Vorlesung **Graphminorentheorie** Prof. Dr. Martin Grohe
Sommersemester 2009 Humboldt-Universität zu Berlin

Übungsblatt 4

28. Mai 2009

Aufgabe 1
Beweisen Sie, dass für alle Graphen G gilt:

$$\mathrm{bd}(G) \leq 2 \cdot \mathrm{sw}(G).$$

Aufgabe 2
Seien $k \in \mathbb{N}$ und G ein Graph. Eine Menge $X \subseteq V(G)$ ist *k-verbunden* in G, wenn es für alle Teilmengen $Y_1, Y_2 \subseteq X$ mit $\ell := |Y_1| = |Y_2| \leq k$ eine Familie von ℓ paarweise disjunkten Y_1-Y_2-Wegen $P_1, \ldots, P_\ell \subseteq G$ gibt. X ist *extern k-verbunden* in G, wenn es für alle Teilmengen $Y_1, Y_2 \subseteq X$ mit $\ell := |Y_1| = |Y_2| \leq k$ eine Familie von ℓ paarweise disjunkten Y_1-Y_2-Wegen $P_1, \ldots, P_\ell \subseteq G$ gibt, die keine inneren Ecken in X haben, d.h., $V(\mathring{P}_i) \cap X = \emptyset$. Offensichtlich ist jede extern k-verbundene Menge auch k-verbunden.

(a) Zeigen Sie, dass alle verbundenen Teilmengen $X \subseteq V(G)$ auch extern k-verbunden sind.

(b) Sei $X \subseteq V(G)$ k-verbunden mit $|X| \geq 3k - 2$. Zeigen Sie, dass es keinen balancierten X-Separator S der Ordnung $|S| < k$ gibt.

(c) Wir definieren zwei neue Graphinvarianten vh' und vh'' wie folgt: Für alle Graphen G seien

$$\mathrm{vh}'(G) := \max\Big\{k \;\Big|\; \text{es gibt eine } k\text{-verbundene Menge } X \subseteq V(G) \text{ mit } |X| \geq 3k-2\Big\}$$
$$\mathrm{vh}''(G) := \max\Big\{k \;\Big|\; \text{es gibt eine extern } k\text{-verbundene Menge } X \subseteq V(G) \text{ mit } |X| \geq 3k-2\Big\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle Graphen G gilt:

$$\frac{1}{3} \cdot \mathrm{bd}(G) \leq \mathrm{vh}''(G) \leq \mathrm{vh}'(G) \leq \mathrm{bd}(G).$$

Aufgabe 3
Ein Graph G ist *chordal*, wenn es keinen sehnenfreien Kreis $C \subseteq G$ mit $|C| \geq 4$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann chordal ist, wenn es eine Baumzerlegung (T, β) von G gibt, so dass für alle $t \in V(T)$ der Beutel $\beta(t)$ eine Clique in G ist.

Hinweis: Um zu zeigen, dass jeder chordale Graph G eine Baumzerlegung besitzt, deren Beutel Cliquen sind, zeigen Sie zunächst, dass alle minimalen Trenner von G Cliquen sind.

(b) Die *Cliquenzahl* $\omega(G)$ eines Graphen G ist das maximale k, so dass $K_k \subseteq G$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{tw}(G) = \min\left\{k \;\middle|\; \text{es gibt einen chordalen Graphen } H \supseteq G \text{ mit } \omega(H) \leq k+1\right\}.$$

Aufgabe 4
Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Klasse der *k-Bäume* ist induktiv wie folgt definiert:

- Alle Graphen der Ordnung 1 sind k-Bäume.
- Sei G ein Graph. Wenn es eine Ecke $v \in V(G)$ gibt, so dass $G - v$ ein k-Baum und $N^G(v)$ eine Clique der Ordnung $\leq k$ ist, dann ist G ein k-Baum.

(a) Zeigen Sie, dass ein Graph G genau dann ein k-Baum ist, wenn G ein chordaler Graph mit Cliquenzahl $\omega(G) \leq k+1$ ist.

(b) Ein *partieller k-Baum* ist ein Subgraph eines k-Baums. Zeigen Sie, dass für alle Graphen G gilt:

$$\mathrm{tw}(G) = \min\{k \mid G \text{ ist ein partieller } k\text{-Baum}\}.$$

Abgabe: 4. Juni 2009