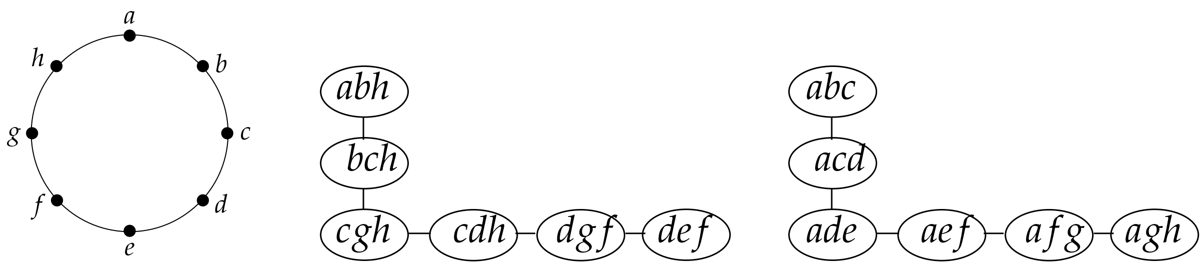

Abbildung 3.4. Kreis und zwei mögliche Baumzerlegungen

(3.7) Beispiel (Räder).

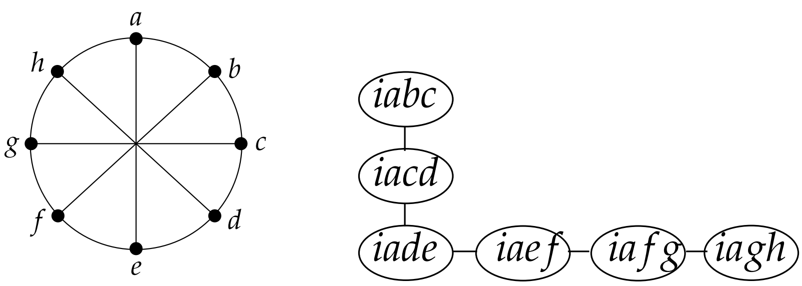

Abbildung 3.5. Ein Rad und seine Baumzerlegung

(3.8) Beispiel (vollständige Graphen).

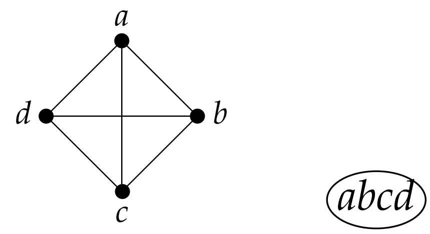

Abbildung 3.6. Der K_4 und seine Baumzerlegung

(3.9) Beispiel (vollständige bipartite Graphen).

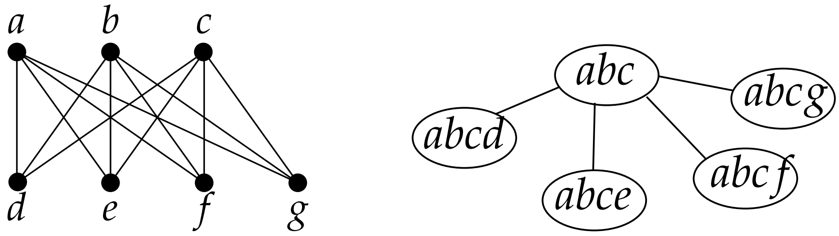

Abbildung 3.7. Der $K_{3,4}$ und seine Baumzerlegung

(3.10) Beispiel (Gitter). Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$. Ein *Gitter* ist ein Graph $G_{m\times n}$ mit
$V(G_{m\times n}) := [m] \times [n]$ und
$E(G_{m\times n}) := \left\{\{(i,j),(i',j')\} \in \binom{V(G_{m\times n})}{2} \,\middle|\, (i = i' \text{ und } |j-j'| = 1) \text{ oder } (j = j' \text{ und } |i-i'| = 1)\right\}$.

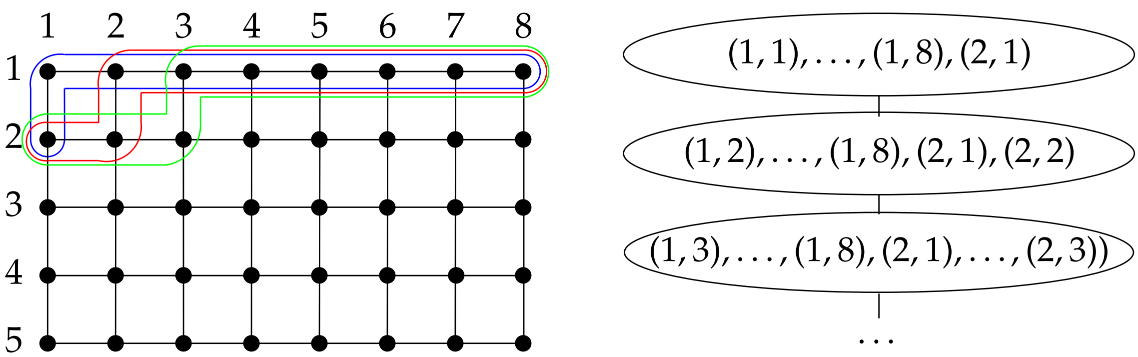

Abbildung 3.8. Der $G_{5\times 8}$ und seine Baumzerlegung

(3.11) Beispiel (außerplanare Graphen).

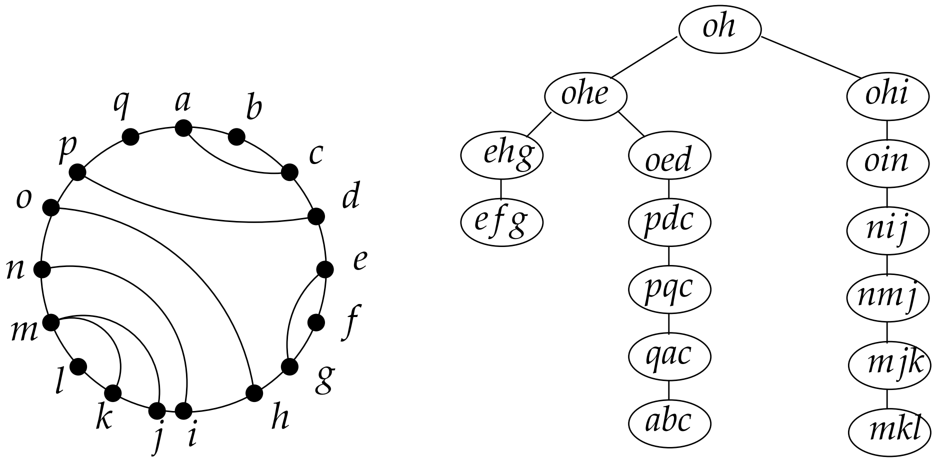

Abbildung 3.9. Ein außerplanarer Graph und seine Baumzerlegung

(3.12) Beobachtungen. Sei G ein Graph.

(1) (K_1, β) mit $\beta(1) := V(G)$ ist eine Baumzerlegung von G.

(2) Für alle $x \notin V(G) \cup E(G)$ gilt: Ist (T, β) eine Baumzerlegung von G, so ist (T, β') mit $\beta'(t) := \beta(t) \cup \{x\}$ für alle $t \in V(T)$ eine Baumzerlegung von $G \cdot x$.

(3) Sei $H \subseteq G$ ein Subgraph von G und (T, β) eine Baumzerlegung von G. Dann ist (T, β') mit $\beta'(t) := \beta(t) \cap V(H)$ für alle $t \in V(T)$ eine Baumzerlegung von H.

(3.13) Notation. Sei G ein Graph und (T, β) eine Baumzerlegung von G.

- Für $v \in V(G)$ sei
$$\beta^{-1}(v) := \{t \in V(T) \mid v \in \beta(t)\}.$$
- Für $W \subseteq V(G)$ sei
$$\beta^{-1}(W) := \bigcup_{w \in W} \beta^{-1}(w).$$
- Für $H \subseteq G$ sei
$$\beta^{-1}(H) := \beta^{-1}(V(H)).$$
- Für $U \subseteq V(T)$ sei
$$\beta(U) := \bigcup_{t \in U} \beta(t).$$

- Für $T' \subseteq T$ sei
$$\beta(T') := \beta(V(T')).$$

(3.14) Lemma. *Sei G ein Graph, (T, β) eine Baumzerlegung von G und $X \subseteq V(G)$ eine in G zusammenhängende Eckenmenge. Dann ist $\beta^{-1}(X)$ zusammenhängend in T.*

Beweis. Induktion über $|X|$.

$|X| = 1$: (T1).

$|X| \geq 1$: Sei $e = xy$ eine Kante in G, so dass $x, y \in X$ und dass $X \setminus \{x\}$ zusammenhängend ist. Gemäß (T2) existiert ein $t \in V(T)$ mit $e \subseteq \beta(t)$. Wähle so ein t. Aus der Induktionsannahme folgt, dass $\beta^{-1}(X \setminus \{x\})$ zusammenhängend ist, und gemäß (T1) ist $\beta^{-1}(x)$ zusammenhängend. Außerdem ist $t \in \beta^{-1}(X \setminus \{x\}) \cap \beta^{-1}(x)$. Daraus folgt, dass $\beta^{-1}(X) = \beta^{-1}(X \setminus \{x\}) \cup \beta^{-1}(x)$ zusammenhängend ist. □

(3.15) Lemma. *Sei G ein Graph und (T, β) eine Baumzerlegung von G. Weiterhin seien $e = t_1t_2 \in E(T)$ und T_1, T_2 die Komponenten von $T \setminus e$ mit $t_i \in V(T_i)$. Dann ist $\beta(t_1) \cap \beta(t_2)$ ein $\beta(T_1)$-$\beta(T_2)$-Trenner im Graphen G.*

Beweis. Für $i = 1, 2$ sei $X_i := \beta(T_i)$. Weil $X_1 \cup X_2 = \beta(T) = V(G)$, reicht es zu zeigen: Für jede Kante $x_1x_2 \in E(G)$ mit $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ gilt $\{x_1, x_2\} \cap (\beta(t_1) \cap \beta(t_2)) \neq \emptyset$. Sei $e = x_1x_2 \in E(G)$ eine Kante mit $x_i \in X_i$. Aus (T2) folgt, dass ein Knoten $t \in V(T)$ existiert mit $e \subseteq \beta(t)$. Wähle so ein t. OBdA sei $t \in V(T_1)$. Sei $u \in V(T_2)$, so dass $x_2 \in \beta(u)$. Da $\beta^{-1}(x_2)$ zusammenhängend ist, folgt $x_2 \in \beta(s)$ für alle Knoten $s \in V(uTt)$ auf dem eindeutigen Weg von u nach t in T. Weil auch t_1 und t_2 auf diesem Weg liegen, ist $x_2 \in \beta(t_1) \cap \beta(t_2)$. □

(3.16) Lemma (Helly Eigenschaft der Bäume). *Sei T ein Baum und $\mathcal{U}$ eine Familie von Teilbäumen von T, so dass für alle $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ gilt: $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dann gilt*
$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \neq \emptyset.$$

Beweis. Induktion über $|V(T)|$.

$|V(T)| = 1$: Trivial.

$|V(T)| > 1$: Wähle Blatt $t \in V(T)$. Sei $N^T(t) = \{s\}$.

Fall 1: $V(U) \neq \{t\}$ für alle $U \in \mathcal{U}$.
Dann ist $U - t$ zusammenhängend für alle $U \in \mathcal{U}$. Setze $T' := T - t$ und $\mathcal{U}' := \{U - t \mid U \in \mathcal{U}\}$. Für $U - t, U' - t \in \mathcal{U}'$ gilt $(U - t) \cap (U' - t) \neq \emptyset$, denn aus $t \in V(U) \cap V(U')$ folgt $s \in V(U) \cap V(U')$ und somit $s \in V(U - t) \cap V(U' - t)$. Nach Induktionsannahme ist $\bigcap_{U' \in \mathcal{U}'} U' \neq \emptyset$ und damit $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} U \neq \emptyset$.

Fall 2: Es existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V(U) = \{t\}$.
Da $U \cap U' \neq \emptyset$ für alle $U' \in \mathcal{U}$, ist $t \in V(U')$ für alle $U' \in \mathcal{U}$. Somit ist $\{t\} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}} V(U)$. □

(3.17) Beispiel. Kreise haben nicht die Helly Eigenschaft.

(3.18) Lemma. *Sei G ein Graph und (T, β) eine Baumzerlegung von G. Sei $X \subseteq V(G)$ die Eckenmenge einer Clique in G. Dann existiert ein $t \in V(T)$ mit $X \subseteq \beta(t)$.*

Beweis. Sei $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ und $U_i := \beta^{-1}(x_i)$ für $i \in [k]$. Aus (T2) folgt, dass $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ für $i, j \in [k]$. Weiterhin folgt aus (T1), dass U_i in T zusammenhängend ist für $i \in [k]$. Gemäß Lemma (3.16) gilt:

$$\bigcap_{i=1}^{k} U_i \neq \emptyset.$$

Sei $t \in \bigcap_{i=1}^{k} U_i$. Dann ist $X \subseteq \beta(t)$. □

(3.19) Lemma. *Sei G ein Graph und (T, β) eine Baumzerlegung von G. Sei $H \preceq G$ und $\big((A_v)_{v \in V(H)}, (P_e)_{e \in E(H)}\big)$ ein Abbild von H in G mit $\|P_e\| = 1$ für alle $e \in E(H)$. Dann ist (T, β') mit $\beta'(t) := \{v \in V(H) \mid V(A_v) \cap \beta(t) \neq \emptyset\}$ eine Baumzerlegung von H.*

Beweis. (T1): Für $v \in V(H)$ ist $(\beta')^{-1}(v) = \beta^{-1}(A_v)$. Da A_v zusammenhängend ist, folgt mit Lemma 3.14, dass $\beta^{-1}(A_v)$ zusammenhängend ist.

(T2): Sei $e = vw \in E(H)$ und seien $v' \in V(A_v)$ und $w' \in V(A_w)$ die Endecken von P_e. Da $\|P_e\| = 1$, ist $v'w' \in E(G)$, und somit existiert ein $t \in V(T)$ mit $e \in \beta(t)$. Wähle so ein t. Dann ist $V(A_v) \cap \beta(t) \neq \emptyset$ und $V(A_w) \cap \beta(t) \neq \emptyset$. Also sind $v, w \in (\beta')^{-1}(t)$. □

(3.20) Definition. Eine Baumzerlegung (T, β) ist *klein*, wenn für alle $t, u \in V(T)$ mit $t \neq u$ gilt: $\beta(t) \not\subseteq \beta(u)$.

(3.21) Lemma. *Sei (T, β) eine Baumzerlegung des Graphen G. Dann existiert eine kleine Baumzerlegung (T', β') von G, so dass:*

(1) Für alle $t \in V(T)$ existiert ein $t' \in V(T')$ mit $\beta(t) \subseteq \beta'(t')$.

(2) Für alle $t' \in V(T')$ existiert ein $t \in V(T)$ mit $\beta(t) = \beta'(t')$ und für alle $u' \in N^{T'}(t')$ existiert $u \in N^T(t)$ mit $\beta'(t') \cap \beta'(u') \subseteq \beta(t) \cap \beta(u)$.

Beweis. Wähle Baumzerlegung (T', β') so, dass (1) und (2) gelten und $|T'|$ minimal ist. Zu zeigen ist, dass (T', β') ist klein ist. *Angenommen*, (T', β') ist nicht klein. Wähle $t, u \in V(T')$, so dass $\beta'(u) \subseteq \beta'(t)$. Aus (T1-b) folgt (siehe Beobachtung 3.2), dass für alle $s \in V(uT't)$ gilt $\beta'(u) \subseteq \beta'(s)$. Insbesondere gilt also $\beta(u) \subseteq \beta(t')$ für den Nachbarn t' von u auf dem Weg $uT't$. OBdA können wir deswegen annehmen, dass $t \in N^{T'}(u)$. Sei $T'' = T'/tu$ mit

- $V(T'') = V(T' - u)$
- $E(T'') = E(T' - u) \cup \{ts \mid s \in N^{T'}(u) \setminus \{t\}\}$

Weiterhin definieren wir $\beta'' \colon V(T'') \to 2^{V(G)}$ durch $\beta''(t) := \beta(t)$. Es bleibt, die folgende Behauptung zu zeigen. Mit ihr erhalten wir einen *Widerspruch* zur Minimalität von $|T'|$.

Behauptung. (T'', β'') ist eine Baumzerlegung von G mit (1) und (2).

Beweis. Benutze, dass (T', β') eine Baumzerlegung von G ist, die (1) und (2) erfüllt.

(T1): Wenn $u \in (\beta')^{-1}(v)$, dann ist auch $t \in (\beta')^{-1}(v)$, denn $\beta'(u) \subseteq \beta'(t)$. Somit ist $(\beta'')^{-1}(v)$ zusammenhängend in T für alle $v \in V(G)$.

(T2): Klar, weil $\beta'(u) \subseteq \beta'(t) = \beta''(t)$.

(1): Klar, weil $\beta'(u) \subseteq \beta'(t) = \beta''(t)$.

(2): Sei $s \in V(T'')$. Dann gilt $s \in V(T')$, und damit gibt es nach (2) für (T', β') ein $s^* \in V(T)$ mit $\beta''(s) = \beta'(s) = \beta(s^*)$. Außerdem gilt für alle $u' \in N^{T''}(s) \cap N^{T'}(s)$, dass $\beta''(s) \cap \beta''(u') = \beta'(s) \cap \beta'(u')$, und damit gibt es ein $u^* \in N^T(s)$ mit $\beta''(s) \cap \beta''(u') = \beta(s^*) \cap \beta(u^*)$. Falls $s \notin N^{T'}(u)$ gilt außerdem $N^{T''}(s) = N^{T'}(s)$ und damit $N^{T''}(s) \setminus N^{T'}(s)$, und (2) ist bewiesen. Sei also $s \in N^{T'}(u)$:

$s \neq t$: Dann ist $\{t\} = N^{T''}(s) \setminus N^{T'}(s)$, und

$$\begin{aligned}\beta''(s) \cap \beta''(t) &\subseteq \beta'(s) \cap \beta'(t)\\ &\subseteq \beta'(s) \cap \beta'(t) \cap \beta'(u)\\ &\subseteq \beta'(s) \cap \beta'(u).\end{aligned}$$

$s = t$: Dann gilt für alle $v \in N^{T''}(t) \setminus N^{T'}(t)$, dass

$$\begin{aligned}\beta''(t) \cap \beta''(v) &\subseteq \beta'(t) \cap \beta'(v) \cap \beta'(u)\\ &\subseteq \beta'(t) \cap \beta'(u).\end{aligned}$$

□

3.2 Baumweite

(3.22) Definition. Sei G ein Graph und (T, β) eine Baumzerlegung von G.

(1) Die *Weite* von (T, β) ist die Zahl

$$w(T, \beta) := \max\left\{|\beta(t)| \;\middle|\; t \in V(T)\right\} - 1.$$

(2) Die *Baumweite* von G ist die Zahl

$$\mathrm{tw}(G) := \min\left\{w(T, \beta) \;\middle|\; (T, \beta) \text{ ist Baumzerlegung von } G\right\}.$$

(3.23) Beobachtungen. Sei G ein Graph. Dann gilt:

(1) $\mathrm{tw}(G) \leq |G| - 1$.

(2) Für alle Minoren $H \preceq G$ ist $\mathrm{tw}(H) \leq \mathrm{tw}(G)$ (folgt aus Lemma (3.19)).

(3) Der Graph G besitzt eine kleine Baumzerlegung (T, β) mit $w(T, \beta) = \mathrm{tw}(G)$ (folgt aus Lemma (3.21)).

(3.24) Beispiel (vollständige Graphen). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\mathrm{tw}(K_n) = n - 1.$$

„≤:“ Beobachtung (3.23) (1).

„≥:“ Lemma (3.18).

(3.25) Beispiel (Wälder). Sei G Wald mit $E(G) \neq \emptyset$. Dann gilt:

$$\mathrm{tw}(G) = 1.$$

„≤“: Beispiel (3.4).

„≥“: $K_2 \leq G$.

(3.26) Beispiel (Kreise). Sei C ein Kreis. Dann gilt:

$$\mathrm{tw}(C) = 2.$$

„≤“: Beispiel (3.6).

„≥“: $K_3 \leq C$.

(3.27) Beispiel (Räder). Für das Rad W_n mit $n \geq 3$ gilt:

$$\mathrm{tw}(W_n) = 3.$$

„≤“: Beispiel (3.7).

„≥“: $K_4 \leq W_n$.

(3.28) Beispiel (vollständige bipartite Graphen). Für alle $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ gilt:

$$\mathrm{tw}(K_{m,n}) = m.$$

„≤“: Beispiel (3.9).

„≥“: $K_{m+1} \leq K_{m,n}$.

(3.29) Beispiel (Gitter). Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m \leq n$ gilt:

$$\mathrm{tw}(G_{m\times n}) \leq m.$$

„≤“: Beispiel (3.10).

(3.30) Beobachtung. Sei G ein Graph und $x \notin V(G) \cup E(G)$. Dann gilt:

$$\mathrm{tw}(G \cdot x) = \mathrm{tw}(G) + 1.$$

(3.31) Satz. *Sei G ein Graph.*

(1) $\operatorname{tw}(G) = -1 \iff G = \emptyset$.

(2) $\operatorname{tw}(G) = 0 \iff G \neq \emptyset$ *und* $E(G) = \emptyset$.

(3) $\operatorname{tw}(G) = 1 \iff |E(G)| \geq 1$ *und G Wald.*

Beweis. (1) und (2) sind trivial. (3) folgt aus Beobachtung (3.23) und Beispielen (3.25) und (3.26). □

(3.32) Lemma. *Sei $G \neq \emptyset$. Dann existiert eine Ecke $v \in V(G)$ mit $d(v) \leq \operatorname{tw}(G)$.*

Beweis. Wähle eine kleine Baumzerlegung (T, β) vom Graphen G mit $w(T, \beta) = \operatorname{tw}(G) =: k$. Sei $t \in V(T)$ ein Blatt von T und $s \in N^T(t)$ die Mutter von t. Wähle $v \in \beta(t) \setminus \beta(s)$. Dann gilt $N^G(v) \subseteq \beta(t)$ und $|N^G(v)| = |\beta(t)| - 1 \leq k$. □

(3.33) Korollar. *Für jeden Graphen G gilt*

$$\deg(G) \leq \operatorname{tw}(G).$$

(3.34) Korollar. *Für jeden Graphen G gilt*

$$||G|| \leq |G| \cdot \operatorname{tw}(G).$$

(3.35) Korollar. *Für jeden Graphen G gilt*

$$\chi(G) \leq \operatorname{tw}(G) + 1.$$

3.3 Brambles

(3.36) Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

(1) Ein *Bramble* von G ist eine Familie $\mathcal{B} \subseteq 2^V$ von Teilmengen von V, für die folgendes gilt:

(B1) Alle $B \in \mathcal{B}$ sind zusammenhängend in G.

(B2) Alle $B, B' \in \mathcal{B}$ berühren einander, das heißt, $B \cap B' \neq \emptyset$ oder es existiert ein $e \in E$ mit $e \cap B \neq \emptyset$ und $e \cap B' \neq \emptyset$.

(2) Sei $\mathcal{B}$ ein Bramble von G. Eine Menge von Ecken $X \subseteq V$ *überdeckt* $\mathcal{B}$, wenn $X \cap B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Die *Dicke* von $\mathcal{B}$ ist die Zahl

$$d(\mathcal{B}) := \min \Big\{ |X| \;\Big|\; X \text{ überdeckt } \mathcal{B} \Big\}.$$

(3) Die *Brambledicke* von G ist die Zahl

$$\mathrm{bd}(G) := \max \Big\{ d(\mathcal{B}) \;\Big|\; \mathcal{B} \text{ ist Bramble von } G \Big\}.$$

(3.37) Beispiel (Kreise). Sei C ein Kreis. Dann ist

$$\mathrm{bd}(C) \geq 3.$$

(3.38) Beispiel (vollständige Graphen).

$$\mathrm{bd}(K_n) = n.$$

(3.39) Beispiel (Bäume). Sei T ein Baum mit $E(T) \neq \emptyset$. Dann ist

$$\mathrm{bd}(T) \geq 2.$$

(3.40) Beispiel (Gitter). Sei $n \geq 2$ und $G_{n\times n}$ ein Gitter mit $V(G_{n\times n}) = [n]^2$. Dann ist

$$\mathrm{bd}(G_{n\times n}) \geq n + 1.$$

Beweis. Sei

$$\begin{aligned} K_{x,y} &= \Big\{ (x, j) \;\Big|\; j \in [n-1] \Big\} \cup \Big\{ (i, y) \mid i \in [n-1] \Big\}, \\ U &= \Big\{ (n, j) \;\Big|\; j \in [n] \Big\}, \\ R &= \Big\{ (i, n) \;\Big|\; i \in [n-1] \Big\}. \end{aligned}$$

Dann ist $\mathcal{B} = \Big\{ K_{x,y} \;\Big|\; x, y \in [n-1] \Big\} \cup \Big\{ U \Big\} \cup \Big\{ R \Big\}$ ein Bramble von $G_{n\times n}$.

Behauptung. $d(\mathcal{B}) \geq n + 1$.

Beweis. Sei X eine Überdeckung von $\mathcal{B}$. Dann ist

- $|X \cap [n-1]^2| \geq n - 1$, denn sonst sind eine Zeile x und eine Spalte y frei, und damit ist das Kreuz $K_{x,y}$ nicht überdeckt,

- $|X \cap R| \geq 1$ und
- $|X \cap U| \geq 1$.

Da $[n-1]^2$, R und U paarweise disjunkt sind, ist $|X| \geq n+1$. ⌟

□

(3.41) Lemma. *Sei $\mathcal{B}$ ein Bramble des Graphen G und X, Y Überdeckungen von $\mathcal{B}$. Dann existieren $d(\mathcal{B})$ paarweise disjunkte Wege von X nach Y.*

Beweis. Sei S ein minimaler X-Y-Trenner. Dann überdeckt S den Bramble $\mathcal{B}$. Somit ist $|S| \geq d(\mathcal{B})$ und nach dem Satz von Menger existieren mindestens $d(\mathcal{B})$ paarweise disjunkte X-Y-Wege. □

(3.42) Satz. *Für alle Graphen G gilt:*

$$\mathrm{bd}(G) = \mathrm{tw}(G) + 1.$$

Beweis. *„$\leq$“:* Sei $\mathcal{B}$ Bramble von G und (T, β) eine Baumzerlegung von G.

Behauptung 1. $d(\mathcal{B}) \leq w(T, \beta) + 1$.

Beweis. Für alle $B \in \mathcal{B}$ ist $\beta^{-1}(B)$ zusammenhängend, da B zusammenhängend ist. Weiterhin ist $\beta^{-1}(B_1) \cap \beta^{-1}(B_2) \neq \emptyset$ für alle $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, da B_1 und B_2 entweder eine gemeinsame Ecke haben oder sich mittels einer Kante berühren. Nach der Helly Eigenschaft der Bäume ist dann $\bigcap_{B \in \mathcal{B}} \beta^{-1}(B) \neq \emptyset$. Wähle einen Knoten $t \in V(T)$ mit $t \in \beta^{-1}(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Dann ist $\beta(t) \cap B \neq \emptyset$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Somit ist $\beta(t)$ eine Überdeckung von $\mathcal{B}$ und $|\beta(t)| \geq d(\mathcal{B})$. ⌟

„$\geq$“: Sei G ein Graph mit $\mathrm{bd}(G) = k+1$. Es ist zu zeigen, dass der Graph G eine Baumzerlegung (T, β) besitzt mit $w(T, \beta) \leq k$.

Definition. Eine Baumzerlegung (T, β) ist *gut* für einen Bramble $\mathcal{B}$, wenn für alle $t \in V(T)$ gilt:

$$\beta(t) \text{ überdeckt Bramble } \mathcal{B} \Longrightarrow |\beta(t)| \leq k+1.$$

Behauptung 2. Für alle Brambles $\mathcal{B}$ existiert eine gute Baumzerlegung.

Aus dieser Behauptung angewandt auf $\mathcal{B} = \emptyset$ folgt die Existenz einer Baumzerlegung (T, β) mit $w(T, \beta) \leq k$.

Beweis von Behauptung 2.
Angenommen, die Behauptung ist falsch. Sei $\mathcal{B}$ ein Bramble ohne gute Baumzerlegung maximaler Mächtigkeit $|\mathcal{B}|$. Sei $\ell := d(\mathcal{B})$. Dann ist $\ell \leq \mathrm{bd}(G) = k + 1$. Sei X eine Überdeckung von $\mathcal{B}$ mit $|X| = \ell$.

Behauptung 3. Sei A eine Zusammenhangskomponente von $G - X$. Dann besitzt $G[V(A) \cup X]$ eine Baumzerlegung (T, β) mit

(*i*) (T, β) ist gut für $\mathcal{B}$, und

(*ii*) es existiert ein $t \in V(T)$ mit $X \subseteq \beta(t)$.

Aus Behauptung 3 folgt Behauptung 2:
Seien $A_1, \ldots, A_m$ die Komponenten von $G - X$ und für alle $i \in [m]$ sei (T_i, β_i) eine Baumzerlegung von $G[V(A_i) \cup X]$ mit (*i*) und (*ii*). OBdA sei $V(T_i) \cap V(T_j) = \emptyset$ für alle $i \neq j$. Für alle $i \in [m]$ sei $t_i \in V(T_i)$, so dass $X \subseteq \beta_i(t_i)$. Sei $r \notin \bigcup_{i=1}^{m} \big(V(T_i) \cup E(T_i)\big)$ ein neuer Knoten. Wir definieren einen Baum T wie folgt:

- $V(T) = \bigcup_{i \in [m]} V(T_i) \cup \{r\}$ und
- $E(T) = \bigcup_{i \in [m]} E(T_i) \cup \{rt_i \mid i \in [m]\}$.

Sei $\beta\colon V(T) \to 2^{V(G)}$ definiert durch

$$\beta(t) := \begin{cases} X, & \text{falls } t = r, \\ \beta_i(t), & \text{falls } t \in V(T_i). \end{cases}$$

Dann ist (T, β) eine gute Baumzerlegung von G. Damit erhalten wir einen *Widerspruch* und Behauptung 2 ist bewiesen.

Beweis von Behauptung 3.
Sei A eine Zusammenhangskomponente von $G - X$ und $H := G[V(A) \cup X]$.

Fall 1: Es existiert ein $B \in \mathcal{B}$, das $V(A)$ nicht berührt.
Sei (K_2, β) eine Baumzerlegung mit $\beta(1) = X$ und $\beta(2) = V(A) \cup N(A)$. Nun ist $|\beta(1)| \leq k + 1$ und der Bramble $\mathcal{B}$ wird nicht überdeckt von $\beta(2)$, da $\beta(2) \cap B = \emptyset$. Somit erfüllt die Baumzerlegung (K_2, β) (*i*) und (*ii*).

Fall 2: Alle $B \in \mathcal{B}$ berühren $V(A)$.
Dann ist $\mathcal{B}' := \mathcal{B} \cup \{V(A)\}$ ein Bramble mit $|\mathcal{B}'| > |\mathcal{B}|$. Aus der Maximalität von Bramble $\mathcal{B}$ folgt, dass eine Baumzerlegung (T', β') von G existiert, die

gut für $\mathcal{B}'$ ist. Sei (T', β') so eine Baumzerlegung. Dann ist (T', β') nicht gut für $\mathcal{B}$. Somit existiert ein $s \in V(T')$ mit $|\beta'(s)| > k+1$, so dass $\beta'(s)$ den Bramble $\mathcal{B}$ überdeckt. Wähle so ein s. Sei $Y := \beta'(s)$. Dann ist $Y \cap V(A) = \emptyset$, weil $\beta'(s)$ den Bramble $\mathcal{B}'$ nicht überdeckt. Aus Lemma (3.41) folgt die Existenz von $\ell = d(\mathcal{B})$ disjunkten X-Y-Wegen. Seien $P_1, \dots, P_\ell$ solche Wege. Für $i \in [\ell]$ seien $x_i \in X$ und $y_i \in Y$ die Endecken von P_i. Dann ist $X = \{x_1, \dots, x_\ell\}$. Da $Y \cap V(A) = \emptyset$, ist $V(P_i) \cap V(A) = \emptyset$ für alle $i \in [\ell]$. Sei

- $t_i \in V(T')$ mit $x_i \in \beta'(t_i)$ und
- $U_i := V(t_i T' s)$.

Definiere eine Baumzerlegung (T, β) von H durch:

- $T := T'$,
- $\beta(t) := \Big(\beta'(t) \cap V(H)\Big) \cup \Big\{x_i \;\Big|\; t \in U_i\Big\}$ für alle $t \in V(T)$.

Behauptung 4. (T, β) ist eine Baumzerlegung von H, die gut für $\mathcal{B}$ ist.

Aus Behauptung 4 folgt sofort Behauptung 3.

Beweis von Behauptung 4.

(1) (T, β) ist Baumzerlegung von H:

(T1): Sei $v \in V(H)$.

Fall 1: $v \in V(A)$.
Dann ist $\beta^{-1}(v) = (\beta')^{-1}(v)$ zusammenhängend.

Fall 2: $v \in X$, etwa $v = x_i$.
Dann ist $\beta^{-1}(v) = (\beta')^{-1}(x_i) \cup U_i$ zusammenhängend, da $t_i \in (\beta')^{-1}(x_i)$ und $t_i \in U_i$.

(T2): Sei $e = vw \in E(H)$. Wähle $t \in V(T)$ mit $e \subseteq \beta'(t)$. Dann ist $e \subseteq \beta(t)$.

(2) (T, β) ist gut für $\mathcal{B}$:
Sei $t \in V(T)$ mit $\beta(t) > k+1$. Es ist zu zeigen, dass $\beta(t)$ den Bramble $\mathcal{B}$ nicht überdeckt.

(a) Es gilt: $|\beta'(t)| \geq |\beta(t)| > k+1$. Denn falls $x_i \in \beta(t) \setminus \beta'(t)$, so ist $t \in U_i$ und damit $\beta'(t) \cap V(P_i) \neq \emptyset$

(b) Da $|\beta(t)| > |X|$, ist $\beta(t) \cap V(A) \neq \emptyset$. Damit ist auch $\beta'(t) \cap V(A) \neq \emptyset$, weil $\beta'(t) \cap V(A) = \beta(t) \cap V(A)$.

Aus (a) folgt, dass $\beta'(t)$ den Bramble $\mathcal{B}'$ nicht überdeckt. Gemäß (b) existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $\beta'(t) \cap B = \emptyset$.
Angenommen, $\beta(t) \cap B \neq \emptyset$. Dann existiert ein $i \in [\ell]$ mit $x_i \in \beta(t) \cap B$. Wähle so ein i. Da $x_i \in \beta(t) \setminus \beta'(t)$ folgt, dass $t \in U_i$. Es gilt:

- $B \cap \beta'(t_i) \supseteq \{x_i\} \neq \emptyset$,
- $B \cap \beta'(s) = B \cap Y \neq \emptyset$ (weil Y Bramble $\mathcal{B}$ überdeckt), und
- $(\beta')^{-1}(B)$ ist zusammenhängend.

Daraus folgt, dass $t \in (\beta')^{-1}(B)$, und das *widerspricht* $\beta'(t) \cap B = \emptyset$.
Somit ist $\beta(t) \cap B = \emptyset$ und $\beta(t)$ überdeckt den Bramble $\mathcal{B}$ nicht. □

(3.43) Beispiel (Gitter). Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\mathrm{tw}(G_{m\times n}) = \min\{m, n\}.$$

„≤“: Beispiel (3.29).

„≥“: OBdA sei $m \leq n$. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathrm{tw}(G_{m\times n}) &\geq \mathrm{tw}(G_{m\times m})\\ &= \mathrm{bd}(G_{m\times m}) - 1\\ &\geq m && \text{(gemäß Beipiel (3.40)).}\end{aligned}$$

3.4 Räuber und Gendarmen

(3.44) Definition. Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}_0$. Das *Räuber und Gendarmen Spiel auf G mit k Gendarmen*, RG(G, k), wird von zwei *Spielern* GE und R gespielt. Eine *Position* des Spiels ist ein Paar (X, r), wobei $X \subseteq V$ mit $|X| \leq k$ und $r \in V$. Eine *Partie* ist eine Folge von Positionen. Zu *Beginn* einer Partie wählt R ein $r \in V$. Die *Anfangsposition* ist $(\emptyset, r)$. In jeder *Runde* einer Partie überführen die Spieler die aktuelle Position (X, r) wie folgt in eine neue Position (X', r'):

- GE wählt $X' \subseteq V$ mit $|X'| \leq k$
- R wählt $r' \in V$ so, dass es einen Weg von r nach r' im Graphen $G - (X \cap X')$ gibt.

Eine Partie ist *beendet*, wenn eine Position (X, r) mit $r \in X$ erreicht wird. Dann gewinnt GE die Partie. Wenn die Partie nie beendet wird, gewinnt R.

Strategien und *Gewinnstrategien* für GE bzw. R sind wie üblich definiert. Die *Gendarmenzahl* eines Graphen G ist

$$\mathrm{gz}(G) := \min \left\{k \;\middle|\; \text{GE hat Gewinnstrategie im Spiel } \mathrm{RG}(G, k)\right\} \cup \left\{0\right\}.$$

(3.45) Beispiel (Bäume). Sei T ein Baum mit $\|T\| \leq 1$. Dann ist

$$\mathrm{gz}(T) = 2.$$

(3.46) Beispiel (Kreise). Sei C ein Kreis. Dann ist

$$\mathrm{gz}(C) = 3.$$

(3.47) Beispiel (vollständige Graphen). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\mathrm{gz}(K_n) = n.$$

(3.48) Beispiel (Gitter). Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 1$ gilt:

$$n \leq \mathrm{gz}(G_{n \times n}) \leq n + 1.$$

(3.49) Satz. *Für alle Graphen G gilt:*

$$\mathrm{gz}(G) = \mathrm{bd}(G).$$

Beweis. *„≥“:* Wir zeigen $\mathrm{gz}(G) \geq \mathrm{bd}(G)$.

Sei $\mathcal{B}$ ein Bramble der Dicke $k + 1$. Im Spiel $\mathrm{RG}(G, k)$ hat R eine Gewinnstrategie: Der Räuber spielt so, dass für jede Position (X, r) gilt: $r \in B$ für ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \cap X = \emptyset$. Sei (X, r) eine Position mit $r \in B$ für ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \cap X = \emptyset$. Sei X' der Zug von GE in der darauffolgenden Runde. Da $X' < d(\mathcal{B})$, überdeckt X' den Bramble $\mathcal{B}$ nicht, und somit existiert ein $B' \in \mathcal{B}$ mit $B' \cap X' = \emptyset$. Wähle so ein B'. Dann ist $G[B \cup B']$ zusammenhängend und $(X \cap X') \cap (B \cup B') = \emptyset$. Somit existiert ein Weg von $r \in B$ nach $r' \in B'$ in $G \setminus (X \cap X')$, und R kann nach r' ziehen.

„≤“: Wir zeigen $\mathrm{gz}(G) \leq \mathrm{tw}(G) + 1$.

Sei (T, β) eine Baumzerlegung von G der Weite k. Dann hat GE im Spiel $\mathrm{RG}(G, k + 1)$ eine Gewinnstrategie:

Wir wählen eine beliebige Wurzel $w \in V(T)$. Sei $\trianglelefteq$ die zugehörige partielle Ordnung auf $V(T)$. Für $t \in V(T)$ sei

$$V_t := \bigcup_{\substack{u \in V(t):\\ t \trianglelefteq u}} \beta(u).$$

Dann ist $V_w = V$.

- In der ersten Runde wählt GE $\beta(w)$.
- Dann spielt GE so, dass alle Positionen die Gestalt $(\beta(t), r)$ für ein $r \in V_t$ haben.
- In jeder Runde zieht GE dabei auf ein Kind des „aktuellen Knotens". □

(3.50) Monotone Gewinnstrategien für GE**.**
Wir beschreiben Positionen in der Form (X, R), wobei R die Eckenmenge einer Komponente von $G - X$ ist. Eine Strategie für GE ist *monoton*, wenn für alle Partien $(X_0, R_0), (X_1, R_1), \ldots$, in denen GE gemäß dieser Strategie spielt, gilt: $R_{i+1} \subseteq R_i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.

(3.51) Korollar. *Seien G ein Graph und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann hat GE genau dann eine Gewinnstrategie im Spiel* RG(G, k)*, wenn er eine monotone Gewinnstrategie hat.*

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass die im Beweis von Satzes (3.49) aus einer Baumzerlegung der Weite $k - 1$ konstruierte Gewinnstrategie für GE im Spiel RG(G, k) monoton ist. Also ist die „monotone Gendarmenzahl" kleiner gleich der Baumweite plus 1, also der Brambledicke. Andereseits ist die „monotone Gendarmenzahl" größer gleich der Gendarmenzahl. Damit folgt die Behauptung des Korollars aus dem Satz. □

3.5 Balancierte Separatoren und Verbundenheit

(3.52) Definition. Sei G ein Graph und $X \subseteq V(G)$.

(1) Ein *balancierter X-Separator* ist eine Menge $S \subseteq V(G)$, so dass für jede Komponente A von $G - S$ gilt:

$$|V(A) \cap X| \leq \frac{|X|}{2}.$$

(2) X ist *verbunden*, wenn für alle $Y_1, Y_2 \subseteq X$ mit $|Y_1| = |Y_2| =: \ell$ paarweise disjunkte Y_1-Y_2-Wege $P_1, \dots, P_\ell$ existieren.

(3.53) Beispiel. Im Gitter $G_{k\times k}$ ist $X = \{(1,1), (2,2), \dots, (k,k)\}$ verbunden.

(3.54) Definition. Sei G ein Graph.

(1) Die *Separatorweite* von G ist die Zahl

$$\mathrm{sw}(G) := \min\Big\{k \;\Big|\; \text{für alle } X \subseteq V(G) \text{ ex. ein balancierter } X\text{-Separator der Größe } k\Big\}.$$

(2) Die *Verbundenheit* von G ist die Zahl

$$\mathrm{vh}(G) := \max\Big\{k \;\Big|\; \text{es ex. eine verbundene Menge } X \subseteq V(G) \text{ mit } |X| = k\Big\}.$$

(3.55) Satz. *Für alle Graphen G gilt:*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{sw}(G) & \leq & \mathrm{bd}(G) & \leq & \mathrm{vh}(G) & \leq & 3\,\mathrm{sw}(G). \\ & & \shortparallel & & & & \\ & & \mathrm{gz}(G) & & & & \\ & & \shortparallel & & & & \\ & & \mathrm{tw}(G)+1 & & & & \end{array}$$

(3.56) Lemma. *Sei G ein Graph und $\mathcal{B}$ ein Bramble von G. Wenn X eine Überdeckung von $\mathcal{B}$ mit $|X| = d(\mathcal{B})$ ist, dann ist X verbunden.*

Beweis. Seien $Y_1, Y_2 \subseteq X$ mit $|Y_1| = |Y_2| =: \ell$.

Fall 1: $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$.
Sei $Z := X - (Y_1 \cup Y_2)$.
Angenommen, es existiert ein $S \subseteq V(G)$ mit $|S| \leq \ell - 1$, das Y_1 von Y_2 trennt. Für $i = 1,2$ ist $|Y_i \cup Z \cup S| < |X|$. Somit überdeckt $Y_i \cup Z \cup S$ den Bramble $\mathcal{B}$ nicht, und es existiert ein $B_i \in \mathcal{B}$ mit $B_i \cap (Y_i \cup Z \cup S) = \emptyset$. Wähle so ein B_i. Dann ist $B_i \cap Y_{3-i} \neq \emptyset$, weil X den Bramble $\mathcal{B}$ überdeckt. Der Graph $G[B_1 \cup B_2]$ ist zusammenhängend, $G[B_1 \cup B_2] \subseteq G - (S \cup Z)$, und $G[B_1 \cup B_2]$ schneidet Y_1 und Y_2. Somit existiert ein Y_1-Y_2-Weg in $G[B_1 \cup B_2] \subseteq G - (S \cup Z)$. Also ist S kein Y_1-Y_2-Trenner, ein *Widerspruch*.

Nach dem Satz von Menger existieren also ℓ paarweise disjunkte Y_1-Y_2-Wege.

Fall 2: $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$.
Sei $Z := Y_1 \cap Y_2$ und $Y_i' := Y_i \setminus X$ für $i = 1, 2$. Aus *Fall 1* folgt, dass $|Y_1'| = |Y_2'|$ viele paarweise disjunkte Wege von Y_1' nach Y_2' in $G - Z$ existieren. □

(3.57) Korollar. *Für alle Graphen G gilt:*

$$\mathrm{bd}(G) \leq \mathrm{vh}(G).$$

(3.58) Lemma. *Sei G ein Graph und $X \subseteq V(G)$ mit $|X| \geq 3k - 2$ verbunden. Dann gibt es keinen balancierten X-Separator der Ordnung $< k$.*

Beweis. *Angenommen*, S ist ein balancierter X-Separator mit $|S| < k$. Seien $A_1, \ldots, A_m$ die Komponenten von $G - S$. Seien $X_0 := X \cap S$ und $X_i := X \cap V(A_i)$ für $i \in [m]$. OBdA gelte $|X_1| \geq |X_2| \geq \cdots \geq |X_m|$. Wähle $j \in [m]$ minimal, so dass $\sum_{i=0}^{j} |X_i| \geq k$. Sei $Y_1 := \bigcup_{i=0}^{j} X_i$ und $Y_2 := X_0 \cup \bigcup_{i=j+1}^{m} X_i$. Dann gilt $|Y_1| \geq k$.

Behauptung. $|Y_2| \geq k$.

Beweis.

Fall 1: $j = 1$.
Weil $|X_1| \leq |X|/2$ gilt dann $|Y_2| = |X \setminus X_1| \geq \frac{|X|}{2} \geq k$.

Fall 2: $j > 1$.
Dann ist $|X_1| < k - |X_0|$, und da $|X_1| \geq |X_j|$, ist auch $|X_j| < k - |X_0|$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \left|Y_2\right| &= \left|X \setminus \bigcup_{i=1}^{j} X_i\right| \\ &= \left|X\right| - \underbrace{\sum_{i=1}^{j-1} \left|X_i\right|}_{<k} - \underbrace{\left|X_j\right|}_{<k} \\ &\geq \left|X\right| - (2k-2) \\ &\geq k \end{aligned}$$

⌟

Seien nun $Y_1' \subseteq Y_1$ und $Y_2' \subseteq Y_2$ mit $|Y_1'| = |Y_2'| = k$. Da X verbunden ist, existieren k disjunkte Y_1-Y_2-Wege. Somit ist S kein Y_1-Y_2-Trenner, ein *Widerspruch*. □

(3.59) Korollar. *Für alle Graphen G gilt:*

$$\mathrm{vh}(G) \leq 3\,\mathrm{sw}(G).$$

Beweis. Gemäß Lemma (3.58) gilt:

$$\mathrm{vh}(G) \geq 3k - 2 \Longrightarrow \mathrm{sw}(G) \geq k.$$

Somit gilt

$$\mathrm{sw}(G) = k - 1 \Longrightarrow \mathrm{vh}(G) \leq 3k - 3.$$

Weil dies für alle k gilt, folgt

$$\mathrm{sw}(G) = k \Longrightarrow \mathrm{vh}(G) \leq 3k. \qquad \square$$

(3.60) Lemma. *Sei G ein Graph mit* $\mathrm{sw}(G) \geq k$*. Dann ist* $\mathrm{bd}(G) \geq k$*.*

Beweis. Sei $X \subseteq V(G)$, so dass kein balancierter X-Separator der Ordnung $< k$ existiert. Für alle $S \subseteq V(G)$ mit $|S| < k$ existiert dann eine Komponente A_S von $G - S$ mit $|V(A_S) \cap X| > \frac{|X|}{2}$. Sei $\mathcal{B} := \{V(A_S) \mid S \subseteq V(G) \text{ mit } |S| < k\}$.

Behauptung. $\mathcal{B}$ ist ein Bramble mit $d(\mathcal{B}) \geq k$.

Beweis. Offensichtlich sind alle Elemente von $\mathcal{B}$ zusammenhängend. Sind $B, B' \in \mathcal{B}$, so gilt $|B \cap X| > \frac{|X|}{2}$ und $|B \cap X| > \frac{|X|}{2}$. Also gibt es ein $x \in X \cap B \cap B'$, und dmait berühren B und B' einander.

Angenommen, $d(\mathcal{B}) < k$. Sei $S \subseteq V(G)$ eine Überdeckung von $\mathcal{B}$ mit $|S| < k$. Dann gilt $S \cap V(A_S) \neq \emptyset$, ein *Widerspruch*. $\square$

(3.61) Korollar. *Für alle Graphen G gilt:*

$$\mathrm{sw}(G) \leq \mathrm{bd}(G).$$

3.6 Simpliziale Zerlegungen

(3.62) Definition. Seien G, G_1 und G_2 Graphen. G ist *simpliziale Summe* von G_1 und G_2 (wir schreiben $G = G_1 \oplus G_2$), wenn $G_1 \cup G_2 = G$ und $G_1 \cap G_2$ vollständig ist.

(3.63) Notation. Seien G, G_1 und G_2 Graphen. Ist $G_1 \cap G_2$ vollständig, so bezeichnet $G_1 \oplus G_2$ den Graphen $G_1 \cup G_2$, sonst ist $G_1 \oplus G_2$ undefiniert.

(3.64) Beobachtungen.

(1) $G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1$.

(2) $(G_1 \oplus G_2)[V(G_1)] = G_1$ (falls $G_1 \oplus G_2$ definiert ist).

Beweis. Es gilt $G_1 \subseteq (G_1 \cup G_2)[V(G_1)]$:
Angenommen, es existieren $v, w \in V(G_1)$, so dass $vw \in E(G_1 \oplus G_2)$, aber $vw \notin E(G_1)$. Dann ist $vw \in E(G_2)$ und damit sind $v, w \in V(G_1) \cap V(G_2)$. Da $V(G_1) \cap V(G_2)$ eine Clique in G_1 ist, ist $vw \in E(G_1)$, ein *Widerspruch*. □

(3) Wenn $K \subseteq G_1 \oplus G_2$ ein vollständiger Graph ist, dann ist $K \subseteq G_1$ oder $K \subseteq G_2$.

(4) Sind $(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3$ und $G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$ definiert, so $(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$.

(5) Seien $G = G_1 \oplus G_2$ und H ein induzierter Subgraph von G. Dann gilt
$H = (G_1 \cap H) \oplus (G_2 \cap H)$.

(3.65) Beispiel. $(G_1 \oplus G_2) \oplus G_3 = G$, aber $G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$ ist undefiniert.

(3.66) Lemma. *Sei $G = G_1 \oplus (G_2 \oplus G_3)$. Dann ist $G = (G_1 \oplus G_2) \oplus G_3$ oder $G = (G_1 \oplus G_3) \oplus G_2$.*

Beweis. Übung. □

(3.67) Definition. Sei G ein Graph und $\mathcal{F}$ eine Familie von Subgraphen von G. Dann ist G eine *simpliziale Summe* von $\mathcal{F}$ (wir schreiben: $G = \bigoplus \mathcal{F}$), wenn es eine Aufzählung $\mathcal{F} = \{G_1, \ldots, G_n\}$ von $\mathcal{F}$ gibt, so dass $G = (\ldots((G_1 \oplus G_2) \oplus G_3) \cdots \oplus G_n)$.

(3.68) Lemma. *Sei G ein Graph und $\mathcal{F}$ eine Familie von Subgraphen von G.*

$$G = \bigoplus \mathcal{F} \iff \begin{array}{l} \mathcal{F} = \{G\} \textit{ oder es existieren } G_1, G_2 \subseteq G \textit{ und } \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}, \\ \textit{so dass } G_1 = \bigoplus \mathcal{F}_1,\ G_2 = \bigoplus \mathcal{F}_2 \textit{ und } G = G_1 \oplus G_2 \textit{ und} \\ \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \emptyset \textit{ und } \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}. \end{array}$$

Beweis. „$\Longrightarrow$": Klar.

„$\Longleftarrow$": Induktion über $|\mathcal{F}_2| =: n_2$.

$n_2 = 1$: Klar.

$n_2 \to n_2 + 1$: Sei $\mathcal{F}_1 = \{G_1, \ldots, G_{n_1}\}$ und $\mathcal{F}_2 = \{G_{n_1+1}, \ldots, G_{n_1+n_2+1}\}$. Weiterhin sei

$$G = \underbrace{(\ldots(G_1 \oplus G_2)\ldots \oplus G_{n_1})}_{H_1} \oplus (\underbrace{(\ldots(G_{n_1+1} \oplus G_{n_1+2})\ldots \oplus G_{n_1+n_2})}_{H_2} \oplus \underbrace{G_{n_1+n_2+1}}_{H_3}).$$

Dann ist $G = H_1 \oplus (H_2 \oplus H_3)$.

Fall 1: $G = (H_1 \oplus H_2) \oplus H_3$.
Durch Anwenden der Induktionsannahme auf $H_1 \oplus H_2$, erhält man $H_1 \oplus H_2 = \bigoplus\{G_1, \ldots, G_{n_1+n_2}\}$. Daraus folgt, dass $G = \bigoplus \mathcal{F}$.

Fall 2: $G = (H_1 \oplus H_3) \oplus H_2$.
Dann ist $H_1 \oplus H_3 = \bigoplus\{G_1, \ldots, G_{n_1}, G_{n_1+n_2+1}\}$ und $H_2 = \bigoplus\{G_{n_1+1}, \ldots, G_{n_1+n_2}\}$. Aus der Induktionsannahme folgt, dass $G = \bigoplus \mathcal{F}$. □

(3.69) Definition. Eine Baumzerlegung (T, β) eines Graphen G ist *simplizial*, wenn für alle $tu \in E(T)$ die Menge $\beta(t) \cap \beta(u)$ eine Clique ist.

(3.70) Satz. *Sei G ein Graph.*

(1) Ist $G = \bigoplus \mathcal{F}$, so gibt es eine simpliziale Baumzerlegung (T, β) von G, so dass $\mathcal{F} = \left\{G[\beta(t)] \;\middle|\; t \in V(T)\right\}$.

(2) Ist (T, β) eine simpliziale Baumzerlegung von G, so gilt $G = \bigoplus \left\{G[\beta(t)] \;\middle|\; t \in V(T)\right\}$.

Beweis. (1) Induktion über $n := |\mathcal{F}|$.

$n = 1$: Klar.

$n \to n + 1$: Sei $\mathcal{F} = \{G_1, \ldots, G_{n+1}\}$ und $G = \underbrace{(\ldots((G_1 \oplus G_2) \oplus G_3)\ldots \oplus G_n)}_{H} \oplus G_{n+1}$.

Nach Induktionsannahme existiert eine simpliziale Baumzerlegung (T', β') von H mit $\left\{G_1, \ldots, G_n\right\} = \left\{G[\beta'(t)] \;\middle|\; t \in V(T')\right\}$. Da $K := H \cap G_{n+1}$ ein vollständiger Graph ist, existiert nach Lemma (3.18) ein $t_0 \in V(T')$, so dass $V(K) \subseteq \beta'(t_0)$. Sei $t' \notin V(T') \cup E(T')$ ein neuer Knoten. Dann ist (T, β) mit

$$T = \left(V(T') \cup \{t'\}, E(T') \cup \{t_0 t'\}\right)$$

und

$$\beta(t) = \begin{cases} V(G_{n+1}), & \text{falls } t = t' \\ \beta'(t), & \text{sonst} \end{cases}$$

eine simpliziale Baumzerlegung mit $\mathcal{F} = \left\{ G[\beta(t)] \,\middle|\, t \in V(T) \right\}$.

(2) Induktion über $|T| =: n$.

$n = 1$: Klar.

$n \to n + 1$: Da $|T| > 1$, ist $E(T) \neq \emptyset$. Sei $tu \in E(T)$ eine Kante in T. Seien T_t und T_u die beiden Komponenten von $T \setminus tu$ und $V_t := \beta(T_t)$, $V_u := \beta(T_u)$. Gemäß Lemma (3.15) ist $\beta(t) \cap \beta(u)$ ein Trenner von V_t und V_u. Dann ist $G[V_t] \cap G[V_u] = G[\beta(t) \cap \beta(u)]$. Da (T, β) simplizial ist, ist $G[\beta(t) \cap \beta(u)]$ eine Clique. Somit ist $G = G[V_t] \oplus G[V_u]$. Aus Lemma (3.68) und der Induktionsannahme folgt die Behauptung. □

(3.71) Lemma. *Sei (T, β) eine simpliziale Baumzerlegung von G. Dann existiert eine kleine simpliziale Baumzerlegung (T', β') von G, so dass für alle $t' \in V(T')$ ein $t \in V(T)$ mit $\beta(t') = \beta(t)$ existiert.*

Beweis. Übung. □

(3.72) Definition. Ein Graph G heißt *simplizial zerlegbar*, wenn Subgraphen $G_1, G_2 \subset G$ existieren, so dass $G = G_1 \oplus G_2$.

(3.73) Satz. *Für jeden Graphen G existiert eine eindeutige Familie $\mathcal{S}_G$ von Subgraphen mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $G = \bigoplus \mathcal{S}_G$.

(2) Kein $H \in \mathcal{S}_G$ ist simplizial zerlegbar.

(3) Für $H, H' \in \mathcal{S}_G$ mit $H \neq H'$ gilt $H \not\subset H'$.

Beweis. Existenz: Induktion.

IA: G ist nicht simplizial zerlegbar.
Setze $\mathcal{S}_G := \{G\}$.

IS: $G = G_1 \oplus G_2$, wobei $G_1, G_2 \subset G$.
Setze $\mathcal{S}'_G := \mathcal{S}_{G_1} \cup \mathcal{S}_{G_2}$. Dann ist $G = \bigoplus \mathcal{S}'_G$. Somit existiert eine simpliziale Baumzerlegung (T, β) von G mit $\mathcal{S}'_G = \{G[\beta(t)] \mid t \in V(T)\}$. Aus Lemma (3.71) folgt, dass eine kleine simpliziale Baumzerlegung (T', β') von G mit $\{G[\beta'(t)] \mid t \in V(T')\} \subseteq \{G[\beta(t)] \mid t \in V(T)\} = \mathcal{S}'_G$ existiert. Setze $\mathcal{S}_G := \{G[\beta'(t)] \mid t \in V(T')\}$.

Eindeutigkeit: Angenommen, $\mathcal{S}_G \neq \mathcal{S}'_G$ erfüllen (1) bis (3). Sei $H \in \mathcal{S}_G$. Da H nicht simplizial zerlegbar ist, gilt $H \subseteq H'$ für ein $H' \in \mathcal{S}'_G$. Umgekehrt ist jedes $H' \in \mathcal{S}'_G$ in einem $H'' \in \mathcal{S}_G$ enthalten. Aus Eigenschaft (3) folgt dann, dass $\mathcal{S}_G = \mathcal{S}'_G$, ein *Widerspruch*. □

3.7 Baumzerlegungen über Klassen von Graphen

(3.74) Definition. Sei (T, β) eine Baumzerlegung eines Graphen G.

(1) Sei $t \in V(T)$. Der *Torso* von (T, β) am Knoten t ist der Graph

$$\tau(t) := G\Big[\beta(t)\Big] \cup \bigcup_{u \in N^T(t)} K\Big[\beta(t) \cap \beta(u)\Big].$$

(2) Sei $\mathcal{A}$ eine Klasse von Graphen. (T, β) ist eine Baumzerlegung *über* $\mathcal{A}$, wenn für alle Knoten $t \in V(T)$ gilt: $\tau(t) \in \mathcal{A}$.

(3.75) Graphenklassen.
Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mathcal{A}$ eine Klasse von Graphen. Wir setzen:

$$\mathcal{K}_k := \{G \in \mathcal{G} \mid G \cong K_k\},$$
$$\mathcal{G}_k := \{G \in \mathcal{G} \mid |G| \leq k\},$$
$$\mathcal{T}_k := \{G \in \mathcal{G} \mid \mathrm{tw}(G) \leq k\},$$

und

$$\mathcal{T}(\mathcal{A}) := \{G \in \mathcal{G} \mid G \text{ besitzt Baumzerlegung über } \mathcal{A}\}.$$

(3.76) Beispiel. Jeder Kreis besitzt eine Baumzerlegung über $\mathcal{K}_3$.

(3.77) Beispiel. Jeder Baum besitzt eine Baumzerlegung über $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$.

(3.78) Beobachtung.

$$\mathcal{T}_k = \mathcal{T}(\mathcal{G}_{k+1}).$$

(3.79) Lemma. *Sei G ein Graph und (T, β) eine Baumzerlegung von G. Weiterhin sei $X \subseteq V(G)$ zusammenhängend. Dann ist $X \cap \beta(t)$ zusammenhängend in $\tau(t)$ für alle $t \in V(T)$.*

Beweis. Seien die Ecken $x, y \in X \cap \beta(t)$ und sei $P \subseteq G[X]$ ein Weg von x nach y, etwa $P = x_1, \ldots, x_n$ mit $x_1 = x$ und $x_n = y$. Wir zeigen induktiv für alle $i \in [n]$:

$$\text{Falls } x_i \in \beta(t) \text{, so existiert ein Weg von } x_1 \text{ nach } x_i \text{ in } \tau(t)[X \cap \beta(t)]. \tag{3.A}$$

$i = 1$: Trivial.

$i \to i + 1$: Falls $x_{i+1} \notin \beta(t)$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $x_{i+1} \in \beta(t)$. Weiterhin sei $j < i + 1$ maximal mit $x_j \in \beta(t)$. Falls $j = i$, so liegt die Kante $x_i x_{i+1}$ in $\beta(t)$. Gelte also $j < i$. Da die Menge $\{x_{j+1}, \ldots, x_i\}$ zusammenhängend in G ist, ist die Menge $\beta^{-1}(\{x_{j+1}, \ldots, x_i\})$ zusammenhängend in T. Außerdem ist t nicht in $\beta^{-1}(\{x_{j+1}, \ldots, x_i\})$ enthalten. Deshalb existiert eine Komponente U von $T \setminus t$ mit $\beta^{-1}(\{x_{j+1}, \ldots, x_i\}) \subseteq V(U)$. Wähle so ein U. Es existieren $u_1, u_2 \in V(U)$ mit $x_j x_{j+1} \in \beta(u_1)$ und $x_i x_{i+1} \in \beta(u_2)$. Sei nun $u \in N^T(t)$ der Nachbar von t in U. Für $k = 1, 2$ gilt: $u \in V(tTu_k)$. Somit liegen x_j und x_{i+1} in $\beta(t) \cap \beta(u)$ und die Kante $x_j x_{i+1}$ ist in $E(\tau(t))$ enthalten. Da nach Induktionsannahme ein Weg $P' \subseteq \tau(t)[X \cap \beta(t)]$ von x_1 nach x_j existiert, gibt es also auch einen Weg $P'' \subseteq \tau(t)[X \cap \beta(t)]$ von x_1 nach x_{i+1}. □

(3.80) Korollar. *Sei $\mathcal{A}$ eine Klasse von Graphen. Wenn $\mathcal{A}$ ein Minorenideal ist, so ist auch $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ ein Minorenideal.*

Beweis. Seien $G \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$ und $H \preceq G$. Es ist zu zeigen, dass $H \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$. Sei $\left((A_v)_{v \in V(H)}, (P_e)_{e \in E(H)}\right)$ ein Abbild von H in G mit $\|P_e\| = 1$ für alle $e \in E(H)$. Sei (T, β) eine Baumzerlegung von G über $\mathcal{A}$. Für alle $t \in V(T)$ sei $\beta'(t) := \{v \in V(H) \mid V(A_v) \cap \beta(t) \neq \emptyset\}$. Nach Lemma (3.19) ist (T, β') eine Baumzerlegung von H. Es bleibt zu zeigen, dass (T, β') eine Baumzerlegung über $\mathcal{A}$ ist. Das folgt aus der unten stehenden Behauptung.

Für alle $t \in V(T)$ bezeichne $\tau'(t)$ den Torso der Baumzerlegung (T, β') am Knoten t.

Behauptung. Für alle $t \in V(T)$ gilt $\tau'(t) \preceq \tau(t)$.

Beweis. Sei $t \in V(T)$. Es gilt $V(\tau'(t)) = \beta'(t)$. Für jeden Knoten $v \in \beta'(t) \subseteq V(H)$ sei $A'_v := V(A_v) \cap \beta(t)$. Gemäß Lemma (3.79) ist A'_v zusammenhängend in $\tau(t)$. Mit $\beta'(t) = \{v_1, \dots, v_n\}$ gilt dann:

$$\tau'(t) = \Big(\tau(t)\Big[\bigcup_{v \in V(H)} V(A'_v)\Big]\Big)/A'_{v_1}/A'_{v_2}/\dots/A'_{v_n}.$$

□

(3.81) Definition. Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Graphen. Ein Graph G ist *kantenmaximal* in $\mathcal{C}$, wenn $G \in \mathcal{C}$ und für alle $G' \supset G$ mit $V(G') = V(G)$ gilt: $G' \notin \mathcal{C}$.

(3.82) Lemma. *Sei der Graph G kantenmaximal in $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. Dann besitzt G eine simpliziale Baumzerlegung (T, β) mit $G[\beta(t)] = \tau(t) \in \mathcal{A}$ für alle $t \in V(T)$. Außerdem ist $\mathcal{S}_G \subseteq \mathcal{A}$, falls $\mathcal{A}$ ein Minorenideal ist.*

(Ohne Beweis.)

(3.83) Definition. Seien G, G_1 und G_2 Graphen.

(1) G ist *subsimpliziale Summe* von G_1, G_2 (wir schreiben: $G \sqsubseteq G_1 \oplus G_2$), wenn ein $G' \supseteq G$ existiert, so dass

- $G' = G_1 \oplus G_2$,
- $V(G') = V(G)$ und
- $E(G') \setminus E(G) \subseteq \binom{V(G_1) \cap V(G_2)}{2}$.

(2) Entsprechend definieren wir, dass G eine *subsimpliziale Summe* einer Familie $\mathcal{F}$ von Graphen ist (wir schreiben: $G \sqsubseteq \bigoplus \mathcal{F}$).

(3.84) Satz. *Sei G ein Graph und $\mathcal{A}$ eine Klasse von Graphen. Dann gilt:*

$$G \in \mathcal{T}(A) \iff G \sqsubseteq \bigoplus \mathcal{F} \text{ mit } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}.$$

(Ohne Beweis.)