Vorlesung **Graphminorentheorie** Prof. Dr. Martin Grohe
Sommersemester 2009 Humboldt-Universität zu Berlin

Übungsblatt 2

30. April 2009

Aufgabe 1 (a) Beweisen Sie, dass für jeden Graphen G und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\deg(G) \leq k \iff \begin{array}{l}\text{es gibt eine lineare Ordnung} \leq \text{von } V(G)\text{, so} \\ \text{dass für alle } v \in V(G) \text{ gilt:} \\ |N(v) \cap \{w \mid w \leq v\}| \leq k.\end{array}$$

(b) Für $n, k \in \mathbb{N}$ sei P_n^k der Graph mit Eckenmenge $V(P_n^k) = [n]$ und Kantenmenge

$$E(P_n^k) = \Big\{\{i, j\} \;\Big|\; i, j \in [n] \text{ mit } 1 \leq |i - j| \leq k\Big\}.$$

Bestimmen Sie $\deg(P_n^k)$ und $d(P_n^k)$.

Aufgabe 2
Formulieren und beweisen Sie eine Erweiterung der Eulerschen Polyederformel auf beliebige, nicht notwendigerweise zusammenhängende ebene Graphen.

Wir nennen einen ebenen Graphen G *trianguliert*, wenn für alle $\boldsymbol{f} \in F(G)$ der Graph $Bd(\boldsymbol{f})$ ein Dreieck ist. In den beiden folgenden Aufgaben dürfen Sie verwenden, dass jeder ebene Graph G *triangulierbar* ist, d.h., es gibt eine Menge $E' \supseteq E(G)$ von Kurven in der Sphäre, so dass $(V(G), E')$ ein triangulierter ebener Graph ist.

Aufgabe 3
Sei G ein ebener Graph mit $|G| \geq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass $||G|| \leq 3|G| - 6$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$||G|| = 3|G| - 6 \iff G \text{ ist trianguliert.}$$

Aufgabe 4 (a) Zeigen Sie, dass für jeden planaren Graphen G gilt: $\deg(G) \leq 5$.

(b) Geben Sie einen planaren Graphen G mit $\deg(G) = 5$ an.

Abgabe: 7. Mai 2009