Vorlesung **Graphminorentheorie** Prof. Dr. Martin Grohe
Sommersemester 2009 Humboldt-Universität zu Berlin

Übungsblatt 3

14. Mai 2009

Aufgabe 1
Geben Sie für jedes $k \geq 2$ einen Graphen G_k mit Baumweite $\text{tw}(G_k) = k$ und Durchschnittsgrad $d(G_k) = \frac{3}{2} \cdot k$ an.

Aufgabe 2 (a) Zeigen sie, dass ein Graph $G = (V, E)$ genau dann ein Wald ist, wenn es eine lineare Ordnung $\leq$ von V gibt, so dass es für alle $v \in V$ höchstens ein $w \in N(v)$ mit $w \leq v$ gibt.

(b) Zeigen Sie, dass für jeden Graphen $G = (V, E)$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$\text{tw}(G) \leq k \iff$ es gibt eine lineare Ordnung $\leq$ von V und eine Menge $F \subseteq \binom{V}{2}$ mit $E \subseteq F$, so dass für alle $v \in V(G)$ die Menge $N(v) \cap \{w \mid w \leq v\}$ eine Clique der Größe $\leq k$ im Graphen (V, F) ist.

Aufgabe 3
Ein *Binärbaum* ist ein Wurzelbaum (vgl. Skript S.10), in dem jeder Knoten entweder ein Blatt ist oder genau zwei Kinder hat. Zeigen Sie, dass es für jeden Graphen G eine Baumzerlegung (T, β) der Weite $\text{tw}(G)$ und eine Ecke $r \in V(T)$ gibt, so dass $(V(T), E(T), r)$ ein Binärbaum ist.

Aufgabe 4 (a) Geben Sie für jedes $k \geq 3$ einen Graphen G_k und einen Bramble $\mathcal{B}$ von G_k der Dicke k an, so dass jede minimale Überdeckung von $\mathcal{B}$ eine unabhängige Menge ist.

(b) Geben Sie für jedes $k \geq 2$ einen Graphen H_k mit $\text{tw}(H_k) = k$ an, so dass für jede Baumzerlegung (T, β) von H_k der Weite k ein $t \in V(T)$ existiert, so dass $\beta(t)$ eine unabhängige Menge der Größe $k + 1$ ist.

Abgabe: 26. Mai 2009