Grundlagen

Notation

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}$ bezeichnen die Mengen der komplexen, reellen, rationalen, ganzen, nichtnegativen ganzen bzw. natürlichen Zahlen (also positive ganzen Zahlen). Für $m, n \in \mathbb{Z}$ sei $[m, n] := \{i \in \mathbb{Z} \mid m \leq i \leq n\}$ und $[n] := [1, n]$.

Tupel $(x_1, \ldots, x_k)$ bezeichnen wir häufig mit $\vec{x}$. Für ein Tupel $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ bezeichnet $\tilde{x}$ die Menge $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Ist f eine Abbildung, deren Definitionsbereich $\tilde{x}$ umfasst, so bezeichnet $f(\vec{x})$ das Tupel $\big(f(x_1) \ldots, f(x_k)\big)$. Für ein Element y setzen wir $\vec{x}y := (x_1, \ldots, x_k, y)$, und für ein Tupel $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_\ell)$ setzen wir $\vec{x}\vec{y} := (x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell)$. Die Länge eines Tupels $\vec{x}$ bezeichnen wir mit $|\vec{x}|$, das heißt, $|(x_1, \ldots, x_k)| = k$.

Mit $\leq_{\text{lex}}$ bezeichnen wir die lexikographische Ordnung auf Tupeln und Mengen ganzer Zahlen. Das heißt, für Tupel $\vec{m} = (m_1, \ldots, m_k), \vec{n} = (n_1, \ldots, n_\ell) \in \mathbb{Z}^k$ gelte $\vec{m} \leq_{\text{lex}} \vec{n}$, wenn entweder ein $i \leq \min\{k, \ell\}$ existiert, so dass $m_i < n_i$ und $m_j = n_j$ für $1 \leq j < i$, oder wenn $k \leq \ell$ und $m_i = n_i$ für alle $i \leq k$. Für Mengen $M, N \subseteq \mathbb{Z}$ gelte $M \leq_{\text{lex}} N$, wenn entweder $M = N$ oder wenn ein $i \in N \setminus M$ existiert, so dass für alle $j < i$ gilt: $j \in M \iff j \in N$.

Die Mächtigkeit einer Menge S bezeichnen wir durch $|S|$. Die Potenzmenge von S bezeichnen wir mit 2^S. Die Menge aller k-elementigen Teilmengen von S bezeichnen wir mit $\binom{S}{k}$, und die Menge aller höchstens k-elementigen Teilmengen mit $\binom{S}{\leq k}$. Wenn $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S ist, dann bezeichnet $s/_\sim$ die Äquivalenzklasse eines Elementes $s \in S$ und $S/_\sim$ die Menge aller Äquivalenzklassen.

Graphen

Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$, bestehend aus einer endlichen Menge V von *Ecken* und einer Menge $E \subseteq \binom{V}{2}$ von *Kanten*. Graphen sind also immer *endlich* und *einfach*, wobei letzteres bedeutet, dass Schleifen oder Mehrfachkanten in Graphen nicht erlaubt sind. Sofern wir nicht explizit von „gerichteten Graphen" sprechen, sind Graphen ungerichtet. Wenn nichts anderes vereinbart wird, bezeichnen wir die Eckenmenge eines Graphen G mit $V(G)$ und die Kantenmenge mit $E(G)$. Für eine Kante $e = \{u, v\} \in E(G)$ bezeichnen wir u, v als die *Endecken* der Kante, und wir bezeichnen u und v als *benachbart* oder *Nachbarn* in G. Alternativ bezeichnen wir u und v als *inzident* zu e, und wir bezeichnen u und v als *adjazent*. Statt mit $\{u, v\}$ bezeichnen wir Kanten von Graphen häufig kurz mit uv. Wir nehmen immer an, dass die Ecken- und die Kantenmenge eines Graphen disjunkt sind.

Die *Ordnung* eines Graphen G ist die Zahl $|G| := |V(G)|$ der Ecken von G, weiterhin setzen wir $\|G\| := |E(G)|$.

Im Folgenden seien G, H Graphen. H ist ein *Subgraph* von G (geschrieben $H \subseteq G$), wenn $V(H) \subseteq V(G)$ und $E(H) \subseteq E(G)$. Weiterhin ist H ein *induzierter Subgraph* von G, wenn $H \subseteq G$ und $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Für eine Menge $W \subseteq V(G)$ bezeichnet $G[W]$ den induzierten Subgraphen von G mit Eckenmenge W, also $G[W] := \left(W, E(G) \cap \binom{W}{2}\right)$. Für eine beliebige Menge S sei $G - S := G[V(G) \setminus S]$. Außerdem sei $G - H := G - V(H)$, und für eine Ecke $v \in V(G)$ sei $G - v := G - \{v\}$. Für eine Menge F sei $G \setminus F := \left(V(G), E(G) \setminus F\right)$, und für eine Kante $e \in E(G)$ sei $G \setminus e := G \setminus \{e\}$. Für eine beliebige Menge F von zweielementigen Mengen bezeichne $G(F)$ den Graphen $\left(\bigcup_{e \in F} e, F\right)$. Für alle $v, w \in V(G)$ mit $v \neq w$ sei $G + vw := \left(V(G), E(G) \cup \{vw\}\right)$.

Die *Vereinigung* von G und H ist der Graph $G \cup H := \left(V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H)\right)$, und der *Durchschnitt* von G und H ist der Graph $G \cap H := \left(V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H)\right)$. Den *leeren Graphen* $(\emptyset, \emptyset)$ bezeichnen wir kurz mit $\emptyset$. Gilt $G \cap H = \emptyset$, oder äquivalent $V(G) \cap V(H) = \emptyset$, so bezeichnen wir G und H als *disjunkt*. Gilt $E(G) \cap E(H) = \emptyset$, so bezeichnen wir G und H als *kantendisjunkt*.

Ein *Homomorphismus* von G nach H ist eine Abbildung $h : V(G) \to V(H)$, so dass für alle $v, w \in V(G)$ gilt: $e = vw \in E(G) \implies h(e) := h(v)h(w) \in E(H)$. Eine *Einbettung* von G in H ist ein injektiver Homomorphismus. Ein *Isomorphismus* von G nach H ist eine bijektive Abbildung $f : V(G) \to V(H)$, so dass für alle $v, w \in V(G)$ gilt: $vw \in E(G) \iff h(v)h(w) \in E(H)$. Die Graphen G und H sind *isomorph*, wenn es einen

Isomorphismus von G nach H gibt. Wir schreiben $f : G \cong H$, um auszudrücken, dass f ein Isomorphismus von G nach H ist, und $G \cong H$ um auszudrücken, dass G und H isomorph sind.

Die Menge aller Nachbarn einer Ecke v bezeichnen wir mit $N^G(v)$. Hier und an ähnlichen Stellen lassen wir den Index ^{G} weg, wenn der Bezugsgraph aus dem Kontext klar ist. Für eine Menge $W \subseteq V(G)$ setzen wir $N(W) := \bigcup_{w \in W} N(w) \setminus W$, und für einen Subgraphen $H \subseteq G$ setzen wir $N(H) := N(V(H))$. Der *Grad* einer Ecke $v \in V(G)$ ist die Zahl $d(v) := |N(v)|$. Der *Minimalgrad* von G ist die Zahl

$$\delta(G) := \min\{\deg(v) \mid v \in V(G)\},$$

und der *Maximalgrad* ist

$$\Delta(G) := \max\{\deg(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Der *Durchschnittsgrad* eines nichtleeren Graphen G ist

$$d(G) := \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{|G|}.$$

Man beachte, dass $d(G) = \frac{2 \cdot \|G\|}{|G|}$. Für den leeren Graphen definieren wir $d(\emptyset) := 0$.

Die *Degeneriertheit* $\deg(G)$ eines Graphen G ist das minimale $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{-1\}$, so dass jeder Subgraph $H \subseteq G$ eine Ecke vom Grad höchstens k besitzt.

Für jede endliche Menge V sei $K[V]$ der *vollständige Graph* $\big(V, \binom{V}{2}\big)$ über V. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $K_n := K\big[[n]\big]$. Eine *Clique* in einem Graphen G ist eine Menge $W \subseteq V(G)$, so dass $G[W] = K[W]$. Eine *unabhängige* (oder *stabile*) Menge in G ist eine Menge $W \subseteq V(G)$, so dass $G[W] = (W, \emptyset)$.

Ein Graph G ist *bipartit*, wenn es eine Partition (X, Y) von $V(G)$ gibt, so dass jede Kante von G eine Endecke in X und eine Endecke in Y hat. Wir nennen eine solche Partition (X, Y) eine *Bipartition* von G. Für disjunkte Mengen X, Y sei $K[X, Y]$ der *vollständige bipartite Graph* mit Bipartition (X, Y), dass heißt, $K[X, Y] := \big(X \cup Y, \{xy \mid x \in X, y \in Y\}\big)$. Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ sei $K_{m,n} := K\big[[m], [m+1, m+n]\big]$.

Wege, Kreise, und Zusammenhang

Durchweg sei G ein Graph.

Ein *Weg* ist ein Graph P mit paarweise verschiedenen Ecken $v_0, \dots, v_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $V(P) = \{v_0, \dots, v_n\}$ und $E(P) := \{v_{i-1}v_i \mid i \in [n]\}$. Wir nennen v_0 und v_n die *Endecken* von P. Wir bezeichnen P auch als Weg *von* v_0 *nach* v_n oder einen v_0-v_n-*Weg*. Die Ecken in $V(P) \setminus \{v_0, v_n\}$ bezeichnen wir als die *inneren Ecken* von P, und wir setzen $\mathring{P} := P - \{v_0, v_n\}$. Die *Länge* eines Weges P ist die Zahl $\lg(P) := \|P\|$. Man beachte, dass $\lg(P) = |P| - 1$. Ein *Segment* eines Weges P ist ein Weg $Q \subseteq P$. Für alle Ecken v, w eines Weges P bezeichnet vPw das (eindeutige) Segment von P mit Endecken v, w. Zwei Wege P, Q sind *kreuzungsfrei*, wenn keine innere Ecke von P in $V(Q)$ enthalten ist und umgekehrt keine innere Ecke von Q in $V(P)$. Ein Weg *in* G ist ein Weg $P \subseteq G$. Ein *isolierter Weg in* G ist ein Weg $P \subseteq G$, dessen innere Ecken Grad 2 in G haben. Für Mengen X, Y ist ein *Weg von* X *nach* Y, oder ein X-Y-*Weg*, ein Weg mit Endecken $x \in X$ und $y \in Y$ und keinen inneren Ecken in $X \cup Y$. Man beachte, dass für alle $z \in X \cap Y$ der Graph $(\{z\}, \emptyset)$ ein Weg (der Länge 0) von X nach Y ist.

Ein *Kreis* ist ein Graph C mit paarweise verschiedenen Ecken $v_1, \dots, v_n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$, $n \geq 3$, so dass $V(C) = \{v_1, \dots, v_n\}$, und $E(C) := \{v_{i-1}v_i \mid i \in [2, n]\} \cup \{v_n v_1\}$. Die Länge eines Kreises C ist die Zahl $\lg(C) := \|C\|$. Man beachte, dass $\lg(C) = |C|$. Ein *Segment* eines Kreises C ist ein Weg $Q \subseteq C$. Man beachte, dass es für je zwei verschiedene Ecken $v, w \in V(C)$ eines Kreises C genau zwei Segmente von C mit Endecken v, w gibt. Ein Kreis *in* G ist ein Kreis $C \subseteq G$.

Ein *Kantenzug* in G ist eine Folge $Z := v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_n v_n$, wobei $n \in \mathbb{N}_0$, $v_0, \dots, v_n \in V(G)$, $e_1, \dots, e_n \in E(G)$ so dass $e_i = v_{i-1}v_i$ für alle $i \in [n]$. Die *Länge* von Z ist $\lg(Z) := n$, und die *Endecken* von Z sind v_0 und v_n. Wir bezeichnen Z auch als Kantenzug *von* v_0 *nach* v_n. Der Kantenzug Z ist *geschlossen*, wenn $v_0 = v_n$. Der Kantenzug Z ist *einfach*, wenn die Ecken $v_0, \dots, v_n$ paarweise verschieden sind. Der Kantenzug Z ist *einfach geschlossen*, wenn $v_0 = v_n$ und wenn $v_1, \dots, v_n$ paarweise verschieden sind. Wir setzen $V(Z) := \{v_0, \dots, v_n\}$ und $E(Z) := \{e_1, \dots, e_n\}$ und $G(Z) := \big(V(Z), E(Z)\big)$. Wenn Z einfach ist, dann ist $G(Z)$ ein Weg in G, und wenn Z einfach geschlossen ist, dann ist $G(Z)$ ein Kreis in G. In jedem Fall enthält $G(Z)$ einen Weg von v_0 nach v_n.

Der *Abstand* $d^G(X, Y)$ zwischen zwei Eckenmengen $X, Y \in V(G)$ ist die geringste Länge eines X-Y-Weges in G; existiert kein X-Y-Weg in G, so sei $d^G(X, Y) := \infty$. Für zwei Ecken $v, w \in V(G)$ sei $d^G(v, w) := d^G\big(\{v\}, \{w\}\big)$.

Ein nichtleerer Graph G ist *zusammenhängend*, wenn es für alle $v, w \in V(G)$ einen Weg von v nach w in G gibt. Der leere Graph sei unzusammenhängend. Eine Menge $X \subseteq V(G)$ ist *zusammenhängend in* G wenn $G[X]$ zusammenhängend ist. Eine

Zusammenhangskomponente (kürzer: *Komponente*) von G ist ein (bezüglich $\subseteq$) maximaler zusammenhängender Subgraph von G.

Eine Menge $S \subseteq V(G)$ ist ein *Trenner* von G, wenn $G \setminus S$ mehr als eine Komponente hat. Die *Ordnung* eines Trenners S ist seine Mächtigkeit $|S|$. Im folgenden seien $X, Y, S \subseteq V(G)$. Die Menge S *trennt* X *von* Y, oder ist ein X-Y-*Trenner*, wenn es keinen X-Y-Weg in $G \setminus S$ gibt. Für Ecken $x, y \in V(G)$ bezeichnen wir $\{x\}$-$\{y\}$-Trenner zur Vereinfachung auch als x-y-Trenner.

(0.1) Satz von Menger. *Seien G ein Graph und $X, Y \subseteq V(G)$. Dann gilt:*

$$\min\left\{|S| \;\middle|\; S \textit{ ist ein } X\text{-}Y\textit{-Trenner}\right\} = \max\left\{k \;\middle|\; \textit{es gibt } k \textit{ paarweise disjunkte } X\text{-}Y\textit{-Wege}\right\}$$

Eine Variante des Satzes von Menger, von der man leicht sieht, dass sie zum oben formulierten Satz äquivalent ist, besagt, dass für je zwei verschiedene Ecken $x, y \in V(G)$ gilt:

$$\begin{aligned} &\min\left\{|S| \;\middle|\; S \subseteq V(G) \setminus \{x, y\} \text{ und } S \text{ ist ein } x\text{-}y\text{-Trenner}\right\} \\ =\; &\max\left\{k \;\middle|\; \text{es gibt } k \text{ paarweise kreuzungsfreie } x\text{-}y\text{-Wege}\right\} \end{aligned}$$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Der Graph G ist *k-zusammenhängend*, wenn $|G| > k$ und wenn G keinen Trenner der Ordnung kleiner als k besitzt. Es folgt aus dem Satz von Menger, dass ein Graph genau dann k-zusammenhängend ist, wenn es für je zwei verschiedene Ecken $x, y \in V(G)$ mindestens k paarweise kreuzungsfreie x-y-Wege gibt.

Wälder und Bäume

Ein *Wald* ist ein kreisfreier Graph, und ein *Baum* ist ein zusammenhängender Wald. Es ist eine nützliche Konvention, die Ecken eines Waldes oder Baumes als *Knoten* zu bezeichnen. Knoten vom Grad höchstens 1 bezeichnet man als Blätter. Für je zwei Knoten $t, u \in V(T)$ eine Baumes T gibt es genau einen Weg von t nach u in T, den wir mit tTu bezeichnen. Für jeden Baum T gilt $\|T\| = |T| - 1$, und für jeden Wald W gilt $\|W\| = |W| - k$, wobei k die Zahl der Komponenten von W ist. Jeder Subgraph eines Waldes ist selbst ein Wald, aber nicht jeder Subgraph eines Baumes ein Baum. Ein *Teilbaum* eines Baumes T ist ein Subgraph von T, der selbst wieder ein Baum ist. Ist T ein Baum und $e = t_1t_2 \in E(T)$, so ist der Graph $T \setminus e$ ein Wald mit genau zwei Komponenten T_1, T_2, von denen eine t_1 und die andere t_2 enthält.

Ein *Wurzelbaum* ist ein Tripel $T = (V(T), E(T), r(T))$, wobei $(V(T), E(T))$ ein Baum ist und $r(T) \in V(T)$ ein Knoten, den wir die *Wurzel* des Baumes nennen. Wir unterscheiden in unserer Terminologie oft nicht zwischen einem Wurzelbaum T und seinem zu Grunde liegenden Baum $(V(T), E(T))$. Beispielsweise bezeichnen wir für einen Wurzelbaum T und Knoten $t, u \in V(T)$ mit tTu den Weg von t nach u im Baum $(V(T), E(T))$. Sei T ein Wurzelbaum mit Wurzel $r := r(T)$. Ein Knoten t ist ein *Vorfahre* eines Knotens u, und u ist ein *Nachkomme* von t, wenn $t \in V(rTu)$. Mit $\trianglelefteq^T$ bezeichnen wir die zweistellige "Vorfahre-Relation". Wie man leicht sieht ist $\trianglelefteq^T$ eine partielle Ordnung auf $V(T)$ mit einzigem minimalen Element r. Ein Knoten u ist ein *Kind* einen Knotens t, und t ist die *Mutter* von u, wenn $t \trianglelefteq u$ und $tu \in E(T)$. Knoten t und u sind *Geschwister*, wenn sie beide die gleiche Mutter haben.

Klassen von Graphen

Klassen von Graphen seien immer unter Isomorphie abgeschlossen. Wir bezeichnen eine Klasse $\mathcal{C}$ als *endlich*, wenn sie bis auf Isomorphie nur endlich viele Graphen enthält. Klassen von Graphen bezeichnen wir normalerweise mit kalligraphischen Buchstaben wie $\mathcal{C}, \mathcal{D}$. Die Klasse aller Graphen bezeichnen wir mit $\mathcal{G}$. Die Klasse aller Wälder bezeichnen wir mit $\mathcal{W}$ und die Klasse aller Bäume mit $\mathcal{T}$.

Gerichtete Graphen

Ein *gerichteter Graph* (kurz: *Digraph*) ist ein Paar $D = (V, E)$, bestehend aus einer endlichen Menge V von *Ecken* und einer Menge $E \subseteq V^2$ von *Kanten*. Wie (ungerichtete) Graphen sind also Digraphen immer endlich, und sie enthalten keine Mehrfachkanten. Anders als Graphen dürfen Digraphen aber *Schleifen*, das heißt Kanten der Form (v, v), enthalten. Für eine Kante $e = (v, w)$ bezeichnen wir v als die *Anfangsecke* von e und w als die *Endecke*. Soweit möglich übertragen wir die Terminologie von Graphen auf Digraphen. Wege und Kreise eines Digraphen sind immer gerichtet. Anders als bei Graphen können Kreise auch die Längen 1 oder 2 haben. Für eine Ecke $v \in V(D)$ eines Digraphen D sei $N^D(v) := \left\{w \in V(D) \;\middle|\; (v, w) \in E(D)\right\}$. Der *Eingangsgrad* einer Ecke $v \in V(D)$ ist die Zahl der Ecken $u \in V(D)$, so dass $(u, v) \in E(D)$, und der *Ausgangsgrad* von v ist $|N(v)|$, also die Zahl der Ecken $w \in V(D)$, so dass $(v, w) \in E(D)$.

Ein *gerichteter Baum* ist ein Digraph T in dem jeder Knoten Eingangsgrad höchstens 1 hat und für den es einen Knoten r, die *Wurzel*, gibt, so dass es für jeden Knoten t genau einen Weg von r nach t gibt. Es gibt eine offensichtliche Korrespondenz zwischen Wurzelbäumen T und gerichteten Bäumen: Für einen Wurzelbaum T sei der entsprechende gerichtete Baum T' definiert durch $V(T') := V(T)$ und $E(T') := \left\{(t, u) \,\middle|\, t \text{ Mutter von } u\right\}$.