Der Beweis von Theorem E

Janine Ott

Institut für Informatik
Humboldt Universität zu Berlin

Proseminar
22.Juni 2007

Theorem E

Behauptung

Die Relation $x^y = z$ ist Σ_1.

Beweis:

Idee: Konstruktion einer Bildungssequenz

$$S = \left\{(0,1),(1,x),(2,x^2),\ldots,(y,x^y)\right\}$$

Lemma K

Behauptung

Es gibt eine Σ_0-Relation $K(y,z,w)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Sei S eine endliche Sequenz geordneter Paare natürlicher Zahlen $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_n,b_n)$, dann existiert ein w, so dass für alle y,z mit $K(y,z,w)$ gdw. $(y,z)\in$ S gilt
- Wenn $K(y,z,w)$ gilt, dann gilt für jede Zahl y, z und w: $y \le w$ und $z \le w$

Lemma K

Behauptung

Es gibt eine Σ_0-Relation $K(y, z, w)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Sei S eine endliche Sequenz geordneter Paare natürlicher Zahlen $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$, dann existiert ein w, so dass für alle y, z mit $K(y, z, w)$ gdw. $(y, z) \in$ S gilt
- Wenn $K(y, z, w)$ gilt, dann gilt für jede Zahl y, z und w: $y \leq w$ und $z \leq w$

Lemma K

Behauptung

Es gibt eine Σ_0-Relation $K(y,z,w)$ mit den folgenden Eigenschaften:

- Sei S eine endliche Sequenz geordneter Paare natürlicher Zahlen $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$, dann existiert ein w, so dass für alle y, z mit $K(y,z,w)$ gdw. $(y,z) \in$ S gilt
- Wenn $K(y,z,w)$ gilt, dann gilt für jede Zahl y, z und w: $y \leq w$ und $z \leq w$

Lemma K- Rahmen

Definition - Rahmen

Ein Rahmen ist eine Zahl der Form $\overline{2}t\overline{2}$ und t ist eine Folge von Einsen.

Definition - $1(x)$

Wenn $1(x)$ gilt, dann besteht x ausschließlich aus Einsen.

Anmerkung:

$1(x) \in \Sigma_0$:

$$1(x) \leftrightarrow x \neq 0 \wedge (\forall y \leq x)\,(yPx \supset 1Py)$$

Lemma K- Rahmen

Definition - Rahmen

Ein Rahmen ist eine Zahl der Form $\overline{2}t\overline{2}$ und t ist eine Folge von Einsen.

Definition - $1(x)$

Wenn $1(x)$ gilt, dann besteht x ausschließlich aus Einsen.

Anmerkung:

$1(x) \in \Sigma_0$:

$$1(x) \leftrightarrow x \neq 0 \wedge (\forall y \leq x)\,(y P x \supset 1 P y)$$

Die Sequenznummer

Definition

Seien

S - endliche Sequenz geordneter Paare von Zahlen

$(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)$

und

f - Rahmen, der um mindestens 1 länger ist als der längste Rahmen in S

Dann sieht eine **Sequenznummer** von S, wie folgt, aus:

$ffa_1fb_1ff \dots ffa_nfb_nff$

Der maximale Rahmen

Definition

Wenn x der längste Rahmen in w ist, dann nennt man x einen **maximalen Rahmen** von w.
Die dazugehörige Relation $x \,\mathrm{mf}\, w$ ist in Σ_0:

$$x \,\mathrm{mf}\, w \leftrightarrow xPw \wedge (\exists z \leq w) \Big(1(z) \wedge x = \overline{2} z \overline{2} \\ \wedge \sim (\exists y \leq w) \left(1(y) \wedge \overline{2} z y \overline{2} P w\right) \Big)$$

Lemma K

Beweis

$$K(y,z,w) \underset{\text{def}}{=} (\exists f \leq w)\,(f \text{ mf } w \wedge ff\,y\,f\,z\,ff\,P\,w \wedge f\,\widetilde{P}\,y \wedge f\,\widetilde{P}\,z)$$

$\Rightarrow K(y,z,w) \in \Sigma_0$

□

Punkt 1 von Lemma K

Punkt 2 von Lemma K

Lemma K

Beweis

$$K(y,z,w) \underset{\text{def}}{=} (\exists f \leq w)\,(f \text{ mf } w \wedge ff\,y\,f\,z\,ff\,P\,w \wedge f\,\widetilde{P}\,y \wedge f\,\widetilde{P}\,z)$$

$\Rightarrow K(y,z,w) \in \Sigma_0$

$\square$

Punkt 1 von Lemma K

Punkt 2 von Lemma K

Lemma K

Beweis

$$K(y,z,w) \underset{\text{def}}{=} (\exists f \leq w)\,(f \text{ mf } w \wedge ff\,y\,f\,z\,ff\,P\,w \wedge f\,\widetilde{P}\,y \wedge f\,\widetilde{P}\,z)$$

$$\Rightarrow K(y,z,w) \in \Sigma_0$$

$\square$

Punkt 1 von Lemma K

Punkt 2 von Lemma K

Lemma K

Beweis

$$K(y,z,w) \underset{\text{def}}{=} (\exists f \leq w)\,(f \;\text{mf}\; w \wedge ff\,y\,f\,z\,ff\,P\,w \wedge f\,\widetilde{P}\,y \wedge f\,\widetilde{P}\,z)$$

$$\Rightarrow K(y,z,w) \in \Sigma_0$$

□

Punkt 1 von Lemma K

Punkt 2 von Lemma K

Theorem E - Beweis 1

Beweis

$x^y = z$ wird nun beschrieben durch:

$$\exists w \Big(K(y,z,w) \wedge (\forall a \leq w)\,(\forall b \leq w)\,\big(K(a,b,w) \supset ((a = 0 \wedge b = \bar{1}) \\ \vee (\exists c \leq a)\,(\exists d \leq b)\,(K(c,d,w) \wedge a = c + \bar{1} \wedge b = d \cdot x))\big)\Big)$$

Damit ist $x^y = z$ eine Σ_1-Relation.

$\square$

Theorem E - Beweis 1

Beweis

$x^y = z$ wird nun beschrieben durch:

$$\exists w \Big(K(y,z,w) \wedge (\forall a \leq w)\,(\forall b \leq w)\,\big(K(a,b,w) \supset ((a = 0 \wedge b = \overline{1}) \\ \vee (\exists c \leq a)\,(\exists d \leq b)\,(K(c,d,w) \wedge a = c + \overline{1} \wedge b = d \cdot x))\big)\Big)$$

Damit ist $x^y = z$ eine Σ_1-Relation.

□

Theorem E - Beweis 1

Beweis

$x^y = z$ wird nun beschrieben durch:

$$\exists w \Big(K(y,z,w) \wedge (\forall a \leq w)\,(\forall b \leq w)\,\big(K(a,b,w) \supset ((a = 0 \wedge b = \overline{1})$$

$$\vee\ (\exists c \leq a)\,(\exists d \leq b)\,(K(c,d,w) \wedge a = c + \overline{1} \wedge b = d \cdot x))\big)\Big)$$

Damit ist $x^y = z$ eine Σ_1-Relation.

$\square$

Theorem E - Beweis 1

Beweis

$x^y = z$ wird nun beschrieben durch:

$$\exists w \Big(K(y,z,w) \wedge (\forall a \leq w)\,(\forall b \leq w)\,\big(K(a,b,w) \supset ((a = 0 \wedge b = \overline{1}) \\ \vee (\exists c \leq a)\,(\exists d \leq b)\,(K(c,d,w) \wedge a = c + \overline{1} \wedge b = d \cdot x))\big)\Big)$$

Damit ist $x^y = z$ eine Σ_1-Relation.

$\square$

Die Beta - Funktion

Definition

Eine **Beta - Funktion** ist eine Funktion $\beta(w,y)$, wenn für jede endliche Sequenz von Zahlen $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ ein w existiert, so dass $\beta(w,0) = a_0, \dots, \beta(w,n) = a_n$

Anmerkung

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist eine Σ_0-Funktion, wenn $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = y$ eine Σ_0-Relation ist.

Die Beta - Funktion

Definition

Eine **Beta - Funktion** ist eine Funktion $\beta(w,y)$, wenn für jede endliche Sequenz von Zahlen $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ ein w existiert, so dass $\beta(w, 0) = a_0, \ldots, \beta(w,n) = a_n$

Anmerkung

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist eine Σ_0-Funktion, wenn $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y$ eine Σ_0-Relation ist.

Theorem B

Behauptung

Es gibt eine Σ_0-Beta-Funktion.

Beweis

Sei $\beta(w,y)$ das kleinste z, so dass $K(y,z,w)$ gilt, wenn ein solches z existiert. Andernfalls sei $\beta(w,y) = 0$.
Damit kann man zeigen, dass $\beta(w,y) = z$ eine Σ_0-Relation ist:

$$\Big(K(y,z,w) \wedge (\forall a < z) \sim K(y,a,w)\Big) \vee \Big(\sim (\exists a \leq w)\, K(y,a,w) \wedge z = 0\Big)$$

Theorem B

Behauptung

Es gibt eine Σ_0-Beta-Funktion.

Beweis

Sei $\beta(w,y)$ das kleinste z, so dass $K(y,z,w)$ gilt, wenn ein solches z existiert. Andernfalls sei $\beta(w,y) = 0$.
Damit kann man zeigen, dass $\beta(w,y) = z$ eine Σ_0-Relation ist:

$$\Big(K(y,z,w) \wedge (\forall a < z) \sim K(y,a,w)\Big) \vee \Big(\sim (\exists a \leq w)\, K(y,a,w) \wedge z = 0\Big)$$

Theorem B

Behauptung

Es gibt eine Σ_0-Beta-Funktion.

Beweis

Sei $\beta(w,y)$ das kleinste z, so dass $K(y,z,w)$ gilt, wenn ein solches z existiert. Andernfalls sei $\beta(w,y) = 0$.

Damit kann man zeigen, dass $\beta(w,y) = z$ eine Σ_0-Relation ist:

$$\Big(K(y,z,w) \wedge (\forall a < z) \sim K(y,a,w)\Big) \vee \Big(\sim (\exists a \leq w)\, K(y,a,w) \wedge z = 0\Big)$$

Theorem E - Beweis 2

Beweis - Teil 1

Sei S_1 eine endliche Sequenz $(1, x, x^2, \ldots, x^y)$.

Mit Hilfe der Beta-Funktion kann $x^y = z$ nun folgendermaßen dargestellt werden:

$$\exists w \Big(\beta(w,0) = 1 \ \wedge \ \beta(w,y) = z \\ \wedge \ (\forall n < y) \ (\beta(w, n+1) = \beta(w,n) \cdot x) \Big)$$

Theorem E - Beweis 2

Beweis - Teil 1

Sei S_1 eine endliche Sequenz $(1, x, x^2, \ldots, x^y)$.

Mit Hilfe der Beta-Funktion kann $x^y = z$ nun folgendermaßen dargestellt werden:

$$\exists w \Big(\beta(w, 0) = 1 \;\wedge\; \beta(w, y) = z \\ \wedge\; (\forall n < y)\; \big(\beta(w, n+1) = \beta(w, n) \cdot x\big) \Big)$$

Theorem E - Beweis 2

Beweis - Teil 2

Anmerkung:

$\beta(w,n+1) = \beta(w,n) \cdot x$ ist Σ_0:

$$(\exists m_1 \leq w)\,(\exists m_2 \leq w)\,(\exists m_3 \leq w)\,\Big(m_1 = n+1 \wedge \beta(w,m_1) = m_2 \wedge \beta(w,n) = m_3 \wedge m_2 = m_3 \cdot x\Big)$$

Damit ist $x^y = z$ eine Σ_1-Relation.

□

Theorem E - Beweis 2

Beweis - Teil 2

Anmerkung:

$\beta(w,n+1) = \beta(w,n) \cdot x$ ist Σ_0:

$$(\exists m_1 \leq w)\,(\exists m_2 \leq w)\,(\exists m_3 \leq w)\,\Big(m_1 = n+1 \wedge \beta(w,m_1) = m_2 \wedge \beta(w,n) = m_3 \wedge m_2 = m_3 \cdot x\Big)$$

Damit ist $x^y = z$ eine Σ_1-Relation.

$\square$

Korollare - Teil 1

Korollar 1

Für jede arithmetische Menge A gilt, A^* ist arithmetisch.

Wenn A in Σ ist, so auch A^*.

Beweis (kurz)

- Verwendung von $\mathrm{d}(y) = z$ wegen A^*
- $\mathrm{d}(y)$ enthält **E**

E ist arithmetisch und $\in \Sigma$

$\square$

Korollare - Teil 2

Korollar 2 - Tarski's Theorem für $\mathcal{L}_A$

Die Menge T_A der Gödelnummern der wahren arithmetischen Sätze ist nicht arithmetisch.

indirekter Beweis

Annahme: T_A arithmetisch

T_A arithmetisch $\Rightarrow \widetilde{T_A}$ arithmetisch $\stackrel{Kor1}{\Rightarrow} \widetilde{T_A^*}$ arithmetisch

$\Rightarrow \quad H[\overline{h}]$ wahr $\iff H[\overline{h}]$ nicht wahr

Widerspruch!

$\square$

Korollare - Teil 3

Korollar 3

P_E^* und R_E^* sind Σ. $\widetilde{P_E^*}$ ist arithmetisch.

Beweis

Schon gezeigt: P_E und R_E sind Σ

$$\overset{Kor1}{\Rightarrow} P_E^* \text{ und } R_E^* \text{ sind auch } \Sigma$$

$$P_E \in \Sigma \Rightarrow P_E \text{ arithmetisch} \Rightarrow \widetilde{P_E} \text{ arithmetisch} \overset{Kor1}{\Rightarrow} \widetilde{P_E^*} \text{ arithmetisch}$$

$\square$