Vorlesung **Graphminorentheorie** Prof. Dr. Martin Grohe
Sommersemester 2009 Humboldt-Universität zu Berlin

Übungsblatt 5

18. Juni 2009

Aufgabe 1
Ein Graph G is t ein *Intervallgraph*, wenn es eine Menge $\{I_v \mid v \in V(G)\}$ reeller Intervalle gibt, so daß für alle $u, v \in V(G)$ gilt:

$$I_v \cap I_u \neq \emptyset \iff uv \in E(G).$$

(a) Beweisen Sie, dass jeder Intervallgraph chordal ist (vgl. Blatt 4, Aufgabe 3).

(b) Beweisen Sie, dass ein Graph G genau dann ein Intervallgraph ist, wenn es eine Wegzerlegung (P, β) von G gibt, so dass für alle $t \in V(P)$ der Beutel $\beta(t)$ eine Clique ist.

(c) Beweisen Sie, dass für alle Graphen G gilt:

$$\mathrm{pw}(G) = \min\Big\{k \;\Big|\; \text{es gibt einen Intervallgraphen } H \supseteq G \text{ mit Cliquenzahl } \omega(H) \leq k+1\Big\}.$$

Aufgabe 2
Der *Schnittgraph* einer endlichen Familie $\mathcal{F}$ von Mengen ist der Graph G mit $V(G) = \mathcal{F}$ und $E(G) = \Big\{\{F_1, F_2\} \;\Big|\; F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ mit } F_1 \cap F_2 \neq \emptyset\Big\}$.
Beweisen Sie, dass ein Graph genau dann chordal ist, wenn er isomorph zum Schnittgraphen einer Familie von Eckenmengen von Teilbäumen eines Baumes ist.

Aufgabe 3
Die *Bandbreite* eines Graphen G der Ordnung $n := |G|$ ist das minimale k, für das es eine bijektive Abbildung $f : V(G) \to [n]$ gibt, so dass $|f(v) - f(w)| \leq k$ für alle $\{v, w\} \in E(G)$.

(a) Bestimmen Sie die Bandbreite eines Weges der Länge n, eines Kreises der Länge n, und des vollständigen Graphen K_n.

(b) Beweisen Sie, dass jeder Graph der Bandbreite k Wegweite höchstens k hat.

(c) Gilt die Umkehrung der Aussage in (b) auch, das heißt, hat jeder Graph der Wegweite k Bandbreite höchstens k? Beweisen Sie dies oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

Aufgabe 4
Ein Graph G ist *Apexgraph*, wenn es ein $v \in V(G)$ gibt, so dass $G - v$ planar ist. Ein Graph G ist also genau dann ein Apexgraph ist, wenn es einen planaren Graphen $H \subseteq G$ und eine Ecke $v \in V(G)$ gibt, so dass $G \subseteq H \cdot v$. Die Klasse aller Apexgraphen bezeichnen wir mit $\mathcal{A}$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ ein Minorenideal ist.

(b) $K_{3,3,1}$ bezeichne den „tripartiten" Graphen mit $V(K_{3,3,1}) := [7]$ und

$$E(K_{3,3,1}) := \Big\{\{v, w\} \;\Big|\; v \in [3] \text{ und } w \in [4, 6]\Big\} \cup \Big\{\{v, 7\} \;\Big|\; v \in [6]\Big\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}(K_6, K_{3,3,1})$ enthalten ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Inklusion in (b) echt ist, dass es also einen Graphen $G \in \mathcal{X}(K_6, K_{3,3,1})$ gibt, der kein Apexgraph ist.

Abgabe: 25. Juni 2009