

# Kapitel 4 I. §6. - II.

Alexander Mantei

29.06.2007

- ① I. §6. Die Unvollständigkeit der Peano Arithmetik
  - 1. indirekter Weg (über P.E.)
  - 2. direkter Weg
- ② II. rekursiv aufzählbare ( $\Sigma_1$ -)Relationen

- $\widetilde{P}_E^*$  ist arithmetisch  $\Rightarrow$  es existiert eine arithmetische Formel  $H(v_1)$  die  $\widetilde{P}_E^*$  beschreibt

# I. §6. - indirekter Weg (über P.E.)

- $\widetilde{P}_E^*$  ist arithmetisch  $\Rightarrow$  es existiert eine arithmetische Formel  $H(v_1)$  die  $\widetilde{P}_E^*$  beschreibt
- die Diagonalisierung  $H[\bar{h}]$  von  $H(v_1)$  ist ein arithmetischer Gödelsatz für  $\widetilde{P}_E$

# I. §6. - indirekter Weg (über P.E.)

- $\widetilde{P}_E^*$  ist arithmetisch  $\Rightarrow$  es existiert eine arithmetische Formel  $H(v_1)$  die  $\widetilde{P}_E^*$  beschreibt
- die Diagonalisierung  $H[\bar{h}]$  von  $H(v_1)$  ist ein arithmetischer Gödelsatz für  $\widetilde{P}_E$
- ergo  $H[\bar{h}]$  ist wahr aber nicht beweisbar in P.E.

# I. §6. - indirekter Weg (über P.E.)

- $\widetilde{P}_E^*$  ist arithmetisch  $\Rightarrow$  es existiert eine arithmetische Formel  $H(v_1)$  die  $\widetilde{P}_E^*$  beschreibt
- die Diagonalisierung  $H[\bar{h}]$  von  $H(v_1)$  ist ein arithmetischer Gödelsatz für  $\widetilde{P}_E$
- ergo  $H[\bar{h}]$  ist wahr aber nicht beweisbar in P.E.
- ( Axiome von P.A.  $\subseteq$  Axiome von P.E. )  $\Rightarrow H[\bar{h}]$  ist wahr aber nicht beweisbar in P.A.

# I. §6. - indirekter Weg (über P.E.)

- $\widetilde{P}_E^*$  ist arithmetisch  $\Rightarrow$  es existiert eine arithmetische Formel  $H(v_1)$  die  $\widetilde{P}_E^*$  beschreibt
- die Diagonalisierung  $H[\bar{h}]$  von  $H(v_1)$  ist ein arithmetischer Gödelsatz für  $\widetilde{P}_E$
- ergo  $H[\bar{h}]$  ist wahr aber nicht beweisbar in P.E.
- ( Axiome von P.A.  $\subseteq$  Axiome von P.E. )  $\Rightarrow H[\bar{h}]$  ist wahr aber nicht beweisbar in P.A.

$\hookrightarrow$  P.A. ist unvollständig.

4.  $R_1(x, y, z) :$   
 $z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = s(x)$

4.  $R_1(x, y, z) :$

$$z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = s(x)$$

12.  $A(x) - E_x$  ist ein Axiom von P.A.:

Entfernen von :

$$N_{10}(x): (\exists y \leq x)(\text{Var}(y) \wedge x = (y \text{ exp } \bar{0}) \text{ id } s(\bar{0}))$$

$$N_{11}(x): (\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(\text{Var}(y) \wedge \text{Var}(z) \wedge x = (y \text{ exp } s(z)) \text{ id } ((y \text{ exp } z) \text{ tim } y))$$

4.  $R_1(x, y, z) :$   
 $z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = s(x)$
12.  $A(x) - E_x$  ist ein Axiom von P.A.:  
Entfernen von :  
 $N_{10}(x): (\exists y \leq x)(\text{Var}(y) \wedge x = (y \text{ exp } \bar{0}) \text{ id } s(\bar{0}))$   
 $N_{11}(x): (\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(\text{Var}(y) \wedge \text{Var}(z) \wedge x = (y \text{ exp } s(z)) \text{ id } ((y \text{ exp } z) \text{ tim } y))$
16.  $P_A(x) - E_x$  ist beweisbar in P.A.: ...
17.  $R_A(x) - E_x$  ist widerlegbar in P.A.: ...

4.  $R_1(x, y, z) :$   
 $z = x \text{ pl } y \vee z = x \text{ tim } y \vee z = s(x)$
12.  $A(x) - E_x$  ist ein Axiom von P.A.:  
Entfernen von :
- $N_{10}(x): (\exists y \leq x)(\text{Var}(y) \wedge x = (y \text{ exp } \bar{0}) \text{ id } s(\bar{0}))$
- $N_{11}(x): (\exists y \leq x)(\exists z \leq x)(\text{Var}(y) \wedge \text{Var}(z) \wedge x = (y \text{ exp } s(z)) \text{ id } ((y \text{ exp } z) \text{ tim } y))$
16.  $P_A(x) - E_x$  ist beweisbar in P.A.: ...
17.  $R_A(x) - E_x$  ist widerlegbar in P.A.: ...

$\hookrightarrow P_A$  ist eine  $\Sigma$ -Menge

$\hookrightarrow$  P.A. ist unvollständig (analog zum indirekten Weg)

## II. - rekursiv aufzählbare ( $\Sigma_1$ -)Relationen

z.Z.:  $\Sigma_1 \equiv \Sigma \equiv$  rekursiv aufzählbare Relationen

### Satz C

(a) Jede  $\Sigma_0$ -Relation ist ebenfalls eine  $\Sigma_1$ -Relation.

### Satz C

- (a) Jede  $\Sigma_0$ -Relation ist ebenfalls eine  $\Sigma_1$ -Relation.
- (b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .

### Satz C

- (a) Jede  $\Sigma_0$ -Relation ist ebenfalls eine  $\Sigma_1$ -Relation.
- (b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .
- (c) Wenn  $R_1(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_2(x_1, \dots, x_n, y)$   $\Sigma_1$ -Relationen sind, dann ebenso  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee R_2(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \wedge R_2(x_1, \dots, x_n, y)$ .

## Satz C

- (a) Jede  $\Sigma_0$ -Relation ist ebenfalls eine  $\Sigma_1$ -Relation.
- (b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .
- (c) Wenn  $R_1(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_2(x_1, \dots, x_n, y)$   $\Sigma_1$ -Relationen sind, dann ebenso  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee R_2(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \wedge R_2(x_1, \dots, x_n, y)$ .
- (d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  $(\exists y \leq z) R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  $(\forall y \leq z) R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

## Satz C

- (a) Jede  $\Sigma_0$ -Relation ist ebenfalls eine  $\Sigma_1$ -Relation.
- (b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .
- (c) Wenn  $R_1(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_2(x_1, \dots, x_n, y)$   $\Sigma_1$ -Relationen sind, dann ebenso  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee R_2(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \wedge R_2(x_1, \dots, x_n, y)$ .
- (d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  $(\exists y \leq z) R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  $(\forall y \leq z) R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .
- (e) Wenn  $R$  eine  $\Sigma_0$ -Relation ist und  $S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation, dann ist die Relation  $R \supset S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation.

### Satz C

(a) Jede  $\Sigma_0$ -Relation ist ebenfalls eine  $\Sigma_1$ -Relation.

- Sei  $R(x_1, \dots, x_n)$  einen  $\Sigma_0$ -Relation und  $F(v_1, \dots, v_n)$  eine  $\Sigma_0$ -Formel die  $R$  beschreibt.

### Satz C

(a) Jede  $\Sigma_0$ -Relation ist ebenfalls eine  $\Sigma_1$ -Relation.

- Sei  $R(x_1, \dots, x_n)$  eine  $\Sigma_0$ -Relation und  $F(v_1, \dots, v_n)$  eine  $\Sigma_0$ -Formel die  $R$  beschreibt.
- Dann beschreibt die  $\Sigma_1$ -Formel  $\exists v_{n+1} F(v_1, \dots, v_n)$  die selbe Relation  $R$ . (Leere Quantifikation.)

### Satz C

(a) Jede  $\Sigma_0$ -Relation ist ebenfalls eine  $\Sigma_1$ -Relation.

- Sei  $R(x_1, \dots, x_n)$  eine  $\Sigma_0$ -Relation und  $F(v_1, \dots, v_n)$  eine  $\Sigma_0$ -Formel die  $R$  beschreibt.
- Dann beschreibt die  $\Sigma_1$ -Formel  $\exists v_{n+1} F(v_1, \dots, v_n)$  die selbe Relation  $R$ . (Leere Quantifikation.)

$\hookrightarrow$  Also liegt  $R$  in  $\Sigma_1$ .

### Satz C

(b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .

Die beiden folgenden Bedingungen für eine beliebige Relation  $S(x_1, \dots, x_n, y, z)$  sind identisch :

- (1)  $\exists y \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$
- (2)  $\exists w (\exists y \leq w) (\exists z \leq w) S(x_1, \dots, x_n, y, z)$

### Satz C

(b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .

Die beiden folgenden Bedingungen für eine beliebige Relation  $S(x_1, \dots, x_n, y, z)$  sind identisch :

(1)  $\exists y \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$

(2)  $\exists w (\exists y \leq w) (\exists z \leq w) S(x_1, \dots, x_n, y, z)$

- Offensichtlich folgt (1) aus (2).

### Satz C

(b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .

Die beiden folgenden Bedingungen für eine beliebige Relation  $S(x_1, \dots, x_n, y, z)$  sind identisch :

$$(1) \exists y \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$$

$$(2) \exists w (\exists y \leq w) (\exists z \leq w) S(x_1, \dots, x_n, y, z)$$

- Offensichtlich folgt (1) aus (2).
- Seien  $x_1, \dots, x_n, y, z$  Zahlen die (1) erfüllen.  
 $w = \max(y, z) \Rightarrow w \exists w (\exists y \leq w) (\exists z \leq w) S(x_1, \dots, x_n, y, z)$

### Satz C

(b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .

- $R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$

### Satz C

(b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .

- $R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$
- $\hookrightarrow \exists y R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv \exists y \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$

### Satz C

(b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .

- $R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$
- $\hookrightarrow \exists y R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv \exists y \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$
- $\exists y \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv \exists w (\exists y \leq w) (\exists z \leq w) S(x_1, \dots, x_n, y, z)$

### Satz C

(b) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso  $\exists y R(x_1, \dots, x_n, y)$ .

- $R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$
- $\hookrightarrow \exists y R(x_1, \dots, x_n, y) \equiv \exists y \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z)$
- $\exists y \exists z S(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv$   
 $\exists w (\exists y \leq w) (\exists z \leq w) S(x_1, \dots, x_n, y, z)$
- $(\exists y \leq w) (\exists z \leq w) S(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_0 \Rightarrow$   
 $\exists w (\exists y \leq w) (\exists z \leq w) S(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_1$

### Satz C

(c) Wenn  $R_1(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_2(x_1, \dots, x_n, y)$   $\Sigma_1$ -Relationen sind, dann ebenso  
 $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee R_2(x_1, \dots, x_n, y)$  und  
 $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \wedge R_2(x_1, \dots, x_n, y)$ .

- $R_1(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y S_1(x_1, \dots, x_n, y)$   
 $R_2(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y S_2(x_1, \dots, x_n, y)$

### Satz C

(c) Wenn  $R_1(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_2(x_1, \dots, x_n, y)$   $\Sigma_1$ -Relationen sind, dann ebenso  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee R_2(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \wedge R_2(x_1, \dots, x_n, y)$ .

- $R_1(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y S_1(x_1, \dots, x_n, y)$   
 $R_2(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y S_2(x_1, \dots, x_n, y)$
- $(R_1(x_1, \dots, x_n) \vee R_2(x_1, \dots, x_n)) \equiv$   
 $(\exists y S_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee \exists y S_2(x_1, \dots, x_n, y)) \equiv$   
 $\exists y (S_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee S_2(x_1, \dots, x_n, y))$

### Satz C

(c) Wenn  $R_1(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_2(x_1, \dots, x_n, y)$   $\Sigma_1$ -Relationen sind, dann ebenso  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee R_2(x_1, \dots, x_n, y)$  und  $R_1(x_1, \dots, x_n, y) \wedge R_2(x_1, \dots, x_n, y)$ .

- $R_1(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y S_1(x_1, \dots, x_n, y)$   
 $R_2(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y S_2(x_1, \dots, x_n, y)$
- $(R_1(x_1, \dots, x_n) \vee R_2(x_1, \dots, x_n)) \equiv$   
 $(\exists y S_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee \exists y S_2(x_1, \dots, x_n, y)) \equiv$   
 $\exists y (S_1(x_1, \dots, x_n, y) \vee S_2(x_1, \dots, x_n, y))$
- $(R_1(x_1, \dots, x_n) \wedge R_2(x_1, \dots, x_n)) \equiv$   
 $(\exists y S_1(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \exists y S_2(x_1, \dots, x_n, y)) \equiv$   
 $\exists y \exists z (S_1(x_1, \dots, x_n, y) \wedge S_2(x_1, \dots, x_n, z))$  (nach (b))

### Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen

$$(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z) \text{ und}$$

$$(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z) .$$

- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv v_1 = v_1 \wedge \dots \wedge v_n = v_n \wedge v_{n+1} \leq v_{n+2}$

### Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  
 $(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  
 $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv v_1 = v_1 \wedge \dots \wedge v_n = v_n \wedge v_{n+1} \leq v_{n+2}$
- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_1$  (nach (a))

### Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  
 $(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  
 $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv v_1 = v_1 \wedge \dots \wedge v_n = v_n \wedge v_{n+1} \leq v_{n+2}$
- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_1$  (nach (a))
- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \wedge R(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_1$  (nach (c))

### Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  
 $(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  
 $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv v_1 = v_1 \wedge \dots \wedge v_n = v_n \wedge v_{n+1} \leq v_{n+2}$
- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_1$  (nach (a))
- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \wedge R(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_1$  (nach (c))
- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \wedge R(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv y \leq z \wedge R(x_1, \dots, x_n, y, z)$

### Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  
 $(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  
 $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv v_1 = v_1 \wedge \dots \wedge v_n = v_n \wedge v_{n+1} \leq v_{n+2}$
- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_1$  (nach (a))
- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \wedge R(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_1$  (nach (c))
- $K(x_1, \dots, x_n, y, z) \wedge R(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv y \leq z \wedge R(x_1, \dots, x_n, y, z)$
- $\exists y(y \leq z \wedge R(x_1, \dots, x_n, y, z)) \in \Sigma_1$  (nach (b))
- $\hookrightarrow (\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z) \in \Sigma_1$

### Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  
 $(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  
 $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

- $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv$   
 $(\forall y \leq z)\exists w S(x_1, \dots, x_n, y, z, w)$

## Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  
 $(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  
 $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

- $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv (\forall y \leq z)\exists w S(x_1, \dots, x_n, y, z, w)$
- Seien  $(x_1, \dots, x_n, z)$  fest und erfüllen  
 $(\forall y \leq z)\exists w S(x_1, \dots, x_n, y, z, w) \Rightarrow$   
 $(\exists v)(\forall y \leq z)(\exists w_y (v \geq w_y) \Rightarrow$   
 $(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w)$

### Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  
 $(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  
 $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

- $(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w) \Rightarrow \exists v(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w)$

### Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  
 $(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  
 $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

- $(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w) \Rightarrow \exists v(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w)$
- $\exists v(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w) \in \Sigma_1$

### Satz C

(d) Wenn  $R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, dann ebenso die Relationen  
 $(\exists y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$  und  
 $(\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$ .

- $(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w) \Rightarrow \exists v(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w)$
- $\exists v(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w) \in \Sigma_1$
- $\exists v(\forall y \leq z)(\exists w \leq v)S(x_1, \dots, x_n, y, z, w) \Rightarrow (\forall y \leq z)\exists wS(x_1, \dots, x_n, y, z, w) \Rightarrow (\forall y \leq z)R(x_1, \dots, x_n, y, z)$

### Satz C

(e) Wenn  $R$  eine  $\Sigma_0$ -Relation ist und  $S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation, dann ist die Relation  $R \supset S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation.

- $R \in \Sigma_0 \wedge S \in \Sigma_1 \Rightarrow \tilde{R} \in \Sigma_0$

### Satz C

(e) Wenn  $R$  eine  $\Sigma_0$ -Relation ist und  $S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation, dann ist die Relation  $R \supset S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation.

- $R \in \Sigma_0 \wedge S \in \Sigma_1 \Rightarrow \tilde{R} \in \Sigma_0$
- $\tilde{R} \in \Sigma_1$  (nach (a))

### Satz C

(e) Wenn  $R$  eine  $\Sigma_0$ -Relation ist und  $S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation, dann ist die Relation  $R \supset S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation.

- $R \in \Sigma_0 \wedge S \in \Sigma_1 \Rightarrow \tilde{R} \in \Sigma_0$
- $\tilde{R} \in \Sigma_1$  (nach (a))
- $\tilde{R} \vee S \in \Sigma_1$  (nach (c))

### Satz C

(e) Wenn  $R$  eine  $\Sigma_0$ -Relation ist und  $S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation, dann ist die Relation  $R \supset S$  eine  $\Sigma_1$ -Relation.

- $R \in \Sigma_0 \wedge S \in \Sigma_1 \Rightarrow \tilde{R} \in \Sigma_0$
- $\tilde{R} \in \Sigma_1$  (nach (a))
- $\tilde{R} \vee S \in \Sigma_1$  (nach (c))
- $\tilde{R} \vee S \equiv R \supset S$

- 1 Jede  $\Sigma_0$ -Formel ist eine  $\Sigma$ -Formel. (nach (a))

- 1 Jede  $\Sigma_0$ -Formel ist eine  $\Sigma$ -Formel. (nach (a))
- 2 Sei  $F$  eine  $\Sigma$ -Formel, dann ist für jede Variable  $v_i$  der Ausdruck  $\exists v_i F$  eine  $\Sigma$ -Formel. (nach (b))

- 1 Jede  $\Sigma_0$ -Formel ist eine  $\Sigma$ -Formel. (nach (a))
- 2 Sei  $F$  eine  $\Sigma$ -Formel, dann ist für jede Variable  $v_i$  der Ausdruck  $\exists v_i F$  eine  $\Sigma$ -Formel. (nach (b))
- 3 Sei  $F$  eine  $\Sigma$ -Formel, dann sind für alle verschiedenen  $v_i$  und  $v_j$  und alle Zahlen  $\bar{n}$  die Formeln  $(\exists v_i \leq v_j)F$ ,  $(\forall v_i \leq v_j)F$ ,  $(\exists v_i \leq \bar{n})F$  und  $(\forall v_i \leq \bar{n})F$   $\Sigma$ -Formeln. (nach (d))

- 1 Jede  $\Sigma_0$ -Formel ist eine  $\Sigma$ -Formel. (nach (a))
- 2 Sei  $F$  eine  $\Sigma$ -Formel, dann ist für jede Variable  $v_i$  der Ausdruck  $\exists v_i F$  eine  $\Sigma$ -Formel. (nach (b))
- 3 Sei  $F$  eine  $\Sigma$ -Formel, dann sind für alle verschiedenen  $v_i$  und  $v_j$  und alle Zahlen  $\bar{n}$  die Formeln  $(\exists v_i \leq v_j)F$ ,  $(\forall v_i \leq v_j)F$ ,  $(\exists v_i \leq \bar{n})F$  und  $(\forall v_i \leq \bar{n})F$   $\Sigma$ -Formeln. (nach (d))
- 4 Seien  $F$  und  $G$   $\Sigma$ -Formeln, dann sind  $F \vee G$  und  $F \wedge G$   $\Sigma$ -Formeln. (nach (c)) Sei  $F$  eine  $\Sigma_0$ -Formel und  $G$  eine  $\Sigma$ -Formel, dann ist  $F \supset G$  eine  $\Sigma$ -Formel. (nach (e))

### Satz $C_1$

Jede  $\Sigma$ -Relation ist auch eine  $\Sigma_1$ -Relation.

### Satz $C_1$

Jede  $\Sigma$ -Relation ist auch eine  $\Sigma_1$ -Relation.

### Satz $C_1$ + Korollar 1

Wenn  $A$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, so auch  $A^*$ .

### Satz $C_1$

Jede  $\Sigma$ -Relation ist auch eine  $\Sigma_1$ -Relation.

### Satz $C_1$ + Korollar 1

Wenn  $A$  eine  $\Sigma_1$ -Relation ist, so auch  $A^*$ .

### Satz $C_1$ + Korollar 2

Die Mengen  $P_A^*$  und  $R_A^*$  sind  $\Sigma_1$ -Mengen.

## II. - Abschätzung von Sequenznummern

Sei  $\pi(x) := 13^{(x^2+x+1)}$ .

### Theorem D

Für alle  $n$  und alle  $k \leq n$  und jede Sequenz  $(a_1, \dots, a_k)$  von Zahlen aus  $K_{11}$ , die alle  $\leq n$  sind, gilt, daß die zugehörige Sequenznummer  $x = \delta a_1 \delta \dots \delta a_k \delta \leq \pi(n)$  ist.

## II. - Abschätzung von Sequenznummern

Sei  $\pi(x) := 13^{(x^2+x+1)}$ .

### Theorem D

Für alle  $n$  und alle  $k \leq n$  und jede Sequenz  $(a_1, \dots, a_k)$  von Zahlen aus  $K_{11}$ , die alle  $\leq n$  sind, gilt, daß die zugehörige Sequenznummer  $x = \delta a_1 \delta \dots \delta a_k \delta \leq \pi(n)$  ist.

- $y = \underbrace{\delta n \delta n \dots \delta n \delta}_n \Rightarrow x \leq y$

## II. - Abschätzung von Sequenznummern

Sei  $\pi(x) := 13^{(x^2+x+1)}$ .

### Theorem D

Für alle  $n$  und alle  $k \leq n$  und jede Sequenz  $(a_1, \dots, a_k)$  von Zahlen aus  $K_{11}$ , die alle  $\leq n$  sind, gilt, daß die zugehörige Sequenznummer  $x = \delta a_1 \delta \dots \delta a_k \delta \leq \pi(n)$  ist.

- $y = \underbrace{\delta n \delta n \dots \delta n \delta}_n \Rightarrow x \leq y$
- Sei  $L(z)$  die Anzahl der Ziffern (zur Basis 13) einer beliebigen natürlichen Zahl  $z$ .

## II. - Abschätzung von Sequenznummern

Sei  $\pi(x) := 13^{(x^2+x+1)}$ .

### Theorem D

Für alle  $n$  und alle  $k \leq n$  und jede Sequenz  $(a_1, \dots, a_k)$  von Zahlen aus  $K_{11}$ , die alle  $\leq n$  sind, gilt, daß die zugehörige Sequenznummer  $x = \delta a_1 \delta \dots \delta a_k \delta \leq \pi(n)$  ist.

- $y = \underbrace{\delta n \delta n \dots \delta n \delta}_n \Rightarrow x \leq y$
- Sei  $L(z)$  die Anzahl der Ziffern (zur Basis 13) einer beliebigen natürlichen Zahl  $z$ .
- $L(y) = n \cdot L(n) + n + 1, L(n) \leq n \rightarrow L(y) \leq n^2 + n + 1$

## II. - Abschätzung von Sequenznummern

Sei  $\pi(x) := 13^{(x^2+x+1)}$ .

### Theorem D

Für alle  $n$  und alle  $k \leq n$  und jede Sequenz  $(a_1, \dots, a_k)$  von Zahlen aus  $K_{11}$ , die alle  $\leq n$  sind, gilt, daß die zugehörige Sequenznummer  $x = \delta a_1 \delta \dots \delta a_k \delta \leq \pi(n)$  ist.

- $y = \underbrace{\delta n \delta n \dots \delta n \delta}_n \Rightarrow x \leq y$
- Sei  $L(z)$  die Anzahl der Ziffern (zur Basis 13) einer beliebigen natürlichen Zahl  $z$ .
- $L(y) = n \cdot L(n) + n + 1, L(n) \leq n \rightarrow L(y) \leq n^2 + n + 1$
- $y \leq 13^{L(y)} \rightarrow y \leq 13^{n^2+n+1}$