# Kapitel 1

# Einführung

## 1.1 Minoren

**(1.1) Definition.** Sei $G$ ein Graph. Für jeden zusammenhängenden Subgraphen $A \subseteq G$ sei
$$G/A := \Big(V(G-A) \cup \{a\}, E(G-A) \cup \Big\{va \;\Big|\; v \in N^G(A)\Big\}\Big),$$
wobei $a \notin V(G) \cup E(G)$ eine „neue Ecke" ist. Wir bezeichnen $G/A$ als den aus $G$ durch *Kontraktion von $A$* entstehenden Graphen.

Wir verwenden den „Kontraktionsoperator" $/$ linksassoziativ, d.h., $G/A_1/A_2$ steht für $(G/A_1)/A_2$.

**(1.2) Beobachtung.** Seien $G$ ein Graph und $A_1, A_2 \subseteq G$ disjunkte zusammenhängende Subgraphen. Dann gilt
$$G/A_1/A_2 = G/A_2/A_1.$$

**(1.3) Definition.** Sei $G$ ein Graph.

(1) Für einen Subgraphen $H$ mit Komponenten $A_1, \ldots, A_m$ sei
$$G/H := G/A_1/\cdots/A_m.$$
Wegen Beobachtung (1.2) ist $G/H$ wohldefiniert.

(2) Für eine Kantenmenge $F \subseteq E(G)$ sei $G/F := G/G(F)$.

(3) Für eine Kante $e \in E(G)$ sei $G/e := G/\{e\}$.

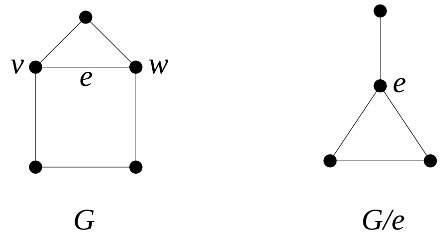


**Abbildung 1.1.** Kontraktion einer Kante $e$

**(1.4) Definition.** Ein Graph $H$ ist ein *Minor* eines Graphen $G$ (geschrieben: $H \preceq G$), wenn es einen Subgraphen $G' \subseteq G$ und eine Kantenmenge $F \subseteq E(G')$ gibt, so dass $H \cong G'/F$.

**(1.5) Lemma.** *Für alle Graphen G und H sind folgende Aussagen äquivalent:*

*(1)* $H \preceq G$.

*(2) Es gibt eine Folge* $G_1, \dots, G_n$ *von Graphen, so dass gilt:*

- $G_1 \subseteq G$, $G_n \cong H$,
- *für alle* $i \in [n-1]$ *gibt es ein* $e \in E^{G_i}$, *so dass* $G_{i+1} = G_i/e$.

*(3) Es gibt eine Folge* $G_1, \dots, G_n$ *von Graphen, so dass gilt:*

- $G_1 = G$, $G_n \cong H$,
- *für alle* $i \in [n-1]$ *gibt es*
  - *entweder ein* $e \in E(G_i)$, *so dass* $G_{i+1} = G_i/e$,
  - *oder ein* $e \in E(G_i)$, *so dass* $G_{i+1} = G_i \setminus e$,
  - *oder ein* $v \in V(G_i)$, *so dass* $G_{i+1} = G_i - v$.

*(4) Es gibt Familien* $(A_v)_{v \in V(H)}$ *und* $(P_e)_{e \in E(H)}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

- *Für alle* $v \in V(H)$ *ist* $A_v$ *ist ein zusammenhängender Subgraph von* $G$, *und die Graphen* $A_v$, *für* $v \in V(H)$, *sind paarweise disjunkt.*

- *Für alle $e = vw \in E(H)$ ist $P_e$ ein $V(A_v)$-$V(A_w)$-Weg in $G$. Weiterhin sind die Wege $P_e$, für $e \in E(H)$, paarweise kreuzungsfrei, und für $e \in E(H)$ und $v \in V(H)$ ist keine innere Ecke von $P_e$ in $V(A_v)$ enthalten.*

*Wir bezeichnen* $\big((A_v)_{v\in V(H)}, (P_e)_{e\in E(H)}\big)$ *als ein* Abbild *von $H$ in $G$.*

(5) *Es gibt ein Abbild* $\big((A_v)_{v\in V(H)}, (P_e)_{e\in E(H)}\big)$ *von $H$ in $G$, so dass:*

- *Für alle $v \in V(H)$ ist $A_v$ ein Baum mit höchstens $d^H(v)$ Blättern.*
- *Für alle $e = vw \in E(H)$ ist $\lg(P_e) = 1$, d.h., $P_e$ besteht aus einer einzelnen Kante von einer Ecke in $V(A_v)$ zu einer Ecke in $V(A_w)$.*

*Beweis.* Übung. □

**(1.6) Lemma.** *Sei $G$ ein zusammenhängender Graph und $H \preceq G$. Dann gibt es ein Abbild* $\big((A_v)_{v\in V(H)}, (P_e)_{e\in E(H)}\big)$ *von $H$ in $G$, so dass*

$$V(G) = \bigcup_{v\in V(H)} V(A_v).$$

*Beweis.* Übung. □

**(1.7) Lemma.** *Die Minorenrelation $\preceq$ ist eine partielle Ordnung auf der Klasse aller Graphen modulo Isomorphie, das heißt, $\preceq$ ist reflexiv, transitiv, und für alle Graphen $G, H$ gilt:*

$$\big(H \preceq G \text{ und } G \preceq H\big) \iff H \cong G.$$

*Beweis.* Übung. □

**(1.8) Definition.** Sei $H$ ein Graph.

(1) Ein Graph $G$ is *$H$-frei*, wenn $H \npreceq G$.

(2) Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen ist *$H$-frei*, oder $H$ ist *ein verbotener Minor* für $\mathcal{C}$, wenn $H \npreceq G$ für alle $G \in \mathcal{C}$.

(3) Eine Klasse $\mathcal{C}$ von Graphen *hat verbotene Minoren*, wenn es einen Graphen $H$ gibt, so dass $H$ ein verbotener Minor für $\mathcal{C}$ ist.

**(1.9) Beispiel.** Ein Graph ist genau dann $K_3$-frei, wenn er ein Wald ist.

*Beweis.* „$\Longrightarrow$": Es gilt $K_3 \preceq C$ für alle Kreise $C$ und damit $K_3 \preceq G$ für alle Graphen $G$, die einen Kreis enthalten. Also ist jeder $K_3$-freie Graph auch kreisfrei, das heißt, ein Wald.

„$\Longleftarrow$": Sei $G$ ein Wald.

*Angenommen*, $K_3 \preceq G$. Sei $\big((A_i)_{i\in[3]}, (P_{ij})_{1\le i<j\le 3}\big)$ ein Abbild von $K_3$ in $G$. Für alle $i, j \in [3]$ mit $i \neq j$ sei $v_{ij}$ die Endecke des Weges $P_{ij}$ in $V(A_i)$. Weil für $i \in [3]$ der Graph $A_i$ zusammenhängend ist, gibt es einen Weg $Q_i \subseteq A_i$ von $v_{ij}$ nach $v_{ik}$, wobei $j, k \in [3] \setminus \{i\}$ mit $j \neq k$. Die Wege $Q_1, Q_2, Q_3, P_{12}, P_{23}, P_{13}$ sind paarweise kreuzungsfrei. Also ist

$$Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup P_{12} \cup P_{23} \cup P_{13}$$

ein Kreis in $G$, ein *Widerspruch*. □

**(1.10) Lemma.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Klasse von Graphen mit verbotenen Minoren. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $K_n$ ein verbotener Minor für $\mathcal{C}$ ist.*

*Beweis.* Sei $H$ ein verbotener Minor für $\mathcal{C}$ und $n := |H|$. Dann ist $H$ isomorph zu einem Subgraphen von $K_n$, also gilt $H \preceq K_n$. Wäre aber jetzt $K_n \preceq G$ für ein $G \in \mathcal{C}$, so auch $H \preceq G$, was unmöglich ist, weil $H$ ein verbotener Minor für $\mathcal{C}$ ist. □

**(1.11) Graphenklassen.**
Seien $G, H$ Graphen und $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Klassen von Graphen. Wir setzen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(G) &:= \{H \in \mathcal{G} \mid H \preceq G\}, \\ \mathcal{M}(\mathcal{C}) &:= \bigcup_{G\in\mathcal{C}} \mathcal{M}(G), \\ \mathcal{X}(H) &:= \{G \in \mathcal{G} \mid H \npreceq G\}, \\ \mathcal{X}(\mathcal{D}) &:= \bigcap_{H\in\mathcal{D}} \mathcal{X}(H). \end{aligned}$$

**(1.12) Definition.** Ein Klasse $\mathcal{I}$ von Graphen ist ein *Minorenideal*, wenn $\mathcal{I} = \mathcal{M}(\mathcal{I})$.

Ein Minorenideal $\mathcal{I}$ ist *nichttrivial*, wenn $\mathcal{I} \neq \mathcal{G}$.

Ein Minorenideal ist also eine Klasse $\mathcal{I}$ von Graphen, die unter Minorenbildung abgeschlossen ist, das heißt, für alle $G \in \mathcal{I}$ und alle $H \preceq G$ gilt $H \in \mathcal{I}$. Ein Minorenideal ist genau dann nichttrivial, wenn es verbotene Minoren hat.

**(1.13) Lemma.** *(1) Für alle Klassen $\mathcal{C}$ von Graphen ist $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ ein Minorenideal.*

*(2) Für alle Klassen $\mathcal{D}$ von Graphen ist $\mathcal{X}(\mathcal{D})$ ein Minorenideal.*

*(3) Für alle Minorenideale $\mathcal{I}$ existiert eine Klasse $\mathcal{D}$ von Graphen, so dass $\mathcal{I} = \mathcal{X}(\mathcal{D})$.*

*Beweis.* (1) und (2) sind trivial, und für (3) setzen wir $\mathcal{D} := \mathcal{G} \setminus \mathcal{I}$. □

**(1.14) Beispiel.** Die Klasse aller Wälder $\mathcal{W} = \mathcal{X}(K_3)$ ist ein Minorenideal.

**(1.15) Minorensatz Robertson and Seymour [2004b].** *Für alle Minorenideale $\mathcal{I}$ existiert eine endliche Klasse $\mathcal{F}$ von Graphen, so dass $\mathcal{I} = \mathcal{X}(\mathcal{F})$.*

## 1.2 Durchschnittsgrad, Färbungszahl, und Minoren

**(1.16) Satz.** *Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle Graphen $G$ gilt*

$$d(G) \geq 2^{k-2} \implies K_k \preceq G.$$

*Beweis.* Induktion über $k$.

$k \leq 1$*:* Trivial.

$k - 1 \to k$ *(für $k \geq 2$):* Sei $G$ ein Graph mit $d(G) \geq 2^{k-2}$. OBdA sei $G$ zusammenhängend, sonst betrachten wir die Komponente mit maximalem Durchschnittsgrad.
Wir wählen ein bezgl. $\subseteq$ maximales $A \subseteq G$, so dass $A$ zusammenhängend ist und $d(G/A) \geq 2^{k-2}$.

- So ein $A$ existiert, weil jeder Subgraph $A' \subseteq G$ mit $|A'| = 1$ zusammenhängend ist und die Bedingung $d(G/A') = d(G) \geq 2^{k-2}$ erfüllt.
- Es gilt $A \neq G$, weil $|G/G| = 1$ und damit $d(G/G) = 0 < 2^{k-2}$.
- Es gilt $N^G(A) \neq \emptyset$, weil $G$ zusammenhängend ist.
- Aus $2^{k-2} \leq d(G/A) = 2\frac{\|G/A\|}{|G/A|}$ folgt

$$\frac{\|G/A\|}{2^{k-3}} \geq |G/A|. \tag{1.A}$$

Sei $H := G[N(A)]$.

*Behauptung 1.* Für alle $v \in V(H)$ gilt $d^H(v) \geq 2^{k-3}$.

*Beweis.* Sei $v \in V(H)$. *Angenommen*, $d^H(v) < 2^{k-3}$. Sei

$$A' := G\Big[V(A) \cup \{v\}\Big] \supset A.$$

Weil $A$ zusammenhängend ist und $v \in N^G(A)$ ist $A'$ zusammenhängend. Es folgt:

- $|G/A'| = |G/A| - 1$,
- $\|G/A'\| = \|G/A\| - d^H(v) - 1 \geq \|G/A\| - 2^{k-3}$.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} d(G/A') &= \frac{2\|G/A'\|}{|G/A'|} \\ &\geq \frac{2\left(\|G/A\| - 2^{k-3}\right)}{|G/A| - 1} \\ &= \frac{2^{k-2}\left(\frac{\|G/A\|}{2^{k-3}} - 1\right)}{|G/A| - 1} \\ &\geq \frac{2^{k-2}\left(|G/A| - 1\right)}{|G/A| - 1} && \text{(wegen (1.A))} \\ &= 2^{k-2}. \end{aligned}$$

Das *widerspricht* der Maximalität von $A$. ⌟

Also gilt $d(H) \geq \delta(H) \geq 2^{k-3}$ und damit nach Induktionsannahme

$$K_{k-1} \preceq H.$$

Weil $V(H) \subseteq N^G(A)$ folgt daraus $K_k \preceq G$. □

**(1.17) Bemerkung.** Tatsächlich gibt es sogar eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle Graphen $G$ gilt:

$$d(G) \geq c \cdot k \cdot \sqrt{\log k} \quad \Longrightarrow \quad K_k \preceq G$$

Kostochka [1984]. ⌟

**(1.18) Definition.** Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $G$ ein Graph. Eine *k-Färbung* von $G$ ist eine Abbildung $f : V(G) \to [k]$, so dass für alle $vw \in E(G)$ gilt: $f(v) \neq f(w)$. Wenn $G$ eine $k$-Färbung besitzt, bezeichnen wir $G$ als *k-färbbar*.

Die *chromatische Zahl* von $G$ ist $\chi(G) := \min\{k \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$. ⌟

**(1.19) Lemma.** *Seien $k \in \mathbb{N}_0$ und $G$ ein Graph. Ist $d(H) < k$ für alle $H \preceq G$, so $\chi(G) \leq k$.*

*Beweis.* Induktion über $n := |G|$.

*$n \leq 1$:* Trivial.

*$n \to n+1$ (für $n \geq 1$):* Es gelte $d(H) < k$ für alle $H \preceq G$. Insbesondere $d(G) < k$, also existiert ein $v \in V(G)$ mit $d(v) < k$. Wähle so ein $v$. Sei $H := G - v$.
Nach Induktionsannahme ist $H$ $k$-färbbar. Sei $f : V(H) \to [k]$ eine $k$-Färbung von $H$. Da $d(v) < k$, gibt es ein $i \in [k]$, so dass $f(w) \neq i$ für alle $w \in N(v)$. Definiere $g : V(G) \to [k]$ durch

$$g(w) := \begin{cases} i & \text{falls } w = v, \\ f(w) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $g$ eine $k$-Färbung von $G$. □

**(1.20) Korollar (Wagner [1964]).** *Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Graphen $G$ gilt:*

$$\chi(G) > 2^{k-2} \quad \Longrightarrow \quad K_k \preceq G.$$

Eines der wichtigsten offenen Probleme der Graphentheorie ist folgende Vermutung:

**(1.21) Hadwigers Vermutung.** *Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle Graphen $G$ gilt:*

$$\chi(G) \geq k \quad \Longrightarrow \quad K_k \preceq G.$$

Die Vermutung ist nur für $k \leq 6$ bewiesen.

## 1.3 Topologische Minoren

**(1.22) Definition.** Seien $G$ und $H$ Graphen.

(1) $G$ ist eine *Unterteilung* von $H$, wenn $G$ aus $H$ entsteht, indem man jede Kante $e = vw \in E(H)$ durch einen $v$-$w$-Weg $P_e$ ersetzt, so dass die Wege $P_e$, für $e \in E(H)$, paarweise kreuzungsfrei sind und keine Ecken von $H$ als innere Ecken enthalten.

(2) $H$ ist ein *topologischer Minor* von $G$ (geschrieben $H \preceq_T G$), wenn es einen Subgraphen $G' \subseteq G$ gibt, der isomorph zu einer Unterteilung von $H$ ist.

**(1.23) Lemma.** *Für alle Graphen $G$ und $H$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

*(1)* $H \preceq_T G$.

*(2) Es gibt eine Folge* $G_1, \dots, G_n$ *von Graphen, so dass gilt:*

- $G_1 \subseteq G$, $G_n \cong H$,
- *für alle* $i \in [n-1]$ *gibt es ein* $e = vw \in E^{G_i}$, *so dass* $d^{G_i}(w) = 2$ *und* $G_{i+1} = G_i/e$.

*(3) Es gibt eine Folge* $G_1, \dots, G_n$ *von Graphen, so dass gilt:*

- $G_1 = G$, $G_n \cong H$,
- *für alle* $i \in [n-1]$ *gibt es*
  - *entweder ein* $e = vw \in E(G_i)$, *so dass* $d^{G_i}(w) = 2$ *und* $G_{i+1} = G_i/e$,
  - *oder ein* $e \in E(G_i)$, *so dass* $G_{i+1} = G_i \setminus e$,
  - *oder ein* $v \in V(G_i)$, *so dass* $G_{i+1} = G_i - v$.

*(4) Es gibt ein Abbild* $\big((A_v)_{v\in V(H)}, (P_e)_{e\in E(H)}\big)$ *von* $H$ *in* $G$, *so dass* $|A_v| = 1$ *für alle* $v \in V(H)$.

*Beweis.* Übung. □

**(1.24) Korollar.** *Für alle Graphen* $G, H$ *gilt:*

$$H \subseteq G \implies H \preceq_T G \quad \textit{und} \quad H \preceq_T G \implies H \preceq G.$$

**(1.25) Lemma.** *Seien* $G, H$ *Graphen, so dass* $\Delta(H) \leq 3$. *Dann gilt:*

$$H \preceq_T G \iff H \preceq G.$$

*Beweis.* „$\Longrightarrow$“: Korollar (1.24).

„$\Longleftarrow$“: Es gelte $H \preceq G$. Sei $\big((A_v)_{v\in V(H)}, (P_e)_{e\in E(H)}\big)$ ein Abbild von $H$ in $G$, das die Bedingungen von Lemma (1.5)(5) erfüllt. Weiterhin sei $\big((A_v)_{v\in V(H)}, (P_e)_{e\in E(H)}\big)$ unter allen Abbildern, die die Bedingungen von Lemma (1.5)(5) erfüllen, so gewählt, dass $\sum_{v\in V(H)} |A_v|$ minimal ist. Sei $G' := \bigcup_{v\in V(H)} A_v \cup \bigcup_{e\in E(H)} P_e$ und $F = \bigcup_{v\in V(H)} E(A_v)$. Dann gilt

$$H \cong G'/F.$$

*Behauptung 1.* Für alle $v \in V(H)$ gilt:

(1) Falls $\deg^H(v) \leq 2$, so gilt $\deg^{G'}(v') \leq 2$ für alle $v' \in V(A_v)$.

(2) Falls $\deg^H(v) = 3$, so existiert genau ein $v' \in V(A_v)$ mit $\deg^{G'}(v') \geq 3$.

*Beweis.* Sei $v \in V(H)$.

*Fall 1:* $\deg^H(v) = 0$.
Dann besteht $A_v$ wegen der Minimalität von $\sum_{v \in V(H)} |A_v|$ aus genau einer Ecke $v'$, für die gilt: $\deg^{G'}(v') = 0$.

*Fall 2:* $\deg^H(v) = 1$.
Dann besteht $A_v$ aus genau einer Ecke $v'$, für die gilt: $\deg^{G'}(v') = 1$.

*Fall 3:* $\deg^H(v) = 2$.
Sei $N^H(v) =: \{w_1, w_2\}$. Für $j = 1, 2$, sei $v_j$ der Endpunkt von $P_{vw_j}$ in $A_v$. Dann ist $A_v$ ein Weg von $v_1$ nach $v_2$; möglicherweise hat dieser Weg die Länge 0, das heißt, es gilt $v_1 = v_2$. Für alle inneren Ecken $v'$ des Weges $A_v$ gilt $\deg^{G'}(v') = \deg^{A_v}(v') = 2$. Falls $v_1 \neq v_2$, so hat für $j = 1, 2$ die Ecke $v_j$ in $G'$ einen Nachbarn auf dem Weg $A_v$ und einen Nachbarn auf dem Weg $P_{vw_j}$. Also gilt $\deg^{G'}(v_j) = 2$. Falls $v_1 = v_2$, so hat die Ecke $v_j$ in $G'$ je einen Nachbarn auf dem Weg $P_{vw_j}$ für $j = 1, 2$. Wieder gilt $\deg^{G'}(v_j) = 2$.

*Fall 4:* $\deg^H(v) = 3$.
Sei $N^H(v) =: \{w_1, w_2, w_3\}$. Für $j = 1, 2, 3$, sei $v_j$ der Endpunkt von $P_{vw_j}$ in $A_v$. Falls $|\{v_1, v_2, v_3\}| \leq 2$, so ist $A_v$ wieder ein Weg mit Endpunkten in $\{v_1, v_2, v_3\}$. In diesem Fall argumentieren wir ähnlich wie in Fall 3. Falls $|\{v_1, v_2, v_3\}| = 3$, so ist $A_v$ ein Baum mit Blättern $v_1, v_2, v_3$. Es ist leicht zu sehen, dass ein Baum mit 3 Blättern genau eine Ecke vom Grad 3 hat (Übung). Sei $v^*$ diese Ecke. Dann gilt $\deg^{A_v}(v^*) = \deg^{G'}(v^*) = 3$ und $\deg^{A_v}(v') = \deg^{G'}(v') \leq 2$ für alle $v' \in V(A_v) \setminus \{v^*, v_1, v_2, v_3\}$. Für $j = 1, 2, 3$ hat die Ecke $v_j$ in $G'$ einen Nachbarn im Baum $A_v$ und einen Nachbarn auf dem Weg $P_{vw_j}$. Also gilt $\deg^{G'}(v_j) = 2$. ⌟

Aus der Behauptung folgt, dass ein zu $H$ isomorpher Graph aus $G' \subseteq G$ durch Zusammenziehen von Kanten, die eine Endecke vom Grad 2 besitzen, entsteht. Dann folgt $H \leq_T G$ aus Lemma (1.23). □

**(1.26) Beispiel.** Ein Graph $G$ ist genau dann ein Wald, wenn $K_3 \not\leq_T G$.

**(1.27) Lemma.** *Die topologische Minorenrelation $\preceq_T$ ist eine partielle Ordnung auf der Klasse aller Graphen modulo Isomorphie.*

*Beweis.* Übung. $\square$

**(1.28) Graphenklassen.**
Seien $G, H$ Graphen und $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Klassen von Graphen. Wir setzen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_T(G) &:= \{H \in \mathcal{G} \mid H \preceq_T G\}, \\
\mathcal{M}_T(\mathcal{C}) &:= \bigcup_{G \in \mathcal{C}} \mathcal{M}_T(G), \\
\mathcal{X}_T(H) &:= \{G \in \mathcal{G} \mid H \npreceq_T G\}, \\
\mathcal{X}_T(\mathcal{D}) &:= \bigcap_{H \in \mathcal{D}} \mathcal{X}_T(H).
\end{aligned}$$

Wie man leicht sieht, gilt nun das Analogon von Lemma (1.13).