

Kapitel 2

Planare Graphen

2.1 Topologische Voraussetzungen

Wir verwenden in diesem und in einigen späteren Kapiteln eine Reihe von topologischen Begriffen und Resultaten, die insbesondere zweidimensionale Flächen betreffen. Tiefere Kenntnisse aus dem Gebiet der Topologie werden jedoch an keiner Stelle vorausgesetzt, und ein intuitives Verständnis von Konzepten wie „Kurve“ und „Fläche“ ist völlig ausreichend.

Topologische Räume bezeichnen wir mit **fetten** Buchstaben. \mathbf{R}^n bezeichnet den n -dimensionalen euklidischen Raum. Weiterhin bezeichnet \mathbf{I} das Einheitsintervall $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, \mathbf{S}^n die n -Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, und \mathbf{B}^n den n -Ball $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$, jeweils ausgestattet mit der üblichen Topologie. \mathbf{R}^2 bezeichnen wir als die *Ebene*. Statt „2-Sphäre“ sagen wir einfach *Sphäre*. Die „1-Sphäre“ \mathbf{S}^1 bezeichnen wir auch als *Einheitskreis*. Höherdimensionale Sphären kommen in dieser Vorlesung nicht vor. Wir unterscheiden in unserer Notation nicht zwischen einem topologischen Raum und der ihm zu Grunde liegenden Menge. Teilmengen eines gegebenen Raumes stellen wir grundsätzlich mit der Unterraumtopologie aus.

Im folgenden sei \mathbf{X} ein topologischer Raum; in diesem Kapitel interessieren uns nur die Ebene $\mathbf{X} = \mathbf{R}^2$ und die Sphäre $\mathbf{X} = \mathbf{S}^2$. Der *Rand* einer Menge $M \subseteq \mathbf{X}$ in \mathbf{X} ist die Menge $\mathbf{bd}_{\mathbf{X}}(M)$ aller Punkte $x \in \mathbf{X}$, so dass in jeder Umgebung von x mindestens ein Punkt aus M und ein Punkt aus $\mathbf{X} \setminus M$ liegt. Der *Abschluss* von M in \mathbf{X} ist $\mathbf{cl}_{\mathbf{X}}(M) := M \cup \mathbf{bd}_{\mathbf{X}}(M)$, und das *Innere* ist $\mathbf{int}_{\mathbf{X}}(M) := M \setminus \mathbf{bd}_{\mathbf{X}}(M)$. Geht der umgebende Raum \mathbf{X} aus dem Kontext hervor, so lassen wir den Index \mathbf{X} in der Regel

weg.

Ein *Homöomorphismus* ist eine bijektive stetige Abbildung, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Zwei Unterräume heißen *homöomorph*, wenn sie durch einen Homöomorphismus ineinander überführt werden können.

Eine (*einfache*) *Kurve* ist ein Unterraum $h \subseteq X$ (also eine Teilmenge versehen mit der Unterraumtopologie), der homöomorph zum geschlossenen Einheitsintervall I ist. Sei $h: I \rightarrow h$ ein Homöomorphismus vom geschlossenen Einheitsintervall I auf die Kurve h . Die Punkte $h(0)$ und $h(1)$ bezeichnen wir als *Endpunkte* von h und alle anderen Punkte als *innere Punkte*. Die Menge aller inneren Punkte von h bezeichnen wir mit $\overset{\circ}{h}$. Wir bezeichnen h auch als *Kurve von $h(0)$ nach $h(1)$* . Zwei Kurven h_1, h_2 in X sind *kreuzungsfrei*, wenn $\overset{\circ}{h}_1 \cap h_2 = \emptyset$ und $h_1 \cap \overset{\circ}{h}_2 = \emptyset$. Eine *geschlossene Kurve* ist ein Unterraum $g \subseteq X$, der homöomorph zum Einheitskreis S^1 ist. Eine (*geschlossene*) *Kreisschreibe* ist ein Unterraum $D \subseteq X$, der homöomorph zu B^2 ist. Eine *offene Kreisschreibe* ist ein Unterraum $O \subseteq X$, der homöomorph ist zu R^2 .

Ein Raum X ist *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ eine Kurve $g \subseteq X$ von x nach y gibt. Die maximalen wegzusammenhängenden Teilmengen von X bezeichnen wir als die *Komponenten* von X .

(2.1) Jordanscher Kurvensatz. Sei $g \subseteq S^2$ eine geschlossene Kurve. Dann hat $S^2 \setminus g$ genau zwei Komponenten f_1, f_2 , so dass für $i = 1, 2$ gilt: $bd(f_i) = g$, und $cl(f_i)$ ist eine Kreisscheibe.

(2.2) Satz von Jordan und Schönflies. Seien $g_1, g_2 \subseteq S^2$ geschlossene Kurven. Dann lässt sich jeder Homöomorphismus $\varphi: g_1 \rightarrow g_2$ zu einem Homöomorphismus $\Phi: S^2 \rightarrow S^2$ fortsetzen.

Zusätzlich kann man vom Homöomorphismus Φ noch verlangen, dass er eine vorgegebene Komponente f_1 von $S^2 \setminus g_1$ auf eine vorgegebene Komponente f_2 von $S^2 \setminus g_2$ abbildet, dass also $\Phi(f_1) = f_2$.

Elementare Beweise der beiden Sätze findet man in Mohar and Thomassen [2001].

2.2 Ebene Graphen

(2.3) Definition. Ein *ebener Graph* G ist ein Paar (V, E) , bestehend aus einer endlichen Menge $V \subseteq S^2$, deren Elemente wir als die *Ecken* von G bezeichnen, und einer endlichen Menge E von Kurven in S^2 , deren Elemente wir als die *Kanten* von G bezeichnen, so dass gilt:

- (i) Für alle Kanten $e \in E$ sind beide Endpunkte, aber kein innerer Punkt von e in V enthalten.
- (ii) Die Kanten in E sind paarweise kreuzungsfrei.
- (iii) Für je zwei Ecken $v, w \in V$ gibt es höchstens eine Kante in E mit Endpunkten v und w .

Formal ist also ein „ebener Graph“ kein Graph, denn die Kanten eines Graphen sind zweielementige Teilmengen der Eckenmenge. Allerdings definiert jeder ebene Graph (V, E) auf natürliche Weise einen Graphen G mit $V(G) := V$ und $E(G) := \{e \cap V \mid e \in E\}$, den wir als den zu (V, E) *gehörigen abstrakten Graphen* bezeichnen. In unserer Notation unterscheiden wir allerdings nicht zwischen einem ebenen Graphen und dem zugehörigen abstrakten Graphen. Insbesondere bezeichnen wir ebene Graphen auch mit G und ihre Ecken- und Kantenmenge mit $V(G)$ bzw. $E(G)$. Wenn wir graphentheoretische Begriffe wie Zusammenhang auf einen ebenen Graphen anwenden, so beziehen sie sich stets auf den zugehörigen abstrakten Graphen. Subgraphen von ebenen Graphen fassen wir allerdings wieder als ebene Graphen auf. Ist G ein ebener Graph, so bezeichnen wir mit \mathcal{G} die Menge $V(G) \cup \bigcup_{e \in E(G)} e$ bzw. den auf dieser Menge induzierten Unterraum von S^2 .

(2.4) Definition. Sei G ein ebener Graph. Die *Gebiete* von G sind die Komponenten von $S^2 \setminus \mathcal{G}$. Die Menge aller Gebiete von G bezeichnen wir mit $F(G)$.

(2.5) Bemerkung. Es mag wundersam erscheinen, dass wir als „ebenen Graphen“ einen Graphen bezeichnen, der in die Sphäre und nicht in die Ebene eingebettet ist. Es lässt sich jedoch leicht einsehen, dass jeder ebene Graph sich auch in die Ebene einbetten lässt: Wir wählen einfach eine stereographische Projektion der Sphäre auf die Ebene von einem Punkt aus, der nicht zum Graphen gehört. Umgekehrt sieht man auf diese Weise auch, dass sich jeder in die Ebene eingebettete Graph auch in die Sphäre

einbetten lässt.

Es ist wesentlich bequemer, mit Einbettungen in die Sphäre zu arbeiten, weil es für solche Einbettungen kein spezielles *Außengebiet* gibt, das bei Einbettungen in die Ebene immer als Sonderfall betrachtet werden muss.

Das folgende Lemma sammelt einige Eigenschaften von Gebieten und Gebietsrändern in ebenen Graphen. Beweise dieses Lemmas und der folgenden Resultate findet man in Diestel [2006] und Mohar and Thomassen [2001].

(2.6) Lemma. *Sei G ein ebener Graph und $f \in F(G)$*

(1) *Für alle Kanten $e \in E(G)$ gilt entweder $e \subseteq \mathbf{bd}(f)$ oder $e \cap \mathbf{bd}(f) = \emptyset$.*

Ist $e \subseteq \mathbf{bd}(f)$, so sagen wir, dass e auf dem Rand von f liegt.

(2) *Jede Kante liegt auf dem Rand von höchstens zwei Gebieten von G . Jede Kante, die in einem Kreis von G enthalten ist, liegt auf dem Rand von genau zwei Gebieten von G .*

Insbesondere bedeutet dies, dass jede Kante auf dem Rand von genau zwei Gebieten liegt, falls G 2-zusammenhängend ist.

(3) *Es gibt einen Subgraphen $H \subseteq G$, so dass $\mathbf{bd}(f) = H$. Wir nennen H den Randsubgraphen von f und bezeichnen ihn mit $Bd(f)$. Ist der Graph $Bd(f)$ ein Kreis, so nennen wir ihn auch den Randkreis von f .*

(4) *Ist G zusammenhängend, so ist f eine offene Kreisscheibe.*

(5) *Ist G 2-zusammenhängend, so ist $cl(f)$ eine Kreisscheibe und $Bd(f)$ ein Kreis.*

Für 3-zusammenhängende Graphen kann man die Gebietsränder genau charakterisieren. Wir nennen einen Kreis C in einem Graphen G *sehnenfrei*, wenn C ein induzierter Subgraph von G ist. Wir nennen C *nicht-trennend*, wenn $V(C)$ kein Trenner von G ist.

(2.7) Lemma. *Sei G ein 3-zusammenhängender ebener Graph. Dann gilt für alle $H \subseteq G$:*

$$H = Bd(f) \text{ für ein } f \in F(G) \iff H \text{ ist ein sehnenfreier und nicht-trennender Kreis von } G.$$

(2.8) Definition. Eine *Einbettung* eines Graphen G in die Sphäre ist ein Isomorphismus von G auf einen ebenen Graphen G' . Genauer ist eine Einbettung eine Abbildung $\Pi : V(G) \rightarrow V(G')$, die ein Isomorphismus von G auf den zu G' gehörigen abstrakten Graphen ist.

Ein Graph G ist *planar*, wenn er eine Einbettung in die Sphäre besitzt. Die Klasse aller planaren Graphen bezeichnen wir mit \mathcal{P} .

Ist Π eine Einbettung von G in die Sphäre, die G auf den ebenen Graphen G' abbildet, so bezeichnen wir G' auch mit $\Pi(G)$. Wir setzen Π auf $E(G)$ fort: Für $e = vw \in E(G)$ sei $\Pi(e) \in E(G')$ die Kante mit Endpunkten $\Pi(v), \Pi(w)$. Die *Gebiete* von Π sind die Gebiete von G' ; die Menge aller Gebiete von Π bezeichnen wir mit $F(\Pi)$.

(2.9) Definition. (1) Zwei ebene Graphen G_1, G_2 sind *homöomorph* (wir schreiben: $G_1 \simeq G_2$), wenn es einen Homöomorphismus $f : S^2 \rightarrow S^2$ gibt, so dass $f(V(G_1)) = V(G_2)$ und $f(G_1) = G_2$.

(2) Zwei Einbettungen Π_1, Π_2 eines Graphen G in die Sphäre sind *homöomorph* (wir schreiben: $\Pi_1 \simeq \Pi_2$), wenn es einen Homöomorphismus $f : S^2 \rightarrow S^2$ gibt, so dass $f \circ \Pi_1 = \Pi_2$, d.h., $f(\Pi_1(v)) = \Pi_2(v)$ für alle $v \in V(G)$ und $f(\Pi_1(e)) = \Pi_2(e)$ für alle $e \in E(G)$.

Aus Lemma (2.7) lässt sich mit Hilfe des Satzes von Jordan und Schönflies folgender Satz beweisen:

(2.10) Satz von Whitney. *Alle Einbettungen eines 3-zusammenhängenden planaren Graphen in die Sphäre sind homöomorph.*

Gelegentlich wollen wir Graphen in eine spezielle Region der Sphäre einbetten. Dazu ist folgendes Lemma nützlich, dass sich mit Hilfe des Satzes von Jordan und Schönflies beweisen lässt.

(2.11) Lemma. *Sei G ein planarer Graph und $D \subseteq S^2$ eine Kreisscheibe.*

(1) *Es gibt eine Einbettung Π von G in S^2 , so dass $\Pi(G) \subseteq \text{int}(D)$.*

(2) *Für alle $v \in V(G)$ und $x \in \text{bd}(D)$ gibt es eine Einbettung Π von G in S^2 , so dass $\Pi(G) \subseteq D$ und $\Pi(G) \cap \text{bd}(D) = \{x\}$ und $\Pi(v) = x$.*

(3) Für alle $e \in E(G)$ und alle Kurven $g \subseteq \text{bd}(D)$ gibt es eine Einbettung Π von G in S^2 , so dass $\Pi(G) \subseteq D$ und $\Pi(G) \cap \text{bd}(D) = g$ und $\Pi(e) = g$.



Abbildung 2.1. Kantenkontraktion in einem ebenen Graphen

Kontrahiert man in einem ebenen Graphen eine Kante, so lässt sich der entstehende Graph wieder als ebener Graph auffassen, vgl. dazu Abbildung (2.1). Daraus ergibt sich das folgende Lemma:

(2.12) Lemma. *Minoren von planaren Graphen sind planar, d.h., die Klasse aller planaren Graphen ist ein Minorenideal.*

Ein weiteres grundlegendes Ergebnis über ebene Graphen ist die Eulerformel, die die Anzahl von Ecken, Kanten und Gebieten in einem ebenen Graphen zueinander in Beziehung setzt.

(2.13) Eulersche Polyederformel. *Für jeden zusammenhängenden ebenen Graphen gilt*

$$|G| - \|G\| + |F(G)| = 2.$$

2.3 Der Satz von Kuratowski

(2.14) Satz von Kuratowski [1930]. *Ein Graph G ist genau dann planar, wenn $K_5 \not\leq_T G$ und $K_{3,3} \not\leq_T G$, d.h.*

$$\mathcal{P} = \mathcal{X}_T(\{K_5, K_{3,3}\})$$

(2.15) Satz (Wagner [1937]). *Ein Graph G ist genau dann planar, wenn $K_5 \not\leq G$ und $K_{3,3} \not\leq G$, d.h.*

$$\mathcal{P} = \mathcal{X}(\{K_5, K_{3,3}\})$$

Wir zeigen zunächst, dass die beiden Charakterisierungen der Klasse der planaren Graphen aus dem Satz von Kuratowski und Satz (2.15) äquivalent sind.

(2.16) Lemma. Für alle Graphen G gilt:

$$K_5 \leq G \implies (K_5 \leq_T G \text{ oder } K_{3,3} \leq_T G).$$

Beweis. Sei G ein Graph mit $K_5 \leq G$ und $K_5 \not\leq_T G$. Dann gibt es in G eine Konfiguration wie in Abbildung (2.2) (denn sonst wäre $K_5 \leq_T G$). Das bedeutet aber, dass $K_{3,3} \leq_T G$. \square

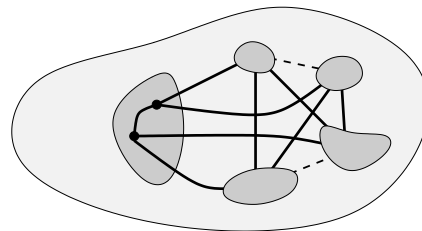


Abbildung 2.2. Abbild von K_5 , das einen topologischen $K_{3,3}$ -Minor erzwingt

Weil $\Delta(K_{3,3}) = 3$, folgt aus Lemma (1.25), dass für alle Graphen G gilt:

$$K_{3,3} \leq_T G \iff K_{3,3} \leq G. \quad (2.A)$$

Insgesamt ergibt sich damit:

(2.17) Korollar.

$$\mathcal{X}(\{K_5, K_{3,3}\}) = \mathcal{X}_T(\{K_5, K_{3,3}\}).$$

Das bedeutet, dass der Satz von Kuratowski und Satz (2.15) äquivalent sind. Die „einfache Richtung“ der Sätze ergibt sich aus dem folgenden Lemma und Lemma (2.12).

(2.18) Lemma. Weder K_5 noch $K_{3,3}$ sind planar.

Beweis. Angenommen, Π ist eine Einbettung von K_5 in die Sphäre. Nach der Eulerformel gilt

$$|F(\Pi)| = 10 - 5 + 2 = 7$$

Da K_5 2-zusammenhängend ist, ist nach Lemma (2.6)(2) jede Kante im Rand von genau zwei Gebieten enthalten. Außerdem ist nach Lemma (2.6)(5) jeder Gebietsrand ein Kreis und enthält damit mindestens 3 Kanten. Für $i \geq 3$ sei f_i die Zahl der Gebiete $f \in F(\Pi)$ mit $\|Bd(f)\| = i$. Dann gilt

$$20 = 2 \cdot \|G\| = \sum_{i \geq 3} i \cdot f_i \geq 3 \sum_{i \geq 3} f_i = 3 \cdot |F(\Pi)| = 21,$$

ein *Widerspruch*.

Als nächstes *nehmen wir an*, Π sei eine Einbettung von $K_{3,3}$ in die Sphäre. Nach der Eulerformel gilt

$$|F(\Pi)| = 9 - 6 + 2 = 5.$$

Alle Kreise in $K_{3,3}$ haben Länge mindestens 4. Definieren wir f_i wie oben, so erhalten wir

$$18 = 2 \cdot |E(G)| = \sum_{i \geq 4} i \cdot f_i \geq 4 \cdot |F(\Pi)| = 20,$$

einen *Widerspruch*. □

Wenden wir uns der „schwierigen Richtung“ des Satzes von Kuratowski zu, also der Aussage, dass jeder Graph in $\mathcal{X}_T(\{K_5, K_{3,3}\})$ bzw. $\mathcal{X}(\{K_5, K_{3,3}\})$ planar ist. Mit Hilfe der folgenden beiden Lemmata reduzieren wir diese Aussage zunächst auf 3-zusammenhängende Graphen.

(2.19) Lemma. *Seien G, H Graphen mit $|G \cap H| \leq 1$. Dann ist $G \cup H$ genau dann planar, wenn G und H planar sind.*

Beweis. „ \implies “: Trivial.

„ \impliedby “: Seien G und H planar. Wir betrachten nur den Fall $|G \cap H| = 1$, der Fall $G \cap H = \emptyset$ kann ähnlich behandelt werden. Es gelte $|G \cap H| = 1$ und $V(G) \cap V(H) = \{v\}$. Sei g eine geschlossene Kurve in S^2 , und seien $D_1, D_2 \subseteq S^2$ die beiden Kreisscheiben mit $bd(D_1) = bd(D_2) = g$. Sei $x \in g$ beliebig. Sei Π_1 eine Einbettung von G in die Sphäre, so das $\Pi_1(G) \subseteq D_1$ und $\Pi_1(G) \cap bd(D_1) = \{x\}$ und $\Pi_1(v) = x$. Eine solche Einbettung existiert nach Lemma (2.11)(2). Sei weiter Π_2 eine Einbettung von H in die Sphäre, so das $\Pi_2(H) \subseteq D_2$ und $\Pi_2(H) \cap bd(D_2) = \{x\}$ und $\Pi_2(v) = x$. Dann ist die Abbildung Π , die auf G mit Π_1 und auf H mit Π_2 übereinstimmt, eine Einbettung von $G \cup H$ in die Sphäre. □

(2.20) Lemma. Seien G, H zusammenhängende Graphen mit $|G \cap H| = 2$, und sei $\{v, w\} := V(G) \cap V(H)$. Dann ist $G \cup H$ genau dann planar, wenn die Graphen $(V(G), E(G) \cup \{vw\})$ und $(V(H), E(H) \cup \{vw\})$ planar sind.

Beweis. „ \implies “: Folgt aus der Tatsache, dass es sowohl in G als auch in H einen Weg von v nach w gibt, denn damit gilt

$$(V(G), E(G) \cup \{vw\}) \leq_T G \cup H \quad \text{und} \quad (V(H), E(H) \cup \{vw\}) \leq_T G \cup H.$$

„ \impliedby “: Ähnlich wie im Beweis von Lemma (6.5) und unter Verwendung von Lemma (2.11)(3) finden wir eine Einbettung Π von $(V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{vw\}) \supseteq G \cup H$ in die Sphäre. Damit ist $G \cup H$ planar. □

(2.21) Lemma. Sei G ein 3-zusammenhängender Graph mit $|G| \geq 5$. Dann gibt es eine Kante $e \in E(G)$, so dass G/e 3-zusammenhängend ist.

Beweis. Angenommen, das Lemma ist falsch. Sei G ein 3-zusammenhängender Graph, so dass für kein $e \in E(G)$ der Graph G/e 3-zusammenhängend ist.

Behauptung 1. Für alle $e = uv \in E(G)$ existiert ein $w \in V(G)$, so dass $\{u, v, w\}$ ein Trenner von G ist.

Beweis. Sei $e = uv \in E(G)$. Dann ist G/e nicht 3-zusammenhängend und besitzt einen Trenner $\{w_1, w_2\}$. Eine der Ecken w_1, w_2 , sagen wir w_1 , muss durch das Zusammenziehen von e neu entstanden sein, denn $\{w_1, w_2\}$ kann kein Trenner von G sein. Also ist $\{u, v, w_2\}$ ein Trenner von G . ┘

Behauptung 2. Für jeden Trenner $\{u, v, w\}$ von G hat jede der Ecken u, v, w in jeder Komponente von $G \setminus \{u, v, w\}$ mindestens einen Nachbarn.

Beweis. Sonst wäre G nicht 3-zusammenhängend. ┘

Wählen wir nun eine Kante $e = uv \in E(G)$, gemäß Beh. 1 eine Ecke w , so dass $\{u, v, w\}$ den Graphen G trennt, und eine Komponente H von $G - \{u, v, w\}$ so, dass $|H|$ minimal ist (unter allen möglichen Wahlen von e, w, H). Sei x ein Nachbar von w in H (existiert wegen Beh. 2). Sei $y \in V(G)$, so dass $\{w, x, y\}$ den Graphen G trennt (existiert wegen Beh. 1).

Sei J eine Komponente von $G \setminus \{w, x, y\}$ mit $V(J) \cap \{u, v\} = \emptyset$. Eine solche Komponente gibt es, weil $uv \in E(G)$ und damit u und v zur selben Komponente von $G \setminus \{w, x, y\}$ gehören, es aber insgesamt mindestens zwei Komponenten gibt. Sei z ein Nachbar von x in J (existiert wegen Beh. 2).

Behauptung 3. $J \subset H$.

Beweis. Es gilt $z \in V(H)$, denn $z \in N^G(x) \subseteq V(H) \cup \{u, v, w\}$ und $V(J) \cap \{w, x, y, u, v\} = \emptyset$.

Angenommen, $J \not\subset H$. Dann existiert ein Weg $P \subseteq J$ von z zu einem $z' \in V(J) \setminus V(H)$. Weil H eine Komponente von $G - \{u, v, w\}$ ist, gilt $V(P) \cap \{u, v, w\} \neq \emptyset$. Andererseits gilt $V(J) \cap \{u, v, w\} = \emptyset$. Das ist ein Widerspruch.

Also gilt $J \subseteq H$. Außerdem gilt $x \in V(H) \setminus V(J)$, also $J \subset H$. ┘

Die Behauptung widerspricht aber der Minimalität von H , denn w, x, y, J erfüllen auch die Bedingungen, die wir an e, w, H gestellt hatten. □

Beweis von Satz (2.15): „ \implies “: Folgt aus Lemma (2.18) und Lemma (2.12).

„ \impliedby “: Wir müssen zeigen, dass jeder Graph G mit $K_5 \not\subseteq G$ und $K_{3,3} \not\subseteq G$ planar ist.

Angenommen, die Behauptung ist falsch. Sei G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung. Wegen Lemma (6.5) und Lemma (6.7) ist G 3-zusammenhängend. Da K_4 planar ist, ist $|G| \geq 5$.

Sei $e = vw \in E(G)$, so dass G/e 3-zusammenhängend ist; eine solche Kante existiert nach Lemma (2.21). Sei $v_e \in V(G/e)$ die Ecke, die durch Zusammenziehen der Kante e entstanden ist, und sei $H := (G/e) - v_e = G - \{v, w\}$. Da $|G/e| < |G|$, ist G/e planar. O.B.d.A. nehmen wir an, dass G/e ein ebener Graph ist. Dann ist auch $H \subseteq G/e$ ein ebener Graph. H ist 2-zusammenhängend, also sind alle Randsubgraphen von H Kreise. Sei $f \in F(H)$ das Gebiet mit $v_e \in f$, und sei $C := Bd(f)$. Dann gilt $N^G(v) \setminus \{w\} \subseteq V(C)$ und $N^G(w) \setminus \{v\} \subseteq V(C)$. Weil G 3-zusammenhängend ist, gilt $d^G(v) \geq 3$ und $d^G(w) \geq 3$ und damit $|N^G(v) \cap V(C)| \geq 2$ und $|N^G(w) \cap V(C)| \geq 2$.

Die Einbettung von H in die Sphäre induziert eine Einbettung von $G - w$ in die Sphäre, bei der v und das Innere aller Kanten von v zu seinen Nachbarn in $V(C)$ in das Gebiet f eingebettet werden (vgl. Abb. (2.3)(a)). Weil G nicht planar ist, ist diese Einbettung nicht auf G erweiterbar.

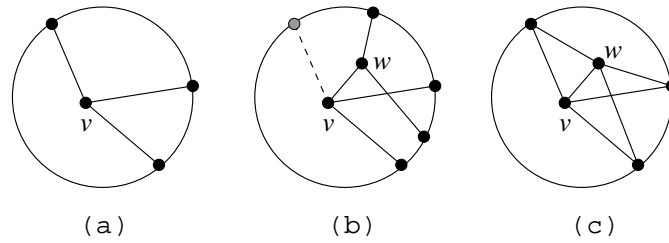


Abbildung 2.3.

Fall 1: Es gibt Nachbarn $v', v'' \in N^G(v) \cap V(C)$ und Nachbarn $w', w'' \in N^G(w) \cap V(C)$, so dass w' und w'' in verschiedenen Komponenten von $C - \{v', v''\}$ liegen (vgl. Abb. 2.3(b)).

Dann gilt $K_{3,3} \leq G$.

Fall 2: Es gibt Nachbarn $v', v'', v''' \in N^G(v) \cap V(C)$, so dass $v', v'', v''' \in N^G(w)$ (vgl. Abb. 2.3(c)).

Dann gilt $K_5 \leq G$.

Fall 3: Weder Fall 1 noch Fall 2 treten ein.

Seien v_1, \dots, v_m die Nachbarn von v in $V(C)$, angeordnet im Uhrzeigersinn auf C . Dann gilt $m \geq 2$. Sei $v_{m+1} := v_1$. Für alle $i \in [m]$ sei Q_i das Segment von C von v_i nach v_{i+1} im Uhrzeigersinn. Wenn es ein $i \in [m]$ gibt, so dass $N^G(w) \cap V(C) \subseteq V(Q_i)$, so lässt sich die Einbettung von $G - w$ auf G erweitern, und damit ist G planar. Das ist ein *Widerspruch*. Also gilt für alle $i \in [m]$:

$$N^G(w) \cap V(C) \not\subseteq V(Q_i). \quad (2.B)$$

Nehmen wir nun an, dass es ein $i \in [m]$ gibt mit $N^G(w) \cap V(\overset{\circ}{Q}_i) \neq \emptyset$. Sei $i \in [m]$ und $w' \in N^G(w) \cap V(\overset{\circ}{Q}_i)$. Weiterhin sei $w'' \in (N^G(w) \cap V(C)) \setminus V(Q_i)$. Dann sind wir in Fall 1 mit $v' := v_i, v'' := v_{i+1}$. Also gilt $N^G(w) \cap V(\overset{\circ}{Q}_i) = \emptyset$ für alle $i \in [m]$ und damit

$$N^G(w) \cap V(C) \subseteq \{v_1, \dots, v_m\}. \quad (2.C)$$

Ferner gilt $|N^G(w) \cap \{v_1, \dots, v_m\}| \leq 2$, denn sonst wären wir in Fall 2. Also gilt wegen $|N^G(w) \cap V(C)| \geq 2$

$$|N^G(w) \cap \{v_1, \dots, v_m\}| = 2. \quad (2.D)$$

Seien $i, j \in [m]$ mit $i < j$ und $N^G(w) \cap V(C) = \{v_i, v_j\}$. Wegen (2.B) gilt dann $j \neq i + 1$ und $(i, j) \neq (1, m)$. Dann sind wir in Fall 1 mit $v' := v_{i+1}$, $v'' := v_{j+1}$, $w' := v_i$, und $w'' := v_j$. Das ist ein *Widerspruch*. \square

2.4 Außerplanare Graphen

(2.22) Definition. Ein Graph G ist *außerplanar*, wenn er eine Einbettung Π in die Sphäre besitzt, so dass ein $f \in F(\Pi)$ mit $\Pi(V) \subseteq \text{bd}(f)$ existiert.

Die Klasse aller außerplanaren Graphen bezeichnen wir mit \mathcal{AP} .

Außerplanare Graphen sind also planare Graphen, die sich so in die Sphäre einbetten lassen, dass alle Ecken auf dem Rand eines Gebietes liegen (vgl. Abb. 2.4).

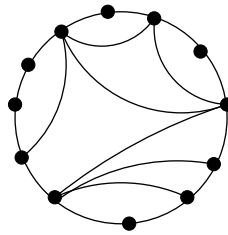


Abbildung 2.4. Ein außerplanarer Graph

Für einen Graphen G und eine „neue Ecke“ $x \notin V(G) \cup E(G)$ bezeichne $G \cdot x$ den Graphen

$$(V(G) \cup \{x\}, E(G) \cup \{vx \mid v \in V(G)\}).$$

(2.23) Lemma. Sei G ein Graph und $x \notin V(G) \cup E(G)$. Dann ist G genau dann außerplanar, wenn $G \cdot x$ planar ist.

Beweis. „ \implies “: Sei Π eine „außerplanare“ Einbettung von G in die Sphäre und $f \in F(\Pi)$ mit $V(G) \subseteq \text{bd}(f)$. Wir erweitern Π auf $G \cdot x$, indem wir x und das Innere der Kanten xv in das Gebiet f einbetten.

„ \impliedby “: Sei Π eine Einbettung von $G \cdot x$ in die Sphäre und Π' die Einschränkung von Π auf G . Dann liegen alle Ecken von G auf dem Π' -Rand des Gebietes, das $\Pi(x)$

enthält.

□

(2.24) Korollar. *Es gilt*

$$\mathcal{AP} = \mathcal{X}(\{K_4, K_{2,3}\}) = \mathcal{X}_T(\{K_4, K_{2,3}\}).$$