

## Übungsblatt 6

25. Juni 2009

### Aufgabe 1

In dieser Aufgabe geht es darum, aus gegebenen Punkten auf einem Gitter, ein kleineres Gitter zu konstruieren. Dazu sei  $m > 2k$ , sei  $G$  ein  $m \times m$  Gitter und sei  $G'$  das zentrale  $(m - 2k) \times (m - 2k)$  Teilgitter in  $G$ . Sei  $N$  eine Menge von mindestens  $k^4$  Knoten in  $G'$ .

- Zeigen Sie, dass man die  $x$ - und  $y$ -Achse des Gitters so wählen kann, dass mindestens  $k^2$  Knoten aus  $N$  verschiedene  $y$ -Koordinaten haben.
- Sei  $N' = \{v_1, \dots, v_{k^2}\} \subseteq N$  eine Menge von genau  $k^2$  Knoten, die verschiedene  $y$ -Koordinaten haben und seien die  $v_j, 1 \leq j \leq k^2$ , nach aufsteigender  $y$ -Koordinate geordnet. Für  $0 \leq i < k$ , sei  $N_i = \{v_j \mid ki \leq j < k(i + 1)\}$ . Zeigen Sie, es gibt  $k$  Knotendisjunkte Wege in  $G$ , so dass jeder Weg genau einen Knoten aus jedem der  $N_i, 0 \leq i < k$ , enthält.
- Zeigen Sie, dass es ein Abbild  $((A_v)_{v \in V(G_{k \times k})}, (P_e)_{e \in E(G_{k \times k})})$  von  $G_{k \times k}$  in  $G$  gibt, für das  $|V(A_v) \cap N'| = 1$  für alle  $v \in V(G_{k \times k})$  gilt.

### Aufgabe 2

Sei  $H$  ein Apexgraph mit  $|H| \geq 2$ ,  $k = 14|H| - 22$  und  $m > 2k$ .

- Sei  $M \in \mathcal{X}(H)$ , so dass  $M \supseteq G_{m \times m}$  mit  $V(M) = V(G_{m \times m})$ . Zeigen Sie, dass jeder Knoten von  $M$  höchstens  $k^4$  Nachbarn im zentralen  $(m - 2k) \times (m - 2k)$  Teilgitter von  $M$  enthält.
- Sei  $G \in \mathcal{X}(H)$  mit  $\text{tw}(G) \geq m^{4|H|^2(m+2)}$ . Zeigen Sie, dass es eine Menge  $F \subseteq E(G)$  gibt, so dass  $G/F$  isomorph ist zu einem Graphen  $R \supseteq G_{(m-2k) \times (m-2k)}$  mit  $V(R) = V(G_{(m-2k) \times (m-2k)})$ , und jeder Knoten von  $R$  ist zu höchstens  $(k + 1)^6$  inneren Knoten adjazent. Ein innerer Knoten ist ein Knoten, der nicht auf dem Rand des Gitters liegt.

*Hinweis:* Benutzen Sie (ohne Beweis) die beiden folgenden Sätze:

- Jeder planare Graph  $H$  ist ein Minor des  $r \times r$ -Gitters, mit  $r = \max\{1, 14|H| - 24\}$ .
- Wenn die Baumweite von einem Graphen  $G$  mindestens  $m^{4r^2(m+2)}$  ist, dann enthält  $G$  entweder den vollständigen Graphen  $K_r$  oder ein  $m \times m$  Gitter als Minor.

### Aufgabe 3

Für einen Graphen  $G$  und ein  $r \in \mathbb{N}_0$  sei die  $r$ -Umgebung von  $v$  in  $G$  die Menge

$$U_r^G(v) := \{w \in V(G) \mid d^G(v, w) \leq r\}.$$

Wie üblich lassen wir den Index  $G$  weg, wenn  $G$  aus dem Kontext hervorgeht.

Die *lokale Baumweite* eines Graphen  $G$  ist die Funktion, die jedem Radius  $r \in \mathbb{N}_0$  die maximale Baumweite einer  $r$ -Umgebung in  $G$  zuordnet. Formal definieren wir die lokale Baumweite als eine Funktion  $\text{ltw} : \mathcal{G} \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  mit

$$\text{ltw}(G, r) := \max \left\{ \text{tw} \left( G[U_r(v)] \right) \mid v \in V(G) \right\}$$

für alle  $G \in \mathcal{G} \setminus \{\emptyset\}$ ,  $r \in \mathbb{N}_0$  und  $\text{ltw}(\emptyset, r) := -1$  für alle  $r \in \mathbb{N}_0$ .

Eine Klasse  $C$  von Graphen hat *beschränkte lokale Baumweite*, wenn es eine Funktion  $\lambda : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  gibt, so dass für alle  $G \in C$  und alle  $r \in \mathbb{N}_0$  gilt:  $\text{ltw}(G, r) \leq \lambda(r)$ .

Welche der folgenden Klassen von Graphen hat beschränkte lokale Baumweite?

- (i) die Klasse  $\mathcal{T}_k$  aller Graphen der Baumweite höchstens  $k$  (für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ),
- (ii) die Klasse aller Graphen  $G$  mit Maximalgrad  $\Delta(G) \leq k$  (für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ),
- (iii) die Klasse aller Graphen  $G$  mit Durchschnittsgrad  $d(G) \leq k$  (für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ),
- (iv) die Klasse aller vollständigen Graphen,
- (v) die Klasse aller Gitter.

Begründen Sie jeweils ihre Antwort und geben Sie im positiven Fall eine obere Schranke für die lokale Baumweite der jeweiligen Klasse an.

### Aufgabe 4

In dieser Aufgabe werden wir die Minorenideale beschränkter lokaler Baumweite durch verbotene Apexgraphen charakterisieren.

- (a) Zeigen Sie, dass die Klasse aller Apexgraphen unbeschränkte lokale Baumweite hat.
- (b) Zeigen Sie, dass für jeden Apexgraphen  $H$  die Klasse  $\mathcal{X}(H)$  beschränkte lokale Baumweite hat.

*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 2 und betrachten Sie die Anzahl der Knoten, die man von einem Knoten aus  $R$  in maximal  $i$  Schritten erreichen kann.

- (c) Folgern Sie, dass ein Minorenideal  $C$  genau dann beschränkte lokale Baumweite hat, wenn es einen Apexgraphen  $H$  gibt, so dass  $C \subseteq \mathcal{X}(H)$ .
- (d) Zeigen Sie, dass für alle Graphen  $H$  gilt:

$$H \text{ ist ein Apexgraph} \iff \mathcal{X}(H) \text{ hat beschränkte lokale Baumweite.}$$

**Abgabe:** 2. Juli 2009